

## **XIX. Problem ugrupowania charakterystycznych własności liczb rzeczywistych i zagadnienia, zostające w związku z tym problemem.**

§ 167. W rozdziałach poprzedzających zbadaliśmy bliżej kilka typów liczb, a w § 157-ym (uwaga *A*, str. 752) poznaliśmy metodę, która daje możność utworzenia dowolnej ilości nowych typów tychże. W rzeczywistości dadzą się pomyśleć inne jeszcze metody do tworzenia coraz to nowych rodzajów liczb i wogóle niepodobienstwem jest ustawić *a priori* jakiejkolwiek granice twórczości naukowej w tym kierunku. Z drugiej strony ogólny bieg rozwoju nauki poucza nas, że znaczenie oznaczonego typu liczb przedewszystkiem zależy od stopnia, w jakim ten typ liczb zbliżony jest do typu liczb rzeczywistych. Wobec tego zaprowadzenie ładu pośród niezliczonej rozmaitości typów liczb, jakie pomyślane być mogą, nie da się uskutecznić inaczej, jak tylko drogą takiego ugrupowania własności charakterystycznych typu liczb rzeczywistych, żeby porównywanie ważniejszych typów liczb z typem liczb rzeczywistych dokonywane być mogło w sposób możliwie dogodny. Z tego powodu poświęcamy niniejszy rozdział problemowi ugrupowania własności charakterystycznych typu liczb rzeczywistych.

W dalszym ciągu oznaczać będziemy przez wyrażenie typ liczb urojonych każdy taki typ liczb, który nie jest izomorficzny ani zbiorowi liczb rzeczywistych, ani żadnemu podzbiorowi tegoż zbioru.

§ 168. Zastanówmy się bliżej nad warunkami, które uwzględnić należy przy rozwiązywaniu problemu ugrupowania własności charakterystycznych zbioru liczb rzeczywistych. Własności charakterystyczne zbioru liczb rzeczywistych możemy oczywiście wyrazić w postaci takiego układu twierdzeń, żeby wszystkie twierdzenia tego układu zachodziły dla każdego zbioru liczb izomorficznego zbiorowi liczb rzeczywistych, i tylko dla takiego zbioru liczb. Ponieważ oczywistą jest rzeczą, że istnieje nieskończenie wiele takich

układów twierdzeń w teorii liczb rzeczywistych, z których każdy wyraża własności charakterystyczne zbioru liczb rzeczywistych, przeto, przystępując do problemu ugrupowania charakterystycznych własności zbioru liczb rzeczywistych, należy przedewszystkiem wybrać spośród rzeczonych układów twierdzeń ten układ ( $U$ ), który ma podlegać ugrupowaniu. W § 96-tym ustawiliśmy już pewien układ własności charakterystycznych typu liczb rzeczywistych, ale wówczas nie byliśmy jeszcze przygotowani do należytego uwzględnienia wszystkich warunków zadania. Wobec tego zamierzamy opracować ponownie sprawę ułożenia układu ( $U$ ). Jakimi zasadami mamy kierować się przy tem? Oczywiście jest rzeczą, że przy wyborze twierdzeń, które razem stanowią układ ( $U$ ), zniewoleni jesteśmy do kierowania się w znacznym stopniu osobistym uznaniem, ale winniśmy zbadać, czy logika nie ogranicza w pewnej mierze naszej samowoli w tym względzie. Otóż w pierwszej chwili zdawałoby się, że należy w każdym razie zastosować się do zasady następującej:

*A) Żadne z twierdzeń układu ( $U$ ) nie powinno być logicznem następstwem twierdzeń pozostałych. Ponieważ sprzeczność pomiędzy twierdzeniami układu ( $U$ ) jest wykluczona ze względu na sposób postawienia kwestyi, przeto warunek poprzedzający możemy wyrazić jak następuje: Twierdzenia, stanowiące układ ( $U$ ), winne być niezależne jedne od drugich.*

Przedewszystkiem winniśmy dokładnie wyjaśnić sobie, jak tę zasadę należy rozumieć. W tym celu zaznaczmy najpierw, że treść każdego twierdzenia układu ( $U$ ) zawsze da się ująć dokładnie w ogólnej postaci następującej:

*B) Ta okoliczność, że twierdzenie, które właśnie wysławiamy, zachodzi dla oznaczonego zbioru liczb ( $Z$ ), polega na tem, że elementy zbioru ( $Z$ ) są rzeczami, w stosunku do których takie a takie warunki sprowadzają takie a takie następstwa.*

Oznaczmy teraz przez  $n$  liczbę twierdzeń, które razem stanowią układ ( $U$ ), a przez symbole

$$(T_1), (T_2), (T_3), \dots (T_n)$$

twierdzenia, które łącznie stanowią układ ( $U$ ). Jeżeli wyrazy matematyczne<sup>1)</sup>, którymi posługujemy się przy wysławianiu powyższych

<sup>1)</sup> Wyrazy, które obejmujemy tu pod nazwą „wyrazów matematycznych”, moglibyśmy wyszczególnić, ale sądzimy, że byłoby to zbyteczne.

twierdzeń tak mogą być określone, żeby wszystkie te twierdzenia, prócz pewnego jednego z nich,  $(T_k)$ , zachodziły, to w takim razie orzekamy, że twierdzenie  $(T_k)$  jest niezależne od twierdzeń pozostałych; jeżeli zaś bez względu na znaczenie rzeczonych wyrazów matematycznych pewne twierdzenie  $(T_k)$  układu  $(U)$  zachodzi niezawodnie, skoro tylko zachodzą twierdzenia pozostałe, to w takim razie orzekamy, że twierdzenie  $(T_k)$  jest następstwem logicznym twierdzeń pozostałych.

Wyjaśnienia powyższe usuwają wszelką wątpliwość co do treści zasady  $A$ . Zatem chodzi już tylko o to, czy ta zasada uważana ma być za obowiązującą bezwarunkowo? Żeby na pytanie to odpowiedzieć, należy przedewszystkiem uwzględnić okoliczność następującą: Wydarza się niekiedy, że oznaczone twierdzenie  $(T)$ , należące do oznaczonego układu  $(W)$ , nie jest ani twierdzeniem niezależnym od twierdzeń powstałych z układu  $(W)$ , ani twierdzeniem, należącym do następstw logicznych tych twierdzeń. Okoliczność ta oczywiście zachodzić będzie, jeżeli poprawność twierdzenia  $(T)$  należeć będzie do warunków koniecznych, ażeby żadne z innych twierdzeń układu  $(W)$  treści pozbawione nie było. Otóż, przy naszej metodzie wykładu, przypadek tego rodzaju zawsze zdarzyć się musi w układzie twierdzeń, który oznaczyliśmy wyżej przez  $(U)$ , gdyż pośród twierdzeń, stanowiących razem układ  $(U)$ , zawsze znajdują się takie, które straciłyby wszelką treść, gdyby nie zachodziły pewne inne twierdzenia tegoż układu. Istotnie, pewne z twierdzeń o działaniach zasadniczych muszą oczywiście być przyjęte do układu  $(U)$ , a z drugiej strony każde z nich pozbawione byłoby treści, gdyby nie zachodziły te twierdzenia, które wyrażają, iż rozważany zbiór liczb jest zbiorem wielkości przynajmniej w znaczeniu szerszem.

Z tego wynika, że bezwarunkowe zastosowywanie się do zasady  $A$  przy układaniu układu  $(U)$  jest niemożliwe, ale może moglibyśmy, w pewnym stopniu przynajmniej, do tej zasady zastosować się, zastępując ją przez zasadę następującą:

*C) Twierdzenia, stanowiące układ  $(U)$ , powinny być podane w postaci ciągu grup*

$$(1) \quad (G_1), (G_2), \dots (G_p),$$

*uszeregowanych w taki sposób, żeby zachodziły okoliczności następujące:*

1°. Każde twierdzenie grupy  $(G_1)$  pomyślane być może bez względu na to, czy inne twierdzenia  $(U)$  zachodzą.

2°. Żeby oznaczone twierdzenie grupy  $(G_k)$  ( $k > 1$ ) pomyslane być mogło, wystarczającym jest, żeby zachodziły twierdzenia grup, które w ciągu (1) grupę  $(G_k)$  poprzedzają.

3°. Każde twierdzenie grupy  $(G_k)$  ( $1 \leq k \leq p$ ) jest niezależne od wszystkich innych z tych twierdzeń układu  $(U)$ , które należą do grup

$$(G_1), (G_2) \dots (G_k).$$

Całkiem ściśle trzymanie się zasady  $C$  jest rzeczą możliwą, ale niedogodną, gdyż uniemożliwiłoby wprowadzenie pewnych takich twierdzeń do układu  $(U)$ , które mogłyby ułatwić, albo wystawianie pewnych innych twierdzeń tegoż układu, albo porównywanie pewnych typów liczb urojonych z typem liczb rzeczywistych. Wobec tego przyjmujemy ostatecznie zasadę następującą:

*D) Będziemy zastosowywać się ściśle tylko do dwóch pierwszych warunków zasady  $C$ . Co się zaś tyczy trzeciego warunku, to spełnienia jego nie będziemy uważać za rzecz konieczną, ale po ustaleniu wykazu twierdzeń, stanowiących każdą z grup (1), zbadamy, które z twierdzeń każdej grupy  $(G_k)$  należą do następstw twierdzeń pozostałych tejże grupy i, w razie nierówności  $k > 1$ , twierdzeń grup, które grupę  $(G_k)$  w ciągu (1) poprzedzają.*

Na podstawie powyższej zasady wyszczególnienie twierdzeń, stanowiących razem układ  $(U)$ , nie może być dokonane bez pewnego ugrupowania tychże, ale z tego nie wynika jeszcze, żeby po wyszczególnieniu twierdzeń każdej z grup (1) sam problem ugrupowania własności charakterystycznych typu liczb rzeczywistych miał być uważany za rozwiązany.

W rzeczywistości pewne ugrupowanie grup (1) jest wskazane. Ponieważ jednak sposób, w jaki grupy (1) połączone być powinny w grupy szersze, w znacznej mierze wpływa bezpośrednio z natury rzeczy, a po części zależy od elementów natury subiektywnej, przeto przechodzimy wprost do wyszczególnienia twierdzeń układu  $(U)$  w tem ugrupowaniu, które wydaje się nam najodpowiedniejszym, nie zagłębiając się już dalej w rozbiór ogólnych warunków problemu.

§ 169. W paragrafie powyższym przytoczyliśmy pod  $B$  ogólną postać, w której każde twierdzenie układu  $(U)$  może być dokładnie wyrażone. Jednakowoż, żeby uniknąć konieczności podawania rzeczonych twierdzeń w tej ciężkiej postaci, wysławiać będziemy owe twierdzenia tak, jak gdyby wyraz „liczba“ oznaczał element pe-

wnego całkiem oznaczonego i dobrze znanego zbioru, a czytelnik zechce wziąć pod uwagę, że w rzeczywistości w każdym twierdzeniu wyraz „**liczba**“ oznaczać będzie element takiego zbioru, dla elementów którego rozważane twierdzenie zachodzi.

Uwzględniając te uwagi wstępne, czytelnik będzie mógł z największą łatwością sam każde twierdzenie układu ( $U$ ) wysłowić w postaci, podanej w paragrafie poprzednim pod  $B$ , pomimo, że podamy te twierdzenia w postaci, która sama przez się nie wydawnia należycie myśli, o wyrażenie której właściwie chodzić będzie.

Podając twierdzenia układu ( $U$ ), zaopatrzymy każde z nich w symbol postaci

$$(l, G_k),$$

gdzie  $l$  oznaczać będzie liczbę porządkową twierdzenia, a symbol

$$G_k$$

tę z grup

$$(G_1), (G_2), (G_3), \dots,$$

rozważanych w paragrafie poprzednim, do której twierdzenie ma być zaliczone.

**I. Twierdzenia, które ze względu na ogólne zasady rozdziałów II-go, V-go i XI-go zachodzą dla każdego typu liczb bez wyjątku.**

*A) Twierdzenia zapewniające zbiorowi liczb charakter zbioru wielkości.*

(1,  $G_1$ ). *Każda dowolnie przyjęta liczba*

$$a$$

*sprawdza równość*

$$a = a.$$

(2,  $G_2$ ). *Jeżeli oznaczymy przez  $a$  i  $b$  dwie liczby, to równości*

$$a = b \quad \text{i} \quad b = a$$

*będą równoważne pomiędzy sobą.*

(3,  $G_2$ ). *Jeżeli trzy liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$  sprawdzają równości*

$$a = b \quad \text{i} \quad b = c,$$

*to w takim razie zachodzi i równość*

$$a = c.$$

*B) Twierdzenie zapewniające istnienie nieskończenie wielu nierównych pomiędzy sobą liczb.*

(4,  $G_3$ ). Jakakolwiek, byle skończoną ilość liczb obejmowałby pewien układ ( $\alpha$ ) tychże, zawsze istnieje będzie jedna przynajmniej liczba, która nie będzie równać się żadnej liczbie układu ( $\alpha$ ).

C) Twierdzenia zapewniające wykonalność dodawania i mnożenia oraz zgodność definicyi tych działań z ogólnemi zasadami rozdziału V-go.

(5,  $G_4$ ). Każdej parze liczb  $a$  i  $b$  odpowiada jedna przynajmniej liczba, która uważana być może za wynik dodania liczby  $b$  do liczby  $a$ .

(6,  $G_4$ ). Każdej parze liczb  $a$  i  $b$  odpowiada jedna przynajmniej liczba, która uważana być może za iloczyn liczby  $a$ , przyjętej za mnożną, przez liczbę  $b$  przyjętą za mnożnik.

(7,  $G_5$ ). Jeżeli oznaczona liczba  $c$  uważana być może za wynik dodania pewnej liczby  $b$  do pewnej liczby  $a$ , to każda liczba  $c'$  równa liczbie  $c$ , także może być uważana za wynik dodania liczby  $b$  do liczby  $a$ .

(8,  $G_5$ ). Jeżeli liczby  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  i  $b'$  sprawdzają równości

$$a = a' \quad \text{ i } \quad b = b',$$

to każda liczba  $c$ , która uważana być może za wynik dodania liczby  $b$  do liczby  $a$ , równa się każdej liczbie  $c'$ , mogącej być uważaną za wynik dodania liczby  $b'$  do liczby  $a'$ .

Uwaga. Jeżeli, jak zawsze, umówimy się, że symbol

$$a + b,$$

gdzie  $a$  i  $b$  oznaczają dwie liczby dowolnie przyjęte, ma oznaczać którąkolwiek z liczb, z których każda uważana być może za wynik dodania liczby  $b$  do liczby  $a$ , to ze względu na twierdzenia (7,  $G_4$ ) i (8,  $G_4$ ) warunek konieczny i wystarczający, ażeby oznaczona liczba  $c$  uważana być mogła za wynik dodania liczby  $b$  do liczby  $a$ , polegać będzie na równości

$$c = a + b$$

(9,  $G_5$ ). Jeżeli pewna liczba  $c$  uważana być może za iloczyn oznaczonej liczby  $a$ , przyjętej za mnożną, przez oznaczoną liczbę  $b$ , przyjętą za mnożnik, to każda liczba równa liczbie  $c$  może także być uważana za iloczyn, w którym liczby  $a$  i  $b$  stanowią odpowiednio mnożną i mnożnik.

(10,  $G_5$ ). Jeżeli liczby  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  i  $b'$  sprawdzają równości

$$a = a' \quad \text{ i } \quad b = b',$$

to każda liczba  $c$ , mogąca być uważana za iloczyn, w którym liczby  $a$  i  $b$  stanowią odpowiednio mnożną i mnożnik, równa się każdej liczbie  $c'$ , mogącej być uważaną za iloczyn, w którym liczby  $a$  i  $b'$  stanowią odpowiednio mnożną i mnożnik.

U w a g a. Jeżeli, jak zawsze, umówimy się, że symbol

$$a \cdot b$$

ma być uważany jako oznaczający którąkolwiek z liczb, z których każda uważana być może za iloczyn liczby  $a$ , przyjętej za mnożną, przez liczbę  $b$ , przyjętą za mnożnik, to na podstawie twierdzeń (9,  $G_5$ ) i (10,  $G_5$ ) warunek konieczny i wystarczający, ażeby oznaczona liczba  $c$  uważana być mogła za iloczyn liczby  $a$ , przyjętej za mnożną przez liczbę  $b$ , przyjętą za mnożnik, polegać będzie na równości

$$c = a \cdot b.$$

II. Twierdzenia, wyrażające reguły przekształcania wyrażeń, utworzonych przez dodawanie i mnożenie<sup>1)</sup>.

Jakiegokolwiek liczby oznaczylibyśmy przez  $a$ ,  $b$  i  $c$ , w każdym razie zachodzą równości następujące:

$$\begin{array}{ll} (11, G_6) & a \vdash (b \vdash c) = (a \vdash b) \vdash c \\ (12, G_6) & a \vdash b = b \vdash a \\ (13, G_6) & a \cdot (b \vdash c) = a \cdot b \vdash a \cdot c \\ (14, G_6) & (b \vdash c) \cdot a = b \cdot a \vdash c \cdot a \\ (15, G_6) & a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \\ (16, G_7) & a \cdot b = b \cdot a. \end{array}$$

III. Twierdzenia, wyrażające wykonalność i jednoznaczność działań odwrotnych oraz istnienie modułu dodawania i modułu mnożenia.

(17,  $G_8$ ). Dowolnie przyjętym liczbom  $a$  i  $b$  odpowiada dokładnie jednej wartości liczba  $x$ , sprawdzająca równanie

$$b \vdash x = a,$$

i jednej wartości liczba  $y$ , sprawdzająca równanie

$$y \vdash b = a.$$

<sup>1)</sup> Por. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1903, p. 25.

(18,  $G_8$ ). Istnieje pewna liczba  $\mu$  o wartości dokładnie oznaczonej, zwana modulem dodawania, która ma tę własność, że każdy ze związków

$$a + x = a \quad \text{i} \quad x + a = a$$

po między dwiema liczbami  $a$  i  $x$ , zawsze równoważny jest równości

$$x = \mu.$$

(19,  $G_9$ ). Jeżeli oznaczymy przez  $a$  całkiem dowolnie przyjętą liczbę, a przez  $b$  liczbę, której wybór temu tylko podlega ograniczeniu, żeby zachodziła nierówność

$$b \neq \mu,$$

to istnieć będzie dokładnie jedna wartość na taką liczbę  $x$ , która sprawdzałaby równość

$$b \cdot x = a$$

i jedna wartość na taką liczbę  $y$ , która sprawdzałaby równość

$$y \cdot b = a.$$

(20,  $G_9$ ). Istnieje pewna liczba  $m$  o wartości dokładnie oznaczonej, zwana modulem mnożenia, która ma tę własność, że warunek konieczny i wystarczający, aby bez względu na wartość liczby  $a$  zachodziła którakolwiek z równości

$$a \cdot x = a \quad \text{lub} \quad x \cdot a = a,$$

polega na równości

$$x = m.$$

IV. Twierdzenia, odnoszące się do uszeregowania liczb i wyników działań zasadniczych na tychże.

A) Twierdzenia wyrażające warunki, którym podlegają reguły porównywania ilościowego nierównych pomiędzy sobą liczb.

(21,  $G_{10}$ ). Każde dwie liczby  $a$  i  $b$  sprawdzają jeden z trzech związków

$$a < b, \quad a = b \quad \text{i} \quad a > b$$

z wykluczeniem dwóch pozostałych.

(22,  $G_{10}$ ). Jeżeli oznaczymy przez  $a$  i  $b$  dwie liczby, to związki

$$a < b \quad \text{i} \quad b > a$$

są równoważne pomiędzy sobą.

(23,  $G_{10}$ ). Jeżeli trzy liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$  sprawdzają dwa związki

$$a < b \quad \text{ i } \quad b < c,$$

to w następstwie tego zachodzi zawsze i związek

$$a < c.$$

(24,  $G_{10}$ ). Jeżeli trzy liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$  sprawdzają związki

$$a = b \quad \text{ i } \quad b < c,$$

to w takim razie zachodzi zawsze i związek

$$a < c.$$

(25,  $G_{10}$ ). Jeżeli pomiędzy trzema liczbami  $a$ ,  $b$  i  $c$  zachodzą związki

$$a < b \quad \text{ i } \quad b = c,$$

to zachodzi także i związek

$$a < c.$$

B) Twierdzenia, wyrażające reguły porównywania ilościowego nierównych pomiędzy sobą sum ioczynów.

(26,  $G_{11}$ ). Jeżeli oznaczymy przez  $a$ ,  $b$  i  $c$  trzy liczby, to nierówność

$$b < c$$

równoważna jest każdej z nierówności

$$a + b < a + c$$

i

$$b + a < c + a.$$

(27,  $G_{11}$ ). Jeżeli dwie liczby  $a$  i  $b$  sprawdzają nierówności

$$a > \mu \quad \text{ i } \quad b > \mu,$$

gdzie oznaczyliśmy, jak wyżej, przez  $\mu$  moduł dodawania, to w takim razie zachodzi nierówność

$$a \cdot b > \mu.$$

V. Twierdzenia, wyrażające ciągłość zbioru liczb.

(28,  $G_{12}$ ). (Postulat Archimedes). Jeżeli tylko oznaczona liczba  $b$  sprawdza nierówność

$$b > \mu,$$

gdzie oznaczyliśmy, jak wyżej, przez  $\mu$  moduł dodawania, to w takim razie można dobrać do każdej liczby  $a$  taką liczbę całkowitą  $n$  ( $n > 0$ )<sup>1)</sup>, żeby suma tylu składników równych liczbie  $b$ , ile wynosi liczba  $n$ , większa była od liczby  $a$ .

(29,  $G_{13}$ ). (Postulat Hilberta). *Niemożliwą jest rzeczą rozszerzyć zbiór liczb, sprawdzający twierdzenia podane poprzednio, przez wprowadzenie do tego zbioru nowej, żadnej z istniejących już w nim liczb nierównej liczby, w taki sposób, żeby ten zbiór liczb nie przestał sprawdzać żadnego ze wspomnianych twierdzeń.*

Ponieważ na podstawie dobrze nam znanych własności liczb rzeczywistych każde z powyższych twierdzeń rzeczywiście zachodziłoby, gdybyśmy wyraz „liczba“ uważali za równoważny wyrażeniu „liczba rzeczywista“; ponieważ z drugiej strony stwierdzamy z łatwością, że każdy zbiór liczb, dla którego wszystkie rzeczzone twierdzenia zachodzą, niezawodnie posiada wszystkie własności, wyszczególnione w § 96-tym, i jest zatem izomorficzny zbiorowi liczb rzeczywistych, przeto mamy pewność, że *rozważane twierdzenia rzeczywiście wyrażają łącznie charakterystyczny układ własności typu liczb rzeczywistych.* Ale, ponieważ postanowiliśmy zastosować się do zasady, podanej pod  $D$  w paragrafie poprzedzającym, przeto winniśmy dowieść, żeśmy rzeczywiście spełnili dwa pierwsze warunki zasady  $C$  paragrafu poprzedzającego i zbadać, które z twierdzeń każdej grupy ( $G_k$ ) należą do następstw logicznych twierdzeń pozostałych tejże grupy, i w razie nierówności  $k > 1$  twierdzeń tych z grup

$$(G_1), (G_2), \dots (G_{13}), \quad (1)$$

które w tym ciągu poprzedzają grupę ( $G_k$ ).

Otóż spostrzegamy natychmiast, że dwa pierwsze warunki zasady  $C$  paragrafu poprzedzającego są rzeczywiście spełnione. Pozostaje więc tylko zbadanie, które z twierdzeń każdej grupy ( $G_k$ ) należą do następstw logicznych twierdzeń tejże grupy, i, w razie nierówności  $k > 1$ , twierdzeń grup, które poprzedzają grupę ( $G_k$ ) w ciągu (1). Temu właśnie przedmiotowi poświęcamy dwa paragrafy następujące.

<sup>1)</sup> W razie równości  $n=1$  rozumiemy przez sumę tylu składników równych  $b$ , ile wynosi liczba  $n$ , samą liczbę  $b$ .