

Ponieważ punkt A_k należy do zbioru (ξ_1) , przeto mamy:

$$(18) \quad 0A_k \leq 0M,$$

gdyż punkt M może tylko być albo najdalszym od punktu O punktem zbioru (ξ_1) , albo najbliższym tegoż punktu punktem zbioru (ξ_2) . Z takich samych powodów i ze względu na to, że, jakeśmy zaznaczyli powyżej, punkty ciągu (17) należą do zbioru (ξ_2) , mamy

$$(19) \quad 0B_k \geq 0M.$$

Ponieważ związki (18) i (19) zachodzą, jakkolwiek wartość miałby wskaźnik k , przeto też, bez względu na wartość tego wskaźnika, punkt M niezawodnie należy do odcinka $A_k B_k$. Innymi słowy, punkt M jest wspólnym punktem wszystkich odcinków ciągu (13), a o to właśnie chodziło.

Widzieliśmy wyżej, że twierdzenia I-sze i II-gie są sobie równoważne, a dowiedliśmy obecnie, że ta sama okoliczność zachodzi co do twierdzeń II-go i III-go. Zatem twierdzenia I-sze i III-cie są także sobie równoważne. Ostatecznie twierdzenia I-sze, II-gie i III-cie są równoważne; innymi słowy, jeżeli zachodzi jedno z tych twierdzeń, to i dwa pozostałe zachodzić muszą. Z tego oczywiście nie wynika jeszcze bynajmniej, żeby którekolwiek z rzeczonych twierdzeń rzeczywiście zachodziło.

Jednakże każde z tych twierdzeń ma takie cechy prawdy oczywistej, że niepodobna wątpić o tem, żeby ono zachodziło rzeczywiście. Wobec tego możemy, kierując się osobistym upodobaniem, przyjąć za pewnik jedno z trzech rozważanych twierdzeń. W takim razie dwa pozostałe należeć będą do jego logicznych następstw.

Ostatecznie, przy dzisiejszym przynajmniej stanie nauki, nie możemy uzasadnić żadnego z trzech twierdzeń I-go, II-go i III-go, nie wprowadzając jakiegoś nowego pewnika, którym może być jedno z tych trzech twierdzeń, albo jakiekolwiek twierdzenie równoważne.

Żeby usunąć nieokreślność, która mogłaby w dalszych rozważaniach spowodować pewne zamieszanie, oświadczamy wyraźnie, że przyjmujemy za pewnik twierdzenie III-cie.

§ 64. Wyniki, uzyskane w ustępach poprzedzających, możemy streścić w postaci następującego twierdzenia:

I. Przy oznaczonej jednostce długości odpowiada w znaczeniu, określonym w § 62-gim, każdemu przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych odcinek prostoliniowy a , oznaczonej długości; w razie, kiedy przekrój (P) jest przekrojem pierwszego gatunku, i tylko w tym razie odcinek ten jest z jednostką współmierny, a miara jego równa się liczbie wymiernej, położonej na przekroju (P).

Odwrotnie, przy oznaczonej jednostce długości możemy zawsze dołączyć do jakiegokolwiek niezerowego odcinka, a , taki przekrój (P) zbioru liczb wymiernych, ażeby w znaczeniu, określonym w § 62-gim, przekrojowi temu odpowiadał właśnie odcinek a ; jeżeli odcinek a jest z jednostką długości niewspółmierny, to przekrój (P) oznaczony jest w zupełności i jest przekrojem drugiego gatunku, jeżeli zaś odcinek a jest z jednostką współmierny, to przekrój (P) jest pierwszego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiernych i nie jest określony w zupełności, albowiem liczba wymierna w , położona na tym przekroju i w każdym razie równa liczbie, stanowiącej miarę odcinka a , może być zaliczona według upodobania albo do zbioru liczb wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju, albo do zbioru liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju.

Przekonamy się, że wszystko cośmy w twierdzeniu tem wyrazili, zostało już wyrażnie uzasadnione w ustępach poprzedzających, albo jest natychmiastowem następstwem tego, czegośmy we wspomnianych ustępach wyrażnie dowiedli.

Ta okoliczność, że każdemu przekrojowi zbioru liczb wymiernych odpowiada, przy oznaczonej jednostce długości, niezawodnie pewien odcinek, stanowi wynik dyskusyi, przeprowadzonej w paragrafie poprzedzającym; że zaś długość tego odcinka, jeżeli on wogóle istnieje, oznaczona jest w zupełności, o tem wiemy już z tw. II-go § 62-go. W razie, kiedy przekrój (P) jest przekrojem pierwszego gatunku (§ 60), odcinek a , który mu odpowiada, oczywiście jest z jednostką współmiernym odcinkiem, którego miarą jest liczba wymierna, położona na przekroju (P). Odcinek a współmierny jest z jednostką tylko w razie, kiedy przekrój (P) jest pierwszego gatunku, jeżeli bowiem założymy, że odcinek a współmierny jest z jednostką i oznaczymy przez w jego miarę, to spostrzeżemy natychmiast, że liczba wymierna w musi być albo największą z liczb wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (P), albo najmniejszą z liczb drugiej kategorii w stosunku do tegoż prze-

kroju; stwierdzamy więc, że przekrój (P) musi być pierwszego gatunku, jeżeli tylko odcinek a jest z jednostką współmierny.

Druga część rozważanego twierdzenia, ta mianowicie, która stanowi odwrócenie pierwszej, została już uzasadniona w postaci tw. I-go z § 62-go.

Twierdzenie, wysłowione na początku obecnego paragrafu, prowadzi nas do ustawienia definicyi następujących:

A) Wyrażenie *liczba niewymierna* oznacza wszelki symbol, stanowiący arytmetyczne oznaczenie pewnego przekroju drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych; przekrój ten nazwiemy *przekrojem*, na którym położona jest ta liczba niewymierna.

B) Wyrażenie *liczba bezwzględna* oznacza to samo, co wyrażenie: element zbioru, uzyskanego drogą połączenia w jeden zbiór zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych.

C) *Miarą* oznaczonego odcinka a , niespółmiernego z jednostką długości, nazywamy wszelką liczbę niewymierną, położoną na tym właśnie przekroju zbioru liczb wymiernych, któremu w znaczeniu, określonym w § 62-gim, odpowiada odcinek a .

Na podstawie definicyi A i definicyi, ustawionych w § 60-tym, oraz twierdzenia I-go obecnego paragrafu i teoryi mierzenia odcinków współmiernych z jednostką długości zachodzą twierdzenia następujące:

II. Na każdym przekroju zbioru liczb wymiernych położona jest oznaczona liczba bezwzględna, która jest wymierną lub niewymierną, zależnie od tego, czy rozważany przekrój jest pierwszego czy drugiego gatunku.

III. Każdej liczbie bezwzględnej odpowiada, przy oznaczonej jednostce długości, oznaczonej długości odcinek, którego miarą jest właśnie ta liczba bezwzględna; odwrotnie, do każdego odcinka możemy dołączyć liczbę bezwzględną, która byłaby jego miarą.

§ 65. Wobec uzyskanych już wyników sama przez się powstaje myśl o nadaniu liczbom bezwzględnym charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem, a to przez wprowadzenie definicyi następującej:

Orzeczenia, że dwie liczby bezwzględne x i y sprawdzają pierwszy, drugi lub trzeci ze związków

$$x < y, \quad x = y \quad \text{ i } \quad x > y,$$

wyrażają odpowiednio, że odcinki a i b , których miarami, przy oznaczonej jednostce długości u , są odpowiednio liczby x i y , sprawdzają pierwszy, drugi lub trzeci ze związków

$$a < b, \quad a = b \quad \text{i} \quad a > b.$$

Definicja poprzedzająca oczywiście nie znajduje się w sprzeczności ani z definicją, która ustanawia prawa porównywania ilościowego liczb wymiernych, ani z zasadami rozdziału II-go.

Natomiast nie jest z góry wykluczona wątpliwość, czy na wynik porównywania ilościowego dwóch liczb bezwzględnych wybór jednostki długości wpływu wyrzucić nie może.

Okazemy, że w rzeczywistości wybór jednostki długości na wynik porównywania ilościowego dwóch liczb bezwzględnych żadnego wpływu nie wywiera, ale koniecznem jest, żebyśmy poprzednio głębiej zbadali pojęcie przekroju. Przedmiotowi temu poświęcamy paragraf następujący.

§ 66. Oznaczmy przez (P) jakikolwiek przekrój zbioru liczb wymiernych i jakąkolwiek na tym przekroju nie położoną liczbę wymierną w . Liczba w należyć będzie albo do liczb wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (P) , albo do liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju; w pierwszym przypadku orzekać będziemy, że liczba w położona jest przed przekrojem (P) , a w drugim — że liczba ta położona jest poza rozważanym przekrojem. Jeżeli pewna liczba wymierna w położona jest przed pewnym przekrojem (P) zbioru wymiernych, to okoliczność tę wyrażać będziemy niekiedy, orzekając, iż przekrój (P) położony jest poza liczbą w ; gdyby zaś liczba w położona była poza przekrojem (P) , to okoliczność tę często wyrażać będziemy, orzekając, iż przekrój (P) położony jest przed liczbą w .

W dalszym ciągu przyjmujemy, że dwa zdania następujące:

„Liczba wymierna w położona jest przed pewną drugą liczbą wymierną w' “ i „Liczba wymierna w położona jest poza pewną drugą liczbą wymierną w' “, wyrażają odpowiednio to samo, co zdania

$$w < w' \quad \text{i} \quad w > w'.$$

Uważajmy trzy jakiekolwiek przedmioty A , B i C i załóżmy, że pomiędzy tymi przedmiotami zachodzi albo związek, który wy-

razić możemy, orzekając, że przedmiot A położony jest przed przedmiotem B , a przedmiot B — przed przedmiotem C , albo związek, który może być wyrażony, orzekając, że przedmiot A położony jest poza przedmiotem B , a przedmiot B poza przedmiotem C . W takim razie, w potocznej nawet mowie orzekamy, że przedmiot B położony jest pomiędzy przedmiotami A i C . Takim sposobem wystawiania się posługiwać się będziemy i w naszych rozważaniach.

I. W zbiorze (A_1) liczb wymiernych, położonych przed jakimkolwiek, dowolnie oznaczonym przekrojem (P) zbioru liczb wymiernych, nie istnieje liczba największa, a w zbiorze (A_2) liczb wymiernych położonych poza przekrojem (P) nie istnieje liczba najmniejsza.

Istotnie, jeżeli przekrój (P) jest przekrojem pierwszego gatunku, to istnieje pewna liczba wymierna w , od zera większa, położona na rozważanym przekroju, i zbiór (A_1) zlewa się ze zbiorem (M_1) liczb wymiernych mniejszych od liczby w , a zbiór (A_2) — ze zbiorem (M_2) liczb wymiernych większych od liczby w . W zbiorze (M_1) nie istnieje liczba największa, gdyż jakąkolwiek liczbę zbioru tego oznaczylibyśmy przez w_1 , zawsze istnieć będzie liczba wymierna w'_1 , położona pomiędzy liczbami w_1 i w , a więc większa od w_1 , a jednak należąca do zbioru (M_1) . W zbiorze zaś (M_2) nie istnieje liczba najmniejsza, gdyż jakąkolwiek liczbę zbioru tego oznaczylibyśmy przez w_2 , zawsze istnieć będzie liczba wymierna, położona pomiędzy liczbami w i w_2 , a więc mniejsza od w_2 , a jednak należąca do zbioru (M_2) . Z tego wynika, że twierdzenie zachodzi niezawodnie w przypadku, kiedy przekrój (P) jest przekrojem pierwszego gatunku zbioru liczb wymiernych.

Ale z drugiej strony twierdzenie jest natychmiastowe w przypadku, kiedy chodzi o przekrój drugiego gatunku, gdyż wówczas zbiory (A_1) i (A_2) zlewają się oczywiście odpowiednio ze zbiorem liczb wymiernych pierwszej kategorii i ze zbiorem liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju, a wspomniane dwa zbiory posiadają zapowiedzianą własność na podstawie definicyi przekroju drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych.

II. *Pomiędzy jakimkolwiek przekrojem (P) zbioru liczb wymiernych, a jakąkolwiek, na przekroju tym nie położoną liczbą wymierną w znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych.*

Istotnie, zawsze znajdzie się jedna przynajmniej liczba wy-

mierna w' , położona pomiędzy liczbą w a przekrojem (P), gdyż w razie przeciwnym, wbrew twierdzeniu poprzedzającemu istniałaby liczba wymierna, mianowicie liczba w , która byłaby albo największą z liczb wymiernych, położonych przed przekrojem (P), albo najmniejszą z liczb, położonych poza tym przekrojem.

Z drugiej znów strony liczba liczb wymiernych położonych pomiędzy liczbami w i w' jest (§ 46, tw. II) nieskończenie wielka, a ponieważ każda liczba wymierna, położona pomiędzy liczbami w i w' , oczywiście położona jest i pomiędzy liczbą w a przekrojem (P), przeto, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, liczba liczb wymiernych położonych pomiędzy liczbą w a przekrojem (P), jest rzeczywiście nieskończona.

III. *Jakąkolwiek liczbę wymierną od zera większą, ale choćby jak małą, oznaczylibyśmy przez ε , i jakąkolwiek przekrój zbioru liczb wymiernych oznaczałby symbol (P), zawsze istnieć będą dwie liczby wymierne a_1 i a_2 takie, żeby liczba a_1 położona była przed przekrojem (P), a liczba a_2 poza tym przekrojem i żeby nadto zachodziła nierówność*

$$a_2 - a_1 < \varepsilon.$$

Istotnie, przyjmijmy jedną liczbę wymierną w_1 , położoną przed przekrojem (P), a drugą w_2 , położoną poza tym przekrojem, oznaczmy przez n liczbę całkowitą, sprawdzającą nierówność

$$n > (w_2 - w_1) : \frac{\varepsilon}{2},$$

i przyjmijmy

$$\mu = (w_2 - w_1) : n.$$

Mamy tedy

$$\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Oczywiście zachodzić będzie jedno z dwojga: albo w ciągu

$$w_1, w_1 + \mu, w_1 + 2\mu, \dots, w_1 + n\mu$$

istnieć będzie pewien wyraz

$$w_1 + i\mu, \quad 1 \leq i < n,$$

położony na przekroju (P), i w takim razie wartości

$$\begin{aligned} a_1 &= w_1 + (i - 1)\mu \\ a_2 &= w_1 + (i + 1)\mu \end{aligned}$$

na a_1 i a_2 sprawdzać będą żądane warunki, albo z pewnych dwóch sąsiednich wyrazów

$$w + (i - 1)\mu \text{ i } w + i\mu \quad (i \geq 1),$$

pierwszy położony będzie przed przekrojem (P) , a drugi poza nim. W takim razie wartości

$$\begin{aligned} a_1 &= w_1 + (i - 1)\mu \\ a_2 &= w_1 + i\mu \end{aligned}$$

oczywiście znowu czynić będą zadość wszystkim warunkom, o które chodzi. Stwierdzamy więc, że w każdym razie liczby, których istnienie zapowiedziane jest w twierdzeniu, rzeczywiście istnieć będą.

Dwa przekroje (P) i (P') zbioru liczb wymiernych zowią się *równorzędnymi* przekrojami tego zbioru liczb w przypadku, kiedy każda liczba wymierna, położona przed jednym z rozważanych przekrojów, położona jest i przed drugim, a każda liczba wymierna, położona poza jednym z rozważanych przekrojów, położona jest i poza drugim.

IV. Jeżeli dwa przekroje (P) i (P') zbioru liczb wymiernych są *równorzędne*, to przekroje te są zawsze jednocześnie albo pierwszego albo drugiego gatunku. W pierwszym przypadku liczby wymierne, położone na rozważanych przekrojach, są sobie równe, a w drugim — rozważane przekroje zlewają się ze sobą w zupełności.

Istotnie, założmy najpierw, że jeden z przekrojów (P) i (P') , powiedzmy (P) , jest przekrojem pierwszego gatunku zbioru liczb wymiernych. W takim razie istnieć będzie pewna liczba wymierna w , położona na przekroju (P) .

Gdyby przekrój (P') był przekrojem drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych, albo takim przekrojem pierwszego gatunku, na którym położona byłaby liczba wymierna nierówna liczbie w , to liczba w , która leży na przekroju (P) i nie leży zatem ani przed, ani poza tym przekrojem, położona byłaby albo przed przekrojem (P') , albo poza nim i rozważane przekroje zbioru liczb wymiernych nie mogłyby być równorzędnymi przekrojami tego zbioru liczb. Zatem, jeżeli jeden z dwóch równorzędnych przekrojów zbioru liczb wymiernych jest przekrojem pierwszego gatunku tego zbioru liczb, to zgodnie z brzmieniem twierdzenia drugi przekrój także jest przekrojem pierwszego gatunku, a liczby położone na rozważanych przekrojach są sobie równe.

Pozostaje tylko do okazania, iż dwa równorzędne przekroje (P) i (P') drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych zlewają się ze sobą. Okoliczność ta zachodzi oczywiście, albowiem w takim razie założenia, iż przekroje (P) i (P') są równorzędne, wyraża, iż obu przekrojom zbioru liczb wymiernych odpowiada ten sam podział zbioru liczb wymiernych na dwie kategorie.

V. Dwa przekroje (P) i (P') zbioru liczb wymiernych są równorzędne w każdym z trzech przypadków następujących:

1°. W przypadku, kiedy zbiór liczb wymiernych, położonych przed przekrojem (P) , i zbiór liczb wymiernych, położonych przed przekrojem (P') , zlewają się ze sobą.

2°. W przypadku, kiedy zbiór liczb wymiernych, położonych poza przekrojem (P) , i zbiór liczb wymiernych, położonych poza przekrojem (P') , zlewają się ze sobą.

3°. W przypadku, kiedy każda liczba wymierna, położona przed przekrojem (P) , położona jest i przed przekrojem (P') , a każda, liczba położona poza przekrojem (P) , położona jest i poza przekrojem (P') .

Zwróćmy się najpierw do przypadku pierwszego i oznaczmy przez (A_1) zbiór liczb wymiernych położonych przed przekrojami (P) i (P') . Jeżeli każdy z tych przekrojów jest drugiego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiernych, to każda liczba wymierna, do zbioru (A_1) nie należąca, będzie oczywiście położona poza każdym z rozważanych przekrojów, skąd wynika natychmiast, że przekroje (P) i (P') będą w takim razie przekrojami równorzędnymi zbioru liczb wymiernych.

Założmy więc, że jeden z przekrojów (P) i (P') , powiedzmy przekrój (P) , jest przekrojem pierwszego gatunku, i oznaczmy przez w liczbę wymierną, na tym przekroju położoną. Liczba w nie będzie mogła być położona ani przed przekrojem (P') , ani poza nim, albowiem w obu przypadkach istniałyby, wbrew założeniu, liczby wymierne, (mianowicie każda z tych, które położone byłyby pomiędzy liczbą w a przekrojem (P')), takie, żeby każda z nich położona była przed jednym z przekrojów (P) i (P') , nie zaś przed drugim.

Zatem liczba w położona będzie na przekroju (P') i przekroje (P) i (P') znowu będą przekrojami równorzędnymi. Ostatecznie uzasadniłmy pierwszą część twierdzenia.

Analogicznie uzasadniamy drugą część: gdy każdy z przekrojów (P) i (P') jest drugiego gatunku przekrojem zbioru liczb

wymiernych, to każda liczba wymierna, nie położona jednocześnie poza obu przekrojami, będzie musiała leżeć przed każdym z nich, skąd równorzędność rozważanych przekrojów natychmiast wynika. Założmy więc, że jeden z omawianych przekrojów, powiedzmy, przekrój (P) , jest pierwszego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiennych, i oznaczmy przez w liczbę wymierną na nim położoną; gdyby liczba w nie była także położona i na przekroju (P') , gdyby więc przekroje (P) i (P') nie były przekrojami równorzędnymi zbioru liczb wymiennych, to, wbrew założeniu, istniałaby liczba wymierna, (mianowicie każda z liczb wymiennych, położonych pomiędzy liczbą w a przekrojem (P')), która położona byłaby poza jednym z przekrojów (P) i (P') , nie zaś poza drugim. Uzasadniliśmy więc i drugą część twierdzenia, o które chodzi.

Przejdźmy do trzeciej części. Gdyby przekrój (P) był drugiego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiennych, to symbole (P) i (P') oczywiście oznaczałyby w rzeczywistości ten sam przekrój zbioru liczb wymiennych i równorzędność rozważanych przekrojów nie byłaby wątpliwą. Założmy więc, że przekrój (P) jest pierwszego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiennych, i oznaczmy przez w liczbę wymierną, na tym przekroju położoną. Liczba w nie mogłaby być położoną ani przed przekrojem (P') , ani poza tym przekrojem, albowiem w obu przypadkach istniałaby, wbrew założeniu, liczba wymierna, (mianowicie każda z liczb wymiennych, położonych pomiędzy liczbą w a przekrojem (P')), która leżałaby przed jednym z przekrojów (P) i (P') , ale poza drugim z nich.

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

VI. Jeżeli dwa przekroje zbioru liczb wymiennych nie są równorzędne, to istnieje nieskończenie wiele liczb wymiennych, położonych pomiędzy tymi przekrojami; pewien jeden z rozważanych przekrojów położony jest przed wszystkimi temi liczbami wymiernymi, a drugi — poza niemi wszystkimi. Nadto, w zbiorze liczb wymiennych, położonych pomiędzy dwoma przekrojami zbioru liczb wymiennych, nie istnieje ani liczba najmniejsza, ani liczba największa.

Żeby twierdzenie to udowodnić, uważajmy dwa nierównorzędne przekroje zbioru liczb wymiennych. W takim razie istnieć będzie przynajmniej jedna liczba wymierna w , która położona będzie przed jednym z rozważanych przekrojów przed przekrojem (Q) , a nie przed drugim (P) , gdyż w razie przeciwnym zbiór liczb wy-

miernych, położonych przed jednym z rozważanych przekrojów, zlewały się ze zbiorem liczb, położonych przed drugim, i na podstawie I-szej części twierdzenia poprzedniego omawiane przekroje byłyby, wbrew założeniu, równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiennych. Skoro liczba wymierna w przed przekrojem (P) położona być nie może, to liczba ta położona jest albo na samym przekroju (P) , albo poza tym przekrojem. Zatem każda liczba wymierna, większa od liczby w , położona jest poza przekrojem (P) . Z drugiej strony pomiędzy liczbą w a przekrojem (Q) , przed którym liczba ta jest położona, istnieje (tw. II) nieskończenie wiele liczb wymiennych. Każda z tych liczb większa jest od liczby w , gdyż liczba, położona pomiędzy liczbą w a przekrojem (Q) , oczywiście liczbie w równać się nie może i nie może także mniejszą być od liczby w , albowiem w ostatnim przypadku rozważana liczba położona byłaby jednocześnie przed liczbą w i przekrojem (Q) , a więc nie leżałaby pomiędzy tymi elementami.

Stwierdzamy więc, że każda liczba wymierna, położona pomiędzy liczbą w a przekrojem (Q) , większa jest od liczby w . A ponieważ upewniliśmy się przed chwilą, że każda liczba wymierna, większa od liczby w , położona jest poza przekrojem (P) , przeto stwierdzamy, iż każda z nieskończenie wielu liczb wymiennych, położonych pomiędzy liczbą w a przekrojem (Q) , położona jest pomiędzy przekrojami (P) i (Q) .

Dowiedliśmy więc, że istnieje nieskończenie wiele liczb wymiennych, położonych pomiędzy dwoma nierównorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiennych, i tem samem uzasadniliśmy pierwszą część twierdzenia. Żeby uzasadnić drugą część, uważajmy dwie liczby wymierne l_1 i l_2 , położone pomiędzy dwoma przekrojami (z konieczności nierównorzędnymi) zbioru liczb wymiennych. Pewien jeden z tych przekrojów położony będzie przed liczbą l_1 . Oznaczmy przekrój ten przez (P) . W takim razie drugi przekrój (Q) oczywiście położony będzie poza liczbą l_1 . Liczba l_2 nie może być położona ani przed przekrojem (P) , ani poza przekrojem (Q) . Istotnie, w pierwszym przypadku liczba ta byłaby mniejszą od l_1 i położona byłaby z tej przyczyny nie tylko przed przekrojem (P) , ale i przed przekrojem (Q) , zatem, wbrew założeniu, liczba l_2 nie byłaby położona pomiędzy przekrojami (P) i (Q) ; w drugim zaś przypadku liczba l_2 byłaby większa od liczby l_1 i położona byłaby nie tylko poza przekrojem (Q) , ale i poza przekrojem (P) , zatem,

wbrew założeniu, liczba l_2 i w tym razie nie byłaby położona pomiędzy przekrojami (P) i (Q) .

Ponieważ zaś liczba l_2 , jako liczba wymierna, położona pomiędzy przekrojami (P) i (Q) , położona być musi poza jednym z tych przekrojów, ale przed drugim z nich, przeto liczba ta położona jest poza przekrojem (P) , a przed przekrojem (Q) . Zatem wszystkie liczby, położone pomiędzy dwoma nierównorzędnymi przekrojami, rzeczywiście położone być muszą poza jednym z tych przekrojów a przed drugim z nich. Pozostaje tylko jeszcze do okazania, że w zbiorze (Z) wszystkich liczb wymiernych, położonych pomiędzy dwoma przekrojami zbioru liczb wymiernych, nie istnieje ani liczba najmniejsza, ani liczba największa.

W tym celu oznaczmy przez (P) ten z rozważanych przekrojów, który położony jest przed każdą z liczb zbioru (Z) , a przez (Q) drugi przekrój, położony poza każdą z liczb tego zbioru. Gdyby w zbiorze (Z) istniała pewna liczba najmniejsza, to ta liczba oczywiście byłaby najmniejszą z liczb wymiernych, położonych poza przekrojem (P) ; gdyby zaś w zbiorze (Z) istniała pewna liczba największa, to ta liczba byłaby największą z liczb wymiernych, położonych przed przekrojem (Q) .

Otóż na podstawie tw. I-go żaden z tych wypadków zachodzić nie może. Zatem zgodnie z brzmieniem twierdzenia w zbiorze (Z) nie istnieje ani liczba najmniejsza, ani liczba największa. Ostatecznie, uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Twierdzenie powyższe upoważnia nas do wprowadzenia definicyi następującej:

Orzeczenie, iż pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych położony jest przed pewnym drugim przekrojem (Q) zbioru tychże liczb, zarówno jak i orzeczenie, iż przekrój (Q) położony jest poza przekrojem (P) , wyrażają, iż przekrój (P) położony jest przed każdą z liczb wymiernych, położonych pomiędzy przekrojami (P) i (Q) , a przekrój (Q) poza wszystkimi temi liczbami.

Z rozważań powyższych wynikają bezpośrednio twierdzenia następujące:

VII. Jeżeli pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych położony jest przed pewną liczbą wymierną, która sama leży przed pewnym przekrojem (Q) zbioru liczb wymiernych, to przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) .

VIII. Jakiegokolwiek dwa przekroje (P) i (Q) zbioru liczb wymiernych rozważalibyśmy, zawsze zachodzi jeden, ale tylko jeden z trzech przypadków następujących:

- 1°. Przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q).
- 2°. Przekrój (P) położony jest poza przekrojem (Q).
- 3°. Przekroje (P) i (Q) są równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiernych.

§ 67. Żeby rozwiązać kwestyę niezależności wyniku porównywania ilościowego liczb bezwzględnych od wyboru jednostki długości, uzasadnimy twierdzenie następujące:

I. Liczba bezwzględna, równa zero, mniejsza jest od każdej innej liczby bezwzględnej, a jeżeli oznaczmy przez α i β dwie jakiegokolwiek, byle od zera odmienne liczby bezwzględne, to w takim razie zachodzi pierwszy, drugi lub trzeci ze związków

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta \quad \text{lub} \quad \alpha > \beta,$$

zależnie od tego, czy przekrój (P) zbioru liczb wymiernych, na którym położona jest liczba α , leży przed przekrojem (Q), na którym położona jest liczba β , jest równorzędnym przekrojowi (Q) lub leży poza tym przekrojem.

Ponieważ niezależnie od wyboru jednostki długości liczba równa zero jest zawsze miarą odcinka zerowego, a liczba bezwzględna, od zera odmienna, zawsze jest miarą pewnego odcinka niezerowego, ponieważ nadto odcinek zerowy mniejszy jest od każdego innego odcinka, przeto, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, liczba bezwzględna, równa zero, mniejsza jest od każdej innej liczby bezwzględnej.

Uważajmy obecnie dwie jakiegokolwiek, byle od zera odmienne liczby bezwzględne α i β , oraz przekroje (P) i (Q) zbioru liczb wymiernych, na których położone są odpowiednio rozważane liczby. Przyjmijmy za jednostkę długości jakiegokolwiek (ale naturalnie niezerowy) odcinek u i oznaczmy przez a i b odcinki, których miarami byłyby liczby α i β .

Gdyby przekroje (P) i (Q) były równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiernych, to zachodziłaby, na podstawie tw. IV-go z paragrafu poprzedzającego, jedna z okoliczności następujących:

- 1°. Na obu przekrojach leżą równe sobie liczby wymierne.
- 2°. Rozważane przekroje zlewają się ze sobą w zupełności.

Oczywiście, w obu przypadkach zachodziłaby równość

$$a = b.$$

Zatem, jeżeli przekroje (P) i (Q) są równorzędne, to, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, liczby α i β , położone na tych przekrojach, są sobie równe.

Jeżeli przekroje (P) i (Q) nie są równorzędne, to (§ 66, tw. VI) istnieje nieskończenie wiele liczb wymiennych, położonych pomiędzy tymi przekrojami. Oznaczmy przez w jedną z tych liczb wymiennych, a przez c odcinek prostoliniowy, którego miarą przy rozważanej jednostce długości byłaby liczba w .

Jeżeli przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) , to liczba w położona będzie przed przekrojem (Q) , ale poza przekrojem (P) . Z tego wynika natychmiast, że mielibyśmy:

$$a < c \quad \text{oraz} \quad c < b,$$

skąd

$$a < b.$$

Zatem, jeżeli przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) , to, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, mamy

$$\alpha < \beta.$$

Zważywszy, iż założenie, w którymby przekrój (P) położony był poza przekrojem (Q) , tylko co do oznaczeń różni się od założenia, w którym przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) , wnosimy natychmiast z tego co poprzedza, że w tym przypadku zachodziłby związek

$$\alpha > \beta.$$

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Ponieważ twierdzenie poprzedzające dostarcza nam takiego kryterium do wykonywania porównywania ilościowego liczb bezwzględnych, które zastosowane być może nie oznaczając jednostki długości, przeto zachodzi twierdzenie następujące:

II. *Wynik porównywania ilościowego dwóch liczb bezwzględnych nie jest zależny od wyboru jednostki długości.*

Twierdzenie to rozstrzyga kwestyę, o którą nam chodziło.

Z uzyskanych wyników łatwo wyprowadzić możemy ważne twierdzenie następujące:

III. Jeżeli dwie liczby bezwzględne a i b sprawdzają nierówność

$$a < b,$$

to istnieje nieskończenie wiele odmiennych pomiędzy sobą liczb wymiernych, z których każda większa jest od liczby a , ale jest mniejsza od liczby b .

Istotnie, spostrzegamy natychmiast, że twierdzenie to zachodzi w przypadku szczególnym, kiedy mamy $a = 0$, gdyż w takim razie liczba b leży na pewnym przekroju (Q) zbioru liczb wymiernych, a każda z nieskończenie wielu liczb wymiernych od zera większych, położonych przed przekrojem (Q) większa jest od liczby a , ale jest mniejsza od liczby b . Jeżeli zaś mamy $a > 0$, to liczby a i b leżeć będą na pewnych dwóch nierównorzędnych przekrojach (P) i (Q) zbioru liczb wymiernych. Na podstawie tw. VI-go paragrafu poprzedzającego istnieje nieskończenie wiele nierównych sobie liczb wymiernych, położonych pomiędzy przekrojami (P) i (Q). Każda z tych liczb oczywiście leżeć będzie na pewnym takim przekroju zbioru liczb wymiernych, który położony będzie poza przekrojem (P), ale przed przekrojem (Q). Zatem na podstawie tw. I-go paragrafu niniejszego, każda z nieskończenie wielu liczb wymiernych, położonych pomiędzy przekrojami (P) i (Q) większa będzie od liczby a , ale będzie mniejsza od liczby b . Zatem uzasadniliśmy twierdzenie, o które chodziło.

§ 68. Zanim przejdziemy do teorii działań zasadniczych na liczbach bezwzględnych, winniśmy bliżej omówić sprawę oznaczania tych liczb.

Oznaczanie liczb wymiernych nie jest połączone z żadną trudnością, albowiem posiadamy do tego symbole specyficzne, czyli metodę ogólną do przedstawienia każdej takiej liczby przez symbol, utworzony według reguł jednostajnych ze skończonej liczby pewnych symbolów podstawowych, mianowicie cyfr

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Zgola inny jest stan rzeczy, kiedy chodzi o liczby niewymierne: nie posiadamy żadnego takiego skończonego zbioru symbolów, żebyśmy mogli przedstawić każdą liczbę niewymierną przez jakąś kombinację skończonej liczby tychże, a nawet możemy dowieść drogą całkiem ścisłego rozumowania, którego wykład na tem miejscu byłby jednak przedwczesny, że ustawienie tego rodzaju