

Liczbie x' zbioru (Z_p) odpowiadać będzie liczba homologiczna x w zbiorze (R) , a ze względu na równanie (1) liczba x sprawdzać będzie równanie

$$x^2 = a. \quad (2)$$

Zatem, jeżeli tylko oznaczony zbiór liczb (R) izomorficzny jest zbiorowi liczb zespolonych pospolitych, to dowolnie przyjętej liczbie a tego zbioru odpowiada zawsze jedna przynajmniej, równanie (2) sprawdzająca liczba x tegoż zbioru (R) . Ponieważ zaś nie każdej liczbie rzeczywistej a odpowiada równanie (2) sprawdzająca, druga liczba rzeczywista x , gdyż w przypadku, kiedy liczba a jest ujemna, nie istnieje wartość rzeczywista na x , sprawdzająca równanie (2), przeto zbiór liczb rzeczywistych nie jest izomorficzny zbiorowi liczb zespolonych pospolitych. Ostatecznie więc stwierdzamy, że typy liczb, wymienione w twierdzeniu, są rzeczywiste pomiędzy sobą odmienne, a o to tylko chodziło.

§ 165. Ponieważ, wyszczególniając własności zbioru liczb (Z) , mającego stanowić przedmiot naszych badań, wyraźnie zaznaczyliśmy, że nie wykluczamy przypadku, w którymby zbiór ten był zbiorem wielkości tylko w znaczeniu szerszem, przeto w żadnym ustępie rozważań naszych o zbiorze (Z) nie zakładaliśmy, żeby zbiór ten był zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem. Z drugiej znów strony oczywiście nie rozwinęliśmy żadnych rozważań sprzecznych z założeniem, żeby zbiór (Z) był zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem. Z tego nie wynika jednak jeszcze bezpośrednio, żeby po wprowadzeniu założenia, iż zbiór liczb (Z) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem, wszystkie wyniki, do których doszliśmy, zachowały swoje znaczenie, albowiem *a priori* nie jest wykluczeniem, żeby w następstwie tego jednego założenia, iż zbiór (Z) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem, różnaitość typów, do których mógłby należeć zbiór (Z) , nie mogła być uszczuplona.

Otóż w rzeczywistości *okoliczność ta nie zachodzi*. Żeby przekonać się o tem, należy tylko dowieść, że każdemu zbiorowi liczb (Z) , posiadającemu wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, można, nie wykraczając przeciwko zasadom rozdziału II-go, nadać charakter wielkości w znaczeniu ściślejszem. Istotnie, w zbiorze (Z) możemy wybrać dowolnie pośród zasadniczych układów jednostek pewien układ

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

za układ referencyjny i umówić się na przykład, że porównywanie ilościowe dwóch nierównych pomiędzy sobą liczb a i b zbioru (Z) ma być wykonywane w sposób następujący:

Wyznaczywszy współrzędne

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n$$

liczby a i współrzędne

$$(2) \quad b_1, b_2, \dots, b_n$$

liczby b , innemi słowy, wyznaczywszy na liczby (1) i (2) takie wartości rzeczywiste, żebyśmy mieli

$$(3) \quad a = \sum_{k=1}^n a_k l_k$$

i

$$(4) \quad b = \sum_{k=1}^n b_k l_k,$$

wyznaczamy najmniejszą taką liczbę całkowitą p , żeby równość

$$(5) \quad k = p$$

pociągała za sobą nierówność

$$(6) \quad a_k \neq b_k;$$

jeżeli tedy pokaże się, że mamy

$$(7) \quad a_p < b_p,$$

to należy orzec, że mamy

$$(8) \quad a < b,$$

gdyby zaś zachodziła nierówność

$$(9) \quad a_p > b_p,$$

to należałoby orzec, że mamy

$$(10) \quad a > b.$$

Na podstawie tej reguły dwie nierówne pomiędzy sobą liczby a i b zbioru (Z) zawsze sprawdzać będą pewną jedną, ale tylko jedną z nierówności (8) i (10).

Istotnie, liczbie a odpowiadać będzie w każdym razie dokładnie jeden układ takich wartości rzeczywistych na liczby (1), żeby zachodziła równość (3), a liczbie b — dokładnie jeden, równość (4)

sprawdzający układ wartości rzeczywistych na liczby (2). Następnie w razie nierówności liczb a i b istnieć będzie przynajmniej jedna wartość wskaźnika k , przy której zachodzić będzie nierówność (5). A ponieważ wskaźnik k może równać się tylko jednej z liczb

$$1, 2, \dots, n$$

przeto istnieć będzie pewna najmniejsza liczba całkowita p , taka żeby równość (5) pociągała za sobą nierówność (6). Zatem oznaczonemu układowi nierównych pomiędzy sobą wartości liczb a i b w każdym razie odpowiadać będzie dokładnie jedna wartość wskaźnika p i jeden układ nierównych pomiędzy sobą wartości liczb rzeczywistych a_p i b_p . Ponieważ liczby a_p i b_p , jako dwie nierówne pomiędzy sobą liczby rzeczywiste, sprawdzać będą jedną z nierówności (7) lub (9) z wykluczeniem drugiej, przeto dwie nierówne pomiędzy sobą liczby a i b zbioru (Z) sprawdzać będą rzeczywicie jedną z nierówności (8) lub (10) z wykluczeniem drugiej.

Z tego wynika, że zgodnie z jedną z zasad rozdziału II-go po przyjęciu powyższej reguły każde dwie liczby a i b zbioru (Z) sprawdzać będą pewien jeden ze związków

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b,$$

z wykluczeniem dwóch pozostałych.

Upewniamy się z łatwością, że rzeczona reguła czyni zadość i wszystkim innym warunkom, do których postanowiliśmy zastosowywać się przy nadawaniu charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem elementom jakiegokolwiek zbioru.

Ostatecznie możemy nadać charakter wielkości w znaczeniu ściślejszem każdemu zbiorowi liczb, posiadającemu wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym; możemy nawet to skutecznie wieloma sposobami, gdyż nie jesteśmy zgoła niczem skrupowani przy oznaczeniu tego zasadniczego układu jednostek

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

zbioru (Z), który przyjąć moglibyśmy za układ referencyjny, ale nadmieniamy, że w razie przyjęcia reguły w rodzaju tej, którą podaliśmy wyżej, reguły porównywania ilościowego liczb rzeczywistych, uważanych za elementy zbioru (Z), mogłyby różnić się od reguł, któremi posługujemy się w teorii liczb rzeczywistych.

Uzyskany wynik przywodzi nas do pytania następującego: Czyż pośród różnych reguł, mogących być przyjętymi na porówny-

wania ilościowego nierównych pomiędzy sobą liczb zbioru (Z) i nadających zatem zbiorowi temu charakter wielkości w znaczeniu ściślejszem, nie znajduje się taka reguła, której przyjęcie byłoby pożyteczne?

Ponieważ pojęcie pożyteczności ma charakter wybitnie subiektywny, przeto powyższe pytanie oczywiście nie dopuszcza odpowiedzi bezwzględnie zadawalającej, ale z tego nie wynika jeszcze, żebyśmy wogóle żadnej odpowiedzi na nie dać nie mogli. Praktyka naukowa poucza nas, że główny pożytek tych reguł, do których zastosowujemy się przy porównywaniu ilościowym liczb rzeczywistych, polega na tem, że w następstwie tych reguł zachodzą twierdzenia następujące:

I. Jeżeli oznaczymy przez a , b i c trzy liczby, to nierówność

$$a < b$$

zawsze pociąga za sobą nierówność

$$a + c < b + c.$$

II. Jeżeli dwie liczby a i b sprawdzają nierówności

$$a > 0 \quad \text{ i } \quad b > 0,$$

to w takim razie zachodzi i nierówność

$$a \cdot b > 0.$$

Uwaga poprzedzająca skłania nas do postawienia kwestyi o nadaniu charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem liczbom zbioru (Z), posiadającego własności wyszczególnione w § 154-tym w sposób następujący: Czy można ustawić taką regułę na porównywanie ilościowe nierównych pomiędzy sobą liczb zbioru (Z), żeby zachodziło każde z powyższych dwóch twierdzeń?

Na to pytanie odpowiadamy twierdzeniem następującem:

III. Ułożenie takiej reguły na porównywanie ilościowe nierównych pomiędzy sobą elementów oznaczonego zbioru (Z), posiadającego wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, żeby zachodziło każde z twierdzeń I-sze i II-gie, możliwe jest w przypadku, i tylko w przypadku, kiedy rozważany zbiór liczb izomorficzny jest zbiorowi liczb rzeczywistych.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, załóżmy, że na porównywanie ilościowe nierównych pomiędzy sobą elementów pewnego zbioru liczb (Z_0), posiadającego wszystkie własności, wyszczególnione

w § 154-tym, istnieje taka reguła, żeby po przyjęciu tej reguły, każde z twierdzeń I-sze i II-gie zachodziło dla liczb zbioru (Z_0) i umówmy się, że porównywanie ilościowe nierównych pomiędzy sobą liczb zbioru (Z_0) wykonywane ma być według rzeczzonej reguły. Ponieważ wszystkie liczby rzeczywiste należą do zbioru (Z_0), przeto z dwóch nierównych pomiędzy sobą liczb rzeczywistych, uważanych za elementy zbioru (Z_0), pewna jedna a mniejsza będzie od drugiej b , ale błędem byłoby z góry przyjmować, że kryterium na to, czy liczby a i b , uważane za elementy zbioru (Z_0), rzeczywiście sprawdzają nierówność

$$a < b,$$

zlewa się z kryterium, przyjętem w teorii liczb rzeczywistych. O równości dwóch liczb rzeczywistych, uważanych za elementy zbioru liczb, posiadającego własności, wyszczególnione w § 154-tym, rozstrzygamy, opierając się na temże samem kryterium, co w teorii liczb rzeczywistych, gdyż w przeciwnym razie punkty 9^o, 10^o i 11^o wykazu, podanego w § 154-tym, pozbawione byłyby treści, ale nieczem nie jesteśmy skrepowani *a priori*, kiedy chodzi o porównywanie ilościowe nierównych pomiędzy sobą liczb takiegoż zbioru.

Uczyniwszy te uwagi konieczne do właściwego rozumienia dalszych wywodów, powiadam, że zachodzą twierdzenia następujące:

A) Jeżeli dwie liczby b i b' zbioru (Z_0) są pomiędzy sobą symetryczne, czyli takie, żebyśmy mieli

$$b + b' = 0, \quad (1)$$

to te liczby jednocześnie tylko równać się mogą zeru, a w razie, kiedy okoliczność ta nie zachodzi, liczba zero jest zawsze liczbą pośrednią pomiędzy liczbami b i b' .

Innemi słowy, związki

$$b < 0, \quad b = 0 \quad \text{i} \quad b > 0 \quad (2)$$

równoważne są odpowiednio związkom

$$b' > 0, \quad b' = 0 \quad \text{i} \quad b' < 0. \quad (3)$$

B) Jeżeli pewna liczba b zbioru (Z_0) symetryczna jest pewnej liczbie b' tegoż zbioru, która jest symetryczną pewnej trzeciej liczbie b'' rozważanego zbioru, to w takim razie zachodzi równość

$$b = b''.$$

To samo twierdzenie wyrazić możemy w postaci następującej:
 Jakąkolwiek liczbę zbioru (Z_0) oznaczylibyśmy przez b , mamy zawsze

$$(4) \quad b = - \{-b\}.$$

C) Jakąkolwiek, nierówność

$$(5) \quad a \neq 0$$

sprawdzającą, liczbę zbioru (Z_0) oznaczylibyśmy przez a , mamy zawsze

$$(6) \quad a^2 > 0.$$

D) Liczby

$$1 \quad \text{i} \quad -1$$

uwazane za elementy zbioru (Z_0) , a więc bez względu na reguły porównywania ilościowego nierównych pomiędzy sobą liczb w zbiorze liczb rzeczywistych sprawdzają odpowiednio nierówności następujące

$$(7) \quad 1 > 0$$

i

$$(8) \quad -1 < 0.$$

Twierdzenia A i B są w rzeczywistości tylko szczególnymi przypadkami twierdzeń, któreśmy mieli sposobność uzasadnić poprzednio; ale żeby ułatwić czytelnikowi należyte zrozumienie całego dowodu, uzasadnimy na tem miejscu wszystkie cztery twierdzenia przygotowawcze A , B , C i D .

Zwracając się do tw. A , założmy, że liczby b i b' sprawdzają związek (1). Na podstawie tw. I-go nierówność

$$b < 0$$

pociąga za sobą nierówność

$$(9) \quad b + b' < 0 + b',$$

a nierówność

$$b > 0$$

— nierówność

$$(10) \quad b + b' > 0 + b'.$$

W razie zaś równości

$$b = 0,$$

mielibyśmy oczywiście

$$(11) \quad b + b' = 0 + b'.$$

Na podstawie równości (1) i równości

$$0 + b' = 0$$

związki (9), (11) i (10) pociągają za sobą odpowiednio związki

$$0 < b', \quad 0 = b' \quad \text{ i } \quad 0 > b'.$$

Zatem pierwszy, drugi i trzeci ze związków (2) pociągają za sobą odpowiednio pierwszy, drugi i trzeci ze związków (3), a ponieważ w rozumowaniu powyższem role liczb b i b' mogą oczywiście uleść zamianie jednej na drugą, przeto stwierdzamy ostatecznie, że związki (2) rzeczywiście równoważne są odpowiednio związkom (3).

Przechodząc do tw. B , zważmy, iż założenia tego twierdzenia polegają na równościach następujących:

$$b + b' = 0 \quad \text{ oraz } \quad b' + b'' = 0.$$

Z równości tych mamy

$$\begin{aligned} b &= 0 - b' \\ b'' &= 0 - b', \end{aligned}$$

zatem mamy rzeczywiście

$$b = b''.$$

Zwróćmy się teraz do tw. C . Ponieważ zakładamy, że liczby zbioru (Z_0) sprawdzają tw. II-gie, przeto już z góry mamy pewność, że nierówność (6) zachodzi w przypadku, kiedy liczba a czyni za-
dość nierówności

$$a > 0.$$

Pozostaje więc do udowodnienia, że nierówność (6) zachodzi i w przypadku, kiedy mamy

$$a < 0. \tag{12}$$

Otóż na podstawie tw. A nierówność (12) pociąga za sobą nierówność

$$-a > 0,$$

zatem ze względu na tw. II-gie mamy

$$(-a)^2 > 0. \tag{13}$$

Z drugiej strony, opierając się na tw. V-tem § 155-go, uzyskujemy łatwo związki następujące:

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = -\{a \cdot (-a)\} = -\{-a^2\},$$

a ponieważ na podstawie tw. B mamy

$$- \{-a^2\} = a^2,$$

przeto mamy także

$$(14) \quad (-a)^2 = a^2.$$

Z nierówności (13) i (14) wynika nierówność (6), o którą właśnie chodziło.

Żeby uzasadnić i tw. D , zważmy, że moduł mnożenia liczb zbioru (Z_0) (tw. VI, § 155) równa się liczbie

$$1.$$

Mamy więc

$$1 = 1^2,$$

a ponieważ mamy jeszcze i związek

$$1 \neq 0,$$

przeto na podstawie tw. C , nierówność (7) rzeczywiście zachodzić będzie. Ale ze względu na tw. A związek (7) pociąga za sobą związek (8). Zatem tw. D zachodzi w podanem brzmieniu.

Obecnie uzasadnimy już z łatwością twierdzenie, o które nam właściwie chodzi. Ponieważ ze względu na tw. C i na to, że kwadrat liczby zero równa się zero, w zbiorze (Z_0) nie istnieje liczba, której kwadrat równałby się liczbie mniejszej od zera, przeto w szczególności ze względu na nierówność (8) w zbiorze (Z_0) nie istnieje taka liczba x , która sprawdzałaby równanie

$$x^2 = -1.$$

Zatem zbiór (Z_0) nie może być ani typu liczb zespolonych pospolitych, ani typu kwaternionów. Ponieważ zaś, na podstawie twierdzenia, uzasadnionego w paragrafie poprzedzającym, zbiór (Z_0) , jeżeli nie jest ani typu liczb zespolonych pospolitych, ani typu kwaternionów, może tylko być typu liczb rzeczywistych, ponieważ nadto zbiór liczb rzeczywistych czyni zadość wszystkim założeniom, przyjętym co do zbioru (Z_0) , przeto stwierdzamy, że twierdzenie, o dowód którego chodziło, zachodzi w podanem brzmieniu.

Ostateczny wynik dyskusyi, która stanowiła przedmiot niniejszego paragrafu jest następujący: Przyjąwszy, co dotychczasowe doświadczenie naukowe najzupełniej potwierdza, a mianowicie, że nadanie charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem liczbom ozna-

czonego typu pożyteczne jest tylko pod warunkiem, żeby w następstwie tego każde z twierdzeń I i II dla rozważanego typu liczb zachodziło, należy oświadczyć, że nadanie charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem liczbom zespolonym pospolitym albo kwaternionom nie byłoby pożyteczne; z trzech typów, na które możemy podzielić zbiory liczb, posiadające własności wyszczególnione w § 154-tym, tylko typ liczb rzeczywistych posiada takie własności, iż nadanie mu charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem połączone jest z większym pożytkiem.

§ 166. Żeby ześrodkować należycie główne wyniki, uzyskane w niniejszym rozdziale, czynimy uwagę następującą: Jeżeli oznaczmy przez (R) typ liczb rzeczywistych, przez (Z_p) typ liczb zespolonych pospolitych, a przez (K) typ kwaternionów, to w takim razie w zbiorze liczb typu (Z_p) zawsze istnieć będzie podzbiór typu R , a w zbiorze liczb typu (K) — podzbiór typu (R) oraz podzbiór typu (Z_p) .

Słuszność uwagi tej oczywiście nie byłaby wątpliwa, gdybyśmy mieli pewność, że w zbiorze liczb typu (K) istnieje podzbiór typu (Z_p) . Otóż z łatwością możemy dowieść, że w zbiorze liczb typu (K) istnieje nieskończenie wiele podzbiorów typu (Z_p) . W tym celu zwróćmy się (str. 789) do symbolów Hamiltona

$$i, j, k$$

i oznaczmy przez ξ'_p zbiór wszystkich kwaternionów postaci

$$a + b \cdot \mu,$$

gdzie oznaczyliśmy przez a i b dwie liczby rzeczywiste jakiegokolwiek, a przez μ kwaternion, określony wzorem

$$\mu = \alpha i + \beta j + \gamma k,$$

w którym symbole α, β i γ oznaczają stałe rzeczywiste, tak dobrane, żebyśmy mieli

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (1)$$

Zważywszy, iż mamy

$$\mu^2 = -1,$$

spostrzegamy z łatwością, że zbiór liczb (Z'_p) izomorficzny jest zbiorowi liczb zespolonych pospolitych (Z_p) , albowiem jeżeli uważać będziemy za elementy, odpowiadające sobie wzajemnie taką liczbę

$$a + b\mu$$

zbioru (Z_n') i taką liczbę zespoloną pospolitą, w której część rzeczywista równa się liczbie a , a współczynnik jednostki urojonej — liczbie b , to ta odpowiedniość wzajemna elementów obu zbiorów sprawdzać będzie oczywiście wszystkie warunki izomorfizmu. Ponieważ zaś istnieje nieskończenie wiele, równanie (1) sprawdzających układów wartości na liczby rzeczywiste α , β i γ , przeto zbiór kwaternionów, a więc i każdy zbiór liczb typu kwaternionów, posiada rzeczywiście nieskończenie wiele podzbiorów izomorficznych zbiorowi liczb zespolonych pospolitych.

Jeżeli uwzględnimy uwagę, dopiero co uzasadnioną, oraz twierdzenie, uzyskane w dwóch poprzednich paragrafach, to główne wyniki badań, wyłożonych w rozdziale niniejszym, będziemy mogli wyrazić w postaci następującej:

Zbiór kwaternionów jest najszerszym typem zbioru liczb, posiadającego własności wyszczególnione w § 154-tym; zbiór liczb zespolonych pospolitych jest typem najszerszego zbioru liczb, posiadającego prócz własności poprzedzających, jeszcze własność przemienności mnożenia; nareszcie zbiór liczb rzeczywistych jest typem najszerszego zbioru liczb, który posiadając wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, jest nadto takim, że przez nadanie mu charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem na podstawie stosownie dobranej umowy, możliwą jest rzeczą dopić tego, ażeby w stosunku do liczb, zbiór ten stanowiących, zachodziło każde z twierdzeń I i II paragrafu poprzedzającego.

Doświadczenie naukowe poucza nas, że znaczenie zbioru liczb, nie posiadającego wszystkich własności wyszczególnionych w § 154-tym, jest, przy obecnym stanie nauki przynajmniej, natury filozoficznej. Z drugiej strony mieliśmy sposobność już zaznaczyć, że nawet kwaterniony, które jednak posiadają wszystkie rzeczzone własności, mają w porównaniu do liczb rzeczywistych i zespolonych pospolitych tylko drugorzędne znaczenie, a to z tego powodu, że mnożenie kwaternionów nie posiada własności przemienności, w następstwie czego reguły przekształcenia wyrażeń wymiernych (str. 72) kwaternionowych na równe im wyrażenia nie podlega już takim samym regułom, jak analogiczne przekształcanie wyrażeń wymiernych, ułożonych z liczb rzeczywistych lub zespolonych. Uwagi te i twierdzenie, wysłowione wyżej, prowadzą nas do wyniku następującego: *najprawdopodobniej prócz typu liczb rzeczywistych i typu liczb zespolonych pospolitych, nie istnieje żaden inny taki typ liczb, którego zna-*

czenie naukowe nie byłoby bez porównania mniejsze od znaczenia naukowego dwóch typów poprzedzających.

Na zakończenie pragniemy uwypatnić pewne bardzo zajmujące, chociaż bezpośrednie następstwo badań niniejszego rozdziału. Geometryczna interpretacja liczb zespolonych pospolitych z konieczności prowadzi do przypuszczenia, że prawdopodobnie istnieje trójjednostkowy zbiór liczb, którego stosunek do geometryi przestrzennej całkiem analogiczny byłby do stosunku, w jakim zostaje zbiór liczb zespolonych pospolitych do geometryi płaskiej. Otóż twierdzenie wysłowione wyżej poucza nas, że taki zbiór liczb trójjednostkowych nie istnieje.
