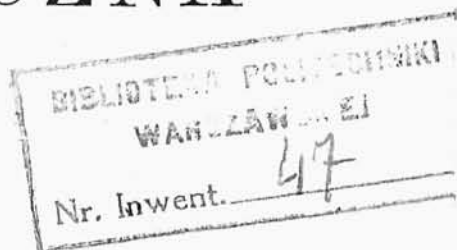


ARYTMETYKA TEORETYCZNA

NAPISAŁ

STANISŁAW ZAREMBA

PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO



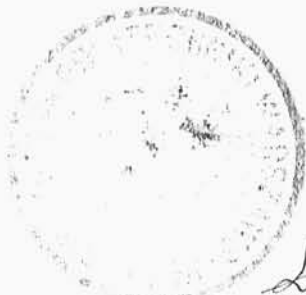
W KRAKOWIE

AKADEMIA UMIEJĘTNOŚCI

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ

1912.

i. z. 3572



~~C. 1094~~ D. 94



nr. 100

Drukarnia Uniwersytetu Jagiell. pod zarządem J. Filipowskiego.

BGO 10/1094-04

PRZEDMOWA.

Niniejszą książkę należy uważać za ciąg dalszy i dokończenie dzieła, którego początek wydałem w r. 1907 pod tytułem: *Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych*. Książkę tę napisałem wogóle dla osób, oddających się głębszym studyom z zakresu analizy matematycznej, przedewszystkiem jednak miałem na myśli przyszłych profesorów matematyki w średnich i wyższych zakładach naukowych.

Będąc głęboko przekonany, że jakość działalności nauczycielskiej, nawet przy elementarnem nauczaniu, w pierwszym rzędzie zależy od stopnia, w jakim nauczyciel sam opanował swój przedmiot, zważywszy nadto kapitalną rolę, jaka przypada pojęciu liczby w całej matematyce, poczynawszy od całkiem elementarnych działów tej nauki, usiłowałem opracować pojęcie liczby, które stanowi właściwy przedmiot arytmetyki teoretycznej, w tej książce w sposób możliwie wszechstronny i wyczerpujący, uwzględniając przytem najnowsze zdobycze nauki na tem polu.

W ciągu ostatniego pięćdziesięciolecia arytmetykę teoretyczną udoskonalono bardzo znacznie, a ostatnie postępy w tym kierunku dokonane zostały przed kilkoma laty. Rzeczono postępy polegają częściowo na wprowadzeniu nowych pojęć i nowych rodzajów liczb, ale rozwój arytmetyki teoretycznej w najnowszych czasach jest przedewszystkiem nacechowany tem, iż pewne pojęcia całkiem elementarne, a istniejące już w nauce od wielu setek lat, zostały ugruntowane i powiązane ze sobą w sposób bardziej zadawalający ze stanowiska logiki. Ze względu na tę właściwość rozwoju arytmetyki teoretycznej, nie mogłem pominąć nawet najelementarniejszych kwestyi pomimo, że zakres tej książki wykracza poza granice zwykłych wykładów uniwersyteckich, i musiałem napisać dzieło bardzo obszerne.

Analiza matematyczna opiera się na arytmetyce teoretycznej, ale nie wszystkie części arytmetyki teoretycznej zaliczać należy do niezbędnych podstaw analizy matematycznej i dlatego, przed przystąpieniem do studyowania analizy matematycznej, koniecznem jest obznajomić się częściowo tylko z arytmetyką teoretyczną. W rzeczywistości nie należy nawet czynić usiłowań do zupełnego wystudyowania arytmetyki teoretycznej przed analizą, gdyż pewne działy arytmetyki teoretycznej mogą być należycie zrozumiane tylko przez osoby, które już posiadają pewne wiadomości z zakresu analizy matematycznej. Ostatecznie należy przestudyować przed analizą matematyczną pewne części tylko arytmetyki teoretycznej, dalsze zaś studia z tego zakresu powinny odbywać się w miarę coraz szerszego poznawania analizy. Wobec takiego stanu rzeczy, koniecznem jest, żebyśmy podali bliższe wskazówki o tem, jak należy korzystać z niniejszej książki.

Żeby przygotować się należycie do rozpoczęcia studyowania analizy matematycznej, powinien czytelnik starannie wystudyować najpierw pierwszych 6 rozdziałów niniejszej książki. Przy pierwszym czytaniu można zadowolić się ogólnikowem tylko poznaniem treści rozdziału VII-go i wprost przejść do rozdziałów VIII-go, IX-go i X-go. Koniecznem jest, żeby czytelnik doskonale zapamiętał definicje podane w tych rozdziałach i treść twierdzeń, natomiast zapamiętanie szczegółowe dowodów tych twierdzeń nie jest konieczne.

Nie zachodzi konieczność drobiazgowego przestudyowania rozdziałów XI-go i XII-go; ogólnikowe poznanie treści tych rozdziałów wystarczy, kiedy chodzi tylko o przygotowanie się do rozpoczęcia studyowania analizy matematycznej. Natomiast koniecznem jest, żeby czytelnik doskonale poznał, przed analizą matematyczną, teorie, wyłożone w rozdziałach XIII-tym i XIV-tym, gdyż te teorie stanowią właściwe podstawy wyższej analizy matematycznej.

Po przestudyowaniu dopiero co wskazanych rozdziałów można, a nawet należy, przystąpić do studyowania początków analizy matematycznej, czyli tej części tejże, którą stanowi teoria funkcji rzeczywistych zmiennych rzeczywistych. Nadmieniamy przytem, że aż do rozdziału XIV-go, a nawet do rozdziału XV-go włącznie zakładamy jedynie, że czytelnik obeznany jest tylko z podstawowemi własnościami liczb całkowitych i początkami elementarnej geometrii, dodajemy jednak, że błędem byłoby mniemanie, iż rzeczony rozdział niniejszego dzieła są dostępne dla ucznia gimna-

zyalnego; rozumienie ściśle naukowego wykładu, jaki usiłowaliśmy podać, wymaga znacznego stopnia dojrzałości umysłowej, na który wogóle liczyć można tylko u słuchaczy wyższych zakładów naukowych.

Rozdziały XV-ty i XVI-ty, które omówione zostaną niżej, mogą przy pierwszym czytaniu być opuszczone, a po przestudyowaniu rozdziału XVII-go, który wymaga tylko uprzedniej znajomości elementów trygonometrii i geometrii analitycznej, uzyska czytelnik zupełne przygotowanie do ogólnych zasad analizy matematycznej wraz z teorią funkcji zespolonych zmiennej zespolonej; winniśmy dodać, że § 145-ty, mogący początkującemu sprawiać pewne trudności, może być całkiem opuszczony przez czytelnika, któremu chodzi tylko o należyte przygotowanie się do ogólnych zasad analizy matematycznej.

Pozostaje do omówienia znaczenie oraz sposób i czas studyowania rozdziałów VII-go, VIII-go, IX-go, X-go, XI-go, XII-go, XV-go, XVI-go XVIII-go i XIX-go.

Dwa ostatnie rozdziały, a więc rozdział XVIII-ty i XIX-ty przeznaczone są dla osób, które już poznały ogólne zasady analizy matematycznej. Rozdziały te mają przeważnie znaczenie filozoficzne; kto nie interesuje się zagadnieniami z zakresu filozofii matematyki, ten może rozdziałów tych wogóle nie czytać. Bliższe wyjaśnienia są konieczne co do rozdziałów VII-go, VIII-go, IX-go, X-go, XI-go, XII-go, XV-go i XVI-go.

Liczby dziesiętne, stanowiące przedmiot rozdziału VII-go, objęte są programem zakładów średnich i dlatego rozdział ten musi być dokładnie przestudyowany przez nauczycieli szkół średnich. Naturalnie mowy być nie może o tem, żeby teorię liczb dziesiętnych tak wyczerpująco i ściśle wykladać w szkołach średnich, jakieśmy ją wyłożyli w rozważanym rozdziale, ale wychodząc z zasady, że nauczyciel winien sam opanować materię przez siebie wykładaną, gorąco polecamy studyum tego rozdziału; sądzimy nadto, że gruntowne poznanie treści rzeczzonego rozdziału wskazane jest jeszcze i dlatego, że poznawszy treść tegoż, będzie czytelnik mógł układać wiele bardzo pouczających ćwiczeń dla swoich uczniów. Co się zaś tyczy znaczenia samej teorii, wyłożonej w rozważanym rozdziale, to winniśmy nadmienić, że teoria ta, bardzo ważna ze stanowiska techniki rachunkowej, jest zbędna dla oderwanej analizy matematycznej. Przy studyowaniu rozdziału VII-go, zarówno jak i roz-

działów VIII-go, IX-go, X-go, XI-go, XII-go i XV-go bardzo polecamy metodę, polegającą na tem, żeby samemu próbować uzasadnienia twierdzeń, a później porównywać wyniki własnej pracy z tekstem.

Rozdziały VIII-my i IX-ty sięgają prawie całkiem poza zakres nauki gimnazyalnej, sądzymy jednak, że po pierwszym studyum niniejszej książki, należy do rozdziałów tych powrócić i gruntownie poznać treść tychże, a to dlatego, iż na tych właśnie rozdziałach opierają się przedewszystkiem rozdziały XIII-ty i XIV-ty, które stanowią, jakśmy już zaznaczyli, podstawy analizy matematycznej. Rozdział X-ty należy do najbardziej podstawowych, a przedmiot rozdziału tego należy do zakresu nauki gimnazyalnej. Wobec tego należy ten rozdział do tych, które przez nauczyciela szkół średnich powinny być gruntownie przestudjowane; zaznaczamy przytem, że teoria, wyłożona w tym rozdziale nie opiera się na rozdziałach VIII-mym i IX-tym, gdyż rozdział ten nie utraciłby znaczenia, gdybyśmy zastąpili wyrażenie „liczba bezwzględna“ przez wyrażenie „liczba wymierna bezwzględna“.

Rozdziały XI-ty i XII-ty mają przeważnie znaczenie filozoficzne, ale sądzymy, że i do tych rozdziałów należy powracać aż do zupełnego ovladnięcia przewodniami myślami tychże, albowiem w przeciwnym razie byłby czytelnik narażony na szkodliwe nieporozumienia, zwłaszcza w dziedzinie zastosowania matematyki do przyrodoznawstwa.

Dla oderwanej analizy rozdział XV-ty jest prawie zbędny, ale teoria, wyłożona w tym rozdziale, ma pierwszorzędne znaczenie dla techniki rachunkowej, wobec tego każdy matematyk powinien ovladnąć w zupełności treścią tego rozdziału.

Rozdział XVI-ty ma wielkie znaczenie ze względu na pewne szczególne zagadnienia, ale nie należy do rozdziałów zasadniczych, gdyż można w pewnych kierunkach zagłębiać się bardzo daleko w analizę matematyczną, nie znając całkiem ułamków łańcuchowych. Dalsze rozdziały w niczem nie opierają się na rozdziale XVI-tym, wobec czego, po przeczytaniu rozdziałów, które ten rozdział poprzedzają, może czytelnik zwrócić się do rozważanego rozdziału w jakiegokolwiek chwili.

Ogłaszając książkę tak obszerną, jaką jest niniejsza, winienem podać powody, które mnie skłoniły do jej napisania. Otóż zaznaczam najpierw, że w naszej literaturze naukowej niema podręcznika arytmetyki teoretycznej, odpowiadającego współczesnym wymaganiom nauki. Wobec tego koniecznem było albo napisanie takiego podręcznika, albo przełożenie na język polski jednego z dzieł obcych. Wybrałem pierwszą alternatywę ze względów następujących:

1°. W najlepszym ze znanych mi podręczników, mianowicie: Stolz und Gmeiner: *Teoretische Arithmetik*, teoria liczb wymiernych wogóle, a teoria liczb dziesiętnych w szczególności, nie jest opracowana w sposób dostatecznie wyczerpujący.

2°. Chodziło mi o systematyczne zastosowanie się do zasad wyłożonych w rozdziale V-tym oraz o rozwinięcie pojęć omówionych w rozdziale XI-tym, a te pojęcia, o ile mi jest wiadomo, w żadnej pracy systematycznie rozwijane nie były.

3°. Nie jest mi także wiadomem, żeby istniała praca, w której ogólna teoria, stanowiąca przedmiot rozdziału XII-go, była systematycznie podana.

4°. Pragnąłem skorzystać z najnowszych prac Hilberta, żeby opracować w sposób stosunkowo przystępny temat rozdziału XIX-go.

Cytaty podawane w tekście mają tylko na celu zapobieżenia temu, żeby czytelnik nie przypisał mnie wyników, które zawdzięczamy innym badaczom. Natomiast uważałem za zbyteczne podawanie literatury przedmiotu, gdyż czytelnik znajdzie wyczerpującą bibliografię Arytmetyki teoretycznej w *Encyklopedyi matematyki*, która wychodzi w języku niemieckim nakładem firmy Teubner w Lipsku, a w języku francuskim nakładem firmy Gauthier-Villars w Paryżu.

Pozostaje mi jeszcze do spełnienia miły obowiązek podziękowania Akademii Umiejętności w Krakowie za wydanie mojej książki i wyrażenia serdecznej wdzięczności osobom, które łaskawie wspierały mnie przy prowadzeniu korekty.

Przedewszystkiem winienem powiedzieć, jak wiele zawdzięczam memu Szanownemu Koledze Profesorowi Sleszyńskiemu. Dzięki Profesorowi Sleszyńskiemu nie tylko usunięte zostały liczne błędy

drukarskie, ale, co wiele ważniejsze, korzystając ze światłych rad Jego, zdołałem poprawić w znacznym stopniu redakcyę wielu ustępów.

Drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego należą się także ode mnie wyrazy uznania i wdzięczności za chętne i staranne wykonywanie roboty drukarskiej.

W Krakowie, 16 lipca 1912 r.

S. Zaremba.