

Mamy zatem

$$L \geq a \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

oraz

$$L < (a + 1) \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

ze względu na to, iż liczba l jest od jedności mniejsza. Ze związków tych wynika, że ta jedyna wartość na x , która warunkom zadania czyni zadość, jest następująca.

$$x = a \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}.$$

a ponieważ w razie, gdyby w liczbie dziesiętnej d cyfry rzędów wyższych od cyfry jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ równały się zeru, mielibyśmy

$$l = 0,$$

przeto, możemy jeszcze dodać, że w tym razie mielibyśmy

$$x = d,$$

a więc i

$$x = L.$$

Uwzględniając tw. III-cie z § 50-go możemy przedstawić uzyskane wyniki w postaci twierdzenia następującego:

IV. Jeżeli pewna liczba L równa się dokładnie pewnej znanej nam liczbie dziesiętnej d , to liczba dziesiętna x , która przedstawia przybliżoną wartość liczby L , doprowadzoną aż do cyfry jednostek danej wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$, może być uzyskana w sposób następujący: wyszukujemy

w liczbie d cyfrę c jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ i zastępujemy następnie w liczbie d wszystkie cyfry po prawej stronie cyfry c zerami; liczba dziesiętna tą drogą uzyskana jest właśnie liczbą x , o którą chodziło; w razie, kiedy w liczbie d cyfry rzędów wyższych od cyfry c równe są zeru, mamy oczywiście

$$x = d.$$

§ 52. Zamianie oznaczonej liczby L na liczbę dziesiętną towarzyszą pewne okoliczności ważne i zajmujące. Żeby okoliczności

te w należytem świetle przedstawić, wprowadzamy najpierw pojęcie liczby dziesiętnej nieskończonej (powiadam „nieskończonej“, a nie nieskończenie wielkiej).

Żeby zapobiedz wszelkiemu nieporozumieniu nadajemy obecnie nazwę liczby dziesiętnej skończonej tej rzeczy, którą określiliśmy w § 47-tym pod nazwą liczby dziesiętnej. Jednakże, żeby uprościć wysławianie się, przyjmijmy regułę następującą: zamiast wyrażenia liczba dziesiętna skończona używać będziemy zwykłe wyrażenia krótszego liczba dziesiętna, natomiast zamiast wyrażenia liczba dziesiętna nieskończona tylko wyjątkowo posługiwać się będziemy wyrażeniem „liczba dziesiętna“ albo krótszem jeszcze wyrażeniem „liczba“, i to oczywiście tylko w tych przypadkach, kiedy wszelkie nieporozumienie będzie wykluczone.

Załóżmy, że na podstawie pewnego układu (U) umów, odpowiada każdej jednostce dziesiętnej rzędu niższego (a więc wartości większej) od oznaczonej jednostki dziesiętnej

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

cyfra zero, a każdej jednostce dziesiętnej wartości $\frac{10^\alpha}{10^{\beta+k-1}}$, ($k \geq 1$) pewna cyfra c_k , która równać się może którejkolwiek z cyfr:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Możemy tedy rozważać zbiór wszystkich liczb dziesiętnych postaci

$$(A) \quad \sum_{k=1}^n c_k \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k-1}},$$

gdzie oznaczyliśmy przez n jakąkolwiek, byle od jedności nie mniejszą liczbę całkowitą. Ten zbiór liczb dziesiętnych zowie się liczbą dziesiętną nieskończoną, cyfra, która na podstawie umów (U) odpowiada jakiegokolwiek jednostce dziesiętnej wartości

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta},$$

— cyfrą jednostek dziesiętnych wartości

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

w owej liczbie dziesiętnej nieskończonej, a każda liczba dziesiętna, postaci (A) — reduktom określonej przed chwilą liczby dziesiętnej nieskończonej, doprowadzonym do cyfry jednostek dziesiętnych wartości

$$\frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+n-1}}.$$

Definicje przyjęte w § 50-tym przywodzą nas do wprowadzenia definicyi następujących: orzeczenie, że pewna cyfra c pewnej liczby dziesiętnej nieskończonej λ jest o p jedności niższego rzędu od pewnej cyfry c' tej samej liczby dziesiętnej, albo jakiegokolwiek innej liczby dziesiętnej nieskończonej lub skończonej i orzeczenie, że cyfra c' jest o p jedności wyższego rzędu od cyfry c , wyrażają to samo, a mianowicie, iż jednostka dziesiętna, której cyfrą jest cyfra c równa się iloczynowi przez 10^p tej jednostki, której cyfrą jest cyfra c' ; jeżeli pewna cyfra c pewnej liczby dziesiętnej (skończonej lub nieskończonej) i pewna cyfra c' pewnej innej liczby dziesiętnej (która także może być albo liczbą dziesiętną skończoną albo nieskończoną) są cyframi jednostek dziesiętnych równych sobie, czyli równorzędnych (§ 50), to okoliczność tę wyrażamy, orzekając, iż cyfry c i c' są równorzędnymi cyframi rozważanych liczb dziesiętnych.

Powyższa definicya liczby dziesiętnej nieskończonej nie wyklucza przypadku, w którymby wszystkie cyfry liczby dziesiętnej nieskończonej były równe zeru, ale z definicyi tej wynika, że w razie, kiedy nie wszystkie cyfry oznaczonej liczby dziesiętnej nieskończonej λ równe są zeru, w liczbie λ istnieje pomiędzy cyframi od zera odmiennymi pewna cyfra najniższego rzędu: cyfra ta zowie się pierwszą cyfrą znaczącą liczby λ . Jeżeli pewna liczba c jest pierwszą cyfrą znaczącą pewnej liczby dziesiętnej nieskończonej λ , to każda taka cyfra liczby λ , która jest o p jedności wyższego rzędu od cyfry c , zowie się cyfrą znaczącą rzędu p w liczbie dziesiętnej λ .

Uważajmy jakąkolwiek liczbę dziesiętną nieskończoną λ i wszystkie te reduktory tej liczby, z których każdy doprowadzony jest albo do cyfry jednostek dziesiętnych oznaczonej wartości $\frac{10^{\alpha}}{10^{\beta}}$, albo do jakiegokolwiek cyfry rzędu wyższego. W każdym z tych wszystkich reduktów liczba jednostek dziesiętnych (§ 50) wartości $\frac{10^{\alpha}}{10^{\beta}}$

równa się oczywiście pewnej tej samej liczbie całkowitej X ; ta liczba zowie się *liczbą jednostek dziesiętnych wartości* $\frac{10^x}{10^y}$ w liczbie dziesiętnej λ .

Na podstawie tw. I-szego z § 48-go możemy wyprowadzić z symbolu specyficznego oznaczonej liczby dziesiętnej skończonej l symbole specyficzne liczb dziesiętnych równych liczbie l przez dopisywanie dowolnych liczb zer po jednej lub po obu stronach symbolu specyficznego liczby l . Oczywiście, wszystkie te liczby dziesiętne, zarówno jak i sama liczba l , uważane być mogą za redukty pewnej oznaczonej liczby dziesiętnej nieskończonej, która posiadać będzie tę osobliwość, iż poczynając od pewnej cyfry, sama ta cyfra i cyfry rzędów wyższych, będą równe zeru; cyfra i liczba jednostek jakiegokolwiek wartości $\frac{10^x}{10^y}$ w liczbie l oczywiście równać się będzie odpowiednio cyfrze i liczbie jednostek tej samej wartości $\frac{10^x}{10^y}$ w liczbie λ .

Winniśmy zaznaczyć z naciskiem, że rzecz, której daliśmy nazwę liczby dziesiętnej nieskończonej, wbrew opinii, którą moglibyśmy powziąć z brzmienia tej nazwy, bynajmniej nie przedstawia szczególnego rodzaju rzeczy z tej klasy przedmiotów, którym nadaliśmy nazwę liczb dziesiętnych w § 47-tym; definicya podana wyżej nie tylko nie określa liczby dziesiętnej nieskończonej jako liczby ułamkowej, ale nawet nie daje nam prawa, o ile dodatkowych definicyi nie ustawimy, do uważania liczb dziesiętnych nieskończonych za wielkości.

Ze względu na uwagi poprzedzające termin liczba dziesiętna nieskończona z konieczności wyda się czytelnikowi bardzo niestosownym i jakby umyślnie dobranym w celu wprowadzenia zamieszania. Przekonamy się jednak później, ale dopiero w jednym z dalszych rozdziałów, że, po wyrobieniu sobie należycie szerokiego pojęcia liczby, termin liczba dziesiętna nieskończona nabywa zalet, które posługiwanie się nim najzupełniej usprawiedliwiają.

§ 53. Powracając do problemu zamiany danej liczby na liczbę dziesiętną, zamierzam udowodnić twierdzenie następujące:

I. Każdej dowolnie przyjętej liczbie (wymiernej) L odpowiada jedna i tylko jedna liczba dziesiętna nieskończona λ , która zależy wy-

łącznie od wartości liczby L i ma tę własność, iż każda liczba dziesiętna, która przedstawia aż do cyfry jednostek dowolnie oznaczonej wartości $\frac{10^m}{10^p}$ doprowadzoną wartość przybliżoną liczby L , równa się reduktowi liczby λ , doprowadzonemu do cyfry jednostek wartości $\frac{10^m}{10^p}$.

Czynność, polegająca na wyznaczeniu cyfr liczby λ , kiedy dana jest liczba L , zowie się rozwijaniem liczby L na liczbę dziesiętną nieskończoną.

Ta okoliczność, że istnieje najwyżej jedna tylko liczba dziesiętna λ , która sprawdza warunki wymienione w twierdzeniu i w razie istnienia zależy wyłącznie od wartości liczby L , jest natychmiastowym następstwem tego, że jakieśmy widzieli (§ 51), liczba dziesiętna, przedstawiająca aż do cyfry jednostek oznaczonej wartości doprowadzoną wartość przybliżoną danej liczby, posiada wartość oznaczoną w zupełności. Chodzi więc tylko o podanie dowodu istnienia liczby dziesiętnej nieskończonej λ . Jeżeli liczba L równa się zeru, to istnienie liczb λ jest oczywiste: będzie to liczba dziesiętna nieskończona, której wszystkie cyfry równać się będą zeru.

Zakładamy tedy, że liczba L jest od zera większa. W takim razie nie tylko istnieć będzie pewna taka liczba całkowita α , że-
byśmy mieli:

$$10^\alpha > L,$$

ale i pewna liczba całkowita m , sprawdzająca nierówność

$$L > \frac{1}{10^m}.$$

Zatem, w ciągu skończonym, następującym

$$\frac{10^\alpha}{10^0}, \frac{10^\alpha}{10^1}, \frac{10^\alpha}{10^2}, \dots, \frac{10^\alpha}{10^{\alpha+m}},$$

którego pierwszy wyraz równa się liczbie 10^α , każdy dalszy — ilorazowi podziału przez 10 wyrazu, który go poprzedza bezpośrednio, a ostatni — liczbie $\frac{1}{10^m}$, istnieć będą pewne dwa wyrazy sąsiednie

$$\frac{10^\alpha}{10^{\beta-1}} \text{ i } \frac{10^\alpha}{10^\beta},$$

sprawdzające związki następujące:

$$(25) \quad \frac{10^\alpha}{10^{\beta-1}} > L$$

$$(26) \quad L \geq \frac{10^\alpha}{10^\beta},$$

Ze względu na te dwa związki liczba dziesiętna, przedstawiająca do cyfry jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ doprowadzoną wartość przybliżoną liczby L , równać się będzie iloczynowi

$$c_1 \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta},$$

w którym c_1 oznacza pewną, od zera odmienną, cyfrę numeracyi dziesiętnej.

Oznaczmy ogólnie przez x_i ($i \geq 1$) liczbę dziesiętną, która przedstawia aż do jednostki wartości $\frac{10^\alpha}{10^{\beta+i-1}}$ doprowadzoną wartość przybliżoną liczby L . Mamy tedy

$$(27) \quad x_i = X_i \cdot \frac{10^\alpha}{10^{\beta+i-1}},$$

oznaczając przez X_i pewną liczbę całkowitą.

Powiadam, że jakkolwiek od jedności nie mniejszą liczbę całkowitą oznaczałby wskaźnik k , mamy

$$(28) \quad X_{k+1} = 10 \cdot X_k + c_{k+1}$$

a więc

$$(29) \quad x_{k+1} = (10 \cdot X_k + c_{k+1}) \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}},$$

gdzie symbol c_{k+1} oznacza jedną z cyfr numeracyi dziesiętnej. Istotnie, mamy:

$$(30) \quad x_k = X_k \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k-1}}$$

oraz

$$x_k \leq L < x_k + \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k-1}}$$

skąd

$$(31) \quad 0 \leq L - x_k < \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k-1}}.$$

Zatem liczba dziesiętna, przedstawiająca wartość przybliżoną, różnicy $L - x_k$, doprowadzoną aż do cyfry jednostek wartości

$$\frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}},$$

równać się będzie liczbie

$$c_{k+1} \cdot \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}},$$

gdzie c_{k+1} oznacza liczbę całkowitą, która sprawdzać będzie związki

$$c_{k+1} \cdot \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}} \leq L - x_k < (c_{k+1} + 1) \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}}. \quad (32)$$

Z porównania związków tych ze związkami (31) wnosimy natychmiast, że mamy

$$c_{k+1} < 10;$$

zatem liczba całkowita c_{k+1} równa się jednej z cyfr numeracji dziesiętnej. Z drugiej strony związki (32) po podstawieniu wartości (30) na x_k , pociągają za sobą związki następujące:

$$(10 \cdot X_k + c_{k+1}) \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}} \leq L < (10 \cdot X_k + c_{k+1} + 1) \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}}.$$

Związki te wyrażają, że liczba dziesiętna

$$(10 \cdot X_k + c_{k+1}) \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}}$$

przedstawia aż do cyfry jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}}$ doprowadzoną wartość przybliżoną liczby L .

Zatem, wyznaczwszy cyfrę c_{k+1} ze związków (32), znajdziemy na x_{k+1} wzór (29), a zatem na X_{k+1} wzór (28), gdzie c_{k+1} , zgodnie z zapowiedzią, oznaczać będzie jedną z cyfr numeracji dziesiętnej.

W rozważaniach poprzedzających określiliśmy w zależności od liczby L w zupełności cyfrę, którą przy jakiegokolwiek, od jedności nie mniejszej wartości wskaźnika i przedstawiać ma symbol c_i . Tem samym określiliśmy w zupełności ciąg nieskończony

$$c_1, c_2, c_3, \dots \quad (33)$$

którego każdy wyraz przedstawia jedną z cyfr numeracji dziesiętnej i którego pierwszy wyraz c_1 jest pewną od zera odmienną cyfrą.

Umawiamy się obecnie, że symbol λ ma oznaczać liczbę dziesiętną nieskończoną, w której wszystkie cyfry jednostek dziesiętnych większych od jednostki dziesiętnej

$$\frac{10^\beta}{10^\alpha}$$

równe są zeru, a cyfra jednostek wartości

$$\frac{10^\alpha}{10^{\beta+i-1}} \quad (i \geq 1)$$

równa się wyrazowi c_i ciągu (33). Definicja ta oczywiście określa w zupełności liczbę dziesiętną nieskończoną λ . Upewnijmy się, że liczba ta posiada zapowiedziane w twierdzeniu własności.

W razie, kiedy mamy

$$\frac{10^m}{10^p} = \frac{10^{\alpha+t}}{10^\beta},$$

oznaczając przez t liczbę całkowitą nie mniejszą od jedności, liczba dziesiętna, która przedstawia do cyfry jednostek wartości

$$\frac{10^m}{10^p}$$

doprowadzoną wartość przybliżoną liczby L , równa się oczywiście zeru, na podstawie nierówności (25), i równa się zatem rzeczywiście doprowadzonemu do cyfry jednostek wartości

$$\frac{10^m}{10^p}$$

reduktowi liczby λ , gdyż redukt ten równa się zeru. W razie zaś kiedy mamy

$$\frac{10^m}{10^p} = \frac{10^\alpha}{10^{\beta+i-1}},$$

gdzie i oznacza liczbę całkowitą od jedności nie mniejszą, mamy na wartość α_i liczby dziesiętnej, która przedstawia aż do jednostek wartości

$$\frac{10^m}{10^p}$$

doprowadzoną wartość przybliżoną liczby L , wzór następujący:

$$x_i = \sum_{\mu=1}^i c_{\mu} \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+\mu-1}}, \quad (34)$$

który przedstawia do cyfry c_i , jednostek wartości

$$\frac{10^{\alpha}}{10^{\beta}}$$

doprowadzony reduct liczby dziesiętnej nieskończonej λ , albowiem, gdy mamy $i=1$, wzór (34) zachodzi oczywiście, a gdyby wzór ten zachodził w razie, kiedy mamy $i=k$, to na podstawie wzorów (29) i (30) wzór ten zachodziłby i dla $i=k+1$, skąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, wynika, że wzór (34) zachodzi przy każdej od jedności nie mniejszej wartości na wskaźnik i .

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Twierdzenie to przywodzi nas do definicji następującej: *cyfrą i liczbą jednostek dziesiętnych jakiegokolwiek oznaczonej wartości*

$$\frac{10^{\alpha}}{10^{\beta}}$$

oznaczonej liczby (wymiernej) L zowiemy odpowiednio cyfrę i liczbę jednostek dziesiętnych rozważanej wartości w tej liczbie dziesiętnej nieskończonej, na którą liczba L może być rozwinięta.

Okoliczność, iż na podstawie twierdzenia, dopiero co uzasadnionego, każda liczba wymierna rozwinięta być może na liczbę dziesiętną nieskończoną, nasuwa pytania następujące: czy odwrotnie każda liczba dziesiętna nieskończona uważana być może za wynik rozwijania pewnej liczby wymiernej na liczbę dziesiętną nieskończoną? Przekonamy się niżej, że okoliczność ta bynajmniej nie zachodzi.

Już w § 52-gim mieliśmy sposobność zaznaczyć jako fakt oczywisty, że każda liczba dziesiętna (a więc i każda liczba całkowita) oraz wszystkie liczby dziesiętne jej równe uważane być mogą za redukty pewnej oznaczonej liczby dziesiętnej nieskończonej. Obecnie, posługując się wyrażeniem „rozwijanie liczby wymiernej na liczbę dziesiętną nieskończoną“, możemy ten sam fakt wyrazić w sposób następujący: każda liczba wymierna L , byle równa liczbie dziesiętnej skończonej (albo liczbie całkowitej), rozwinięta

być może na liczbę dziesiętną nieskończoną; jeżeli bowiem oznaczmy przez λ liczbę liczbę dziesiętną nieskończoną taką, żeby każda cyfra liczby λ , której odpowiada cyfra równorzędna liczby dziesiętnej skończonej, równej liczbie L , równała się tej cyfrze, a każda inna — była równa zeru, to liczba λ oczywiście stanowić będzie wynik rozwinięcia liczby L na liczbę dziesiętną nieskończoną. Uwagę tę możemy uzupełnić, zaznaczając, że odwrotnie zachodzi twierdzenie następujące:

II. *Jeżeli wynikiem rozwinięcia pewnej liczby L na liczbę dziesiętną nieskończoną jest taka liczba dziesiętna nieskończona, której cyfry znaczące są, poczynając od cyfry pewnego dostatecznie wysokiego rzędu, równe zeru, to liczba ta może być zamieniona dokładnie na liczbę dziesiętną skończoną i równa się temu reduktowi liczby λ , który doprowadzony jest do ostatniej od zera odmiennej cyfry znaczącej tej liczby dziesiętnej nieskończonej.*

Twierdzenie powyższe możemy uzasadnić w sposób następujący. Załóżmy, że, rozwijając liczbę L na liczbę dziesiętną nieskończoną λ , stwierdziliśmy, iż wszystkie te cyfry liczby λ , które są rzędu wyższego od cyfry c ($c \neq 0$) jednostek pewnej wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$, równają się zeru, i oznaczmy przez d redukt liczby λ , doprowadzony do cyfry c , a przez d_* redukt tejże liczby dziesiętnej nieskończonej, doprowadzony do cyfry jednostek wartości

$$\frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}}.$$

Mamy tedy

$$0 \leq L - d_* < \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}}$$

oraz

$$d_* = d,$$

albowiem w liczbie λ cyfry znaczące rzędu wyższego od rzędu cyfry c są wszystkie równe zeru. Mamy więc

$$0 \leq L - d < \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}},$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez k . Gdybyśmy mieli

$$L - d > 0,$$

to, wbrew temu, o czym przekonał się, istniałaby taka wartość na k , przy której zachodziłaby nierówność

$$L - d > \frac{10}{10^{\beta+1}}.$$

Mamy więc

$$L - d = 0$$

czyli

$$L = d.$$

Równość ta wyraża właśnie twierdzenie, które mieliśmy uzasadnić.

§ 54. Oznaczmy ogólnie przez c_i cyfrę jednostek wartości $\frac{1}{10^i}$ oznaczonej liczby dziesiętnej nieskończonej λ . Może się wydawać, że istnieją takie dwie od jedności nie mniejsze liczby całkowite m i p , żeby związek

$$i \geq m \tag{1}$$

pociągał za sobą równość

$$c_{i+p} = c_i. \tag{2}$$

W takim razie orzekamy, że liczba λ jest liczbą dziesiętną peryodyczną.

Spostrzegamy natychmiast, że liczbę dziesiętną peryodyczną λ możemy określić w zupełności, przyjmując na liczby całkowite m i p dowolne, od jedności nie mniejsze wartości, oznaczając przytem dowolnie cyfry

$$c_m, c_{m+1}, \dots, c_{m+p-1}$$

oraz cyfry rzędu niższego od cyfry c_m .

Ze względu na okoliczność poprzedzającą, tworzymy symbol na liczbę dziesiętną peryodyczną λ w sposób następujący: piszemy doprowadzony do cyfry c_{m+p-1} redukt liczby λ i kładziemy po jednej kropce nad każdą z cyfr c_m i c_{m+p-1} . Ciąg cyfr następujący:

$$c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_{m+p-1}, \tag{3}$$

który w razie równości

$$p = 1$$

redukuje się do jedyne go wyrazu c_m , zowie się peryodem liczby λ , a liczba

$$\omega = c_m \cdot 10^{p-1} + c_{m+1} 10^{p-2} + \dots + 10 \cdot c_{m+p-2} + c_{m+p-1}$$

wartością tego peryodu. Wartość peryodu wogóle nie określa jeszcze samego peryodu, gdyż przy oznaczonej, od zera odmienn ej wartości peryodu, pierwszą od zera odmienną cyfrę w ciągu (3) może oczywiście poprzedzać jakakolwiek liczba cyfr równych zeru. Jeżeli na przykład liczba 27 przedstawia wartość peryodu pewnej liczby dziesiętnej peryodycznej, to peryod ten może być albo ciągiem

$$2, 7,$$

albo ciągiem postaci

$$0, 0 \dots 0, 2, 7,$$

gdzie cyfrę 2 poprzedza, jakakolwiek liczba cyfr równych zeru. Wartość peryodu oczywiście tylko w takim razie określa sam peryod, kiedy wartość ta równa jest zeru; w innych przypadkach do określenia peryodu należy podać, obok jego wartości, liczbę cyfr, przezeń objętych. Jednakowoż używamy często wyrazu peryod zamiast wyrażenia wartość peryodu, ale w takim razie zakładamy milcząco, że wartość peryodu napisana jest w postaci liczby, w której liczba cyfr równa się liczbie cyfr peryodu. Na przykład, rozważając liczbę dziesiętną peryodyczną, w której ciąg

$$0, 0, 2, 7$$

stanowi peryod, mówimy, że liczba

$$0027$$

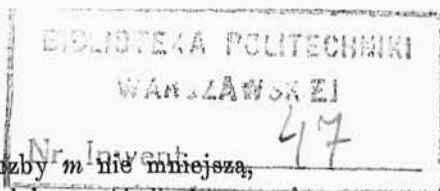
jest peryodem rozważanej liczby dziesiętnej peryodycznej.

Chociażby liczba dziesiętna peryodyczna λ określona była w zupełności, liczby m i p , a więc i peryod rozważanej liczby dziesiętnej peryodycznej λ , nie są rzeczami oznaczonemi w zupełności, albowiem, jeżeli związek (1) pociąga za sobą związek (2), to związek

$$(4) \quad i \geq m'$$

pociągać będzie za sobą równość

$$c_{i+p'} = c_i,$$



jeżeli tylko oznaczymy przez m' liczbę, od liczby m nie mniejszą, a przez p' jakąkolwiek od zera odmienną wielokrotność liczby p . Istotnie, słuszność tej uwagi jest oczywista w przypadku równości $p' = p$, a gdyby uwaga ta uzasadniona była w razie, kiedy mamy $p' = k \cdot p$ ($k \geq 1$), to ze względu na równość

$$c_{i+kp} = c_i,$$

któraby tedy była następstwem związku (4), i na podstawie równości

$$c_{i+kp+p} = c_{i+kp},$$

związek (4) pociągałby za sobą równość

$$c_{i+(k+1)p} = c_i,$$

skąd na podstawie zasady indukcji matematycznej wnosimy, iż powyższa uwaga jest uzasadniona.

Z uwagi tej wynika wniosek, który możemy wysłowić w sposób następujący: *jeżeli wogóle istnieje pewien układ wartości na m i p , przy którym równość (2) jest następstwem związku (1), to istnieje nieskończenie wiele układów wartości na m i p , przy których ta sama okoliczność zachodzi. Zatem, liczba dziesiętna peryodyczna posiada zawsze nieskończenie wiele peryodów.*

Jeżeli przyjmiemy na p pewną jedną wartość taką, żeby wogóle istniała wartość na m , przy której związek (2) byłby następstwem związku (1), to na podstawie uwagi uczynionej wyżej, do rozważanej wartości na p należeć będzie nieskończenie wiele takich wartości na m , żeby przy każdej z nich związek (1) pociągał za sobą związek (2), ale pomiędzy temi wartościami na m znajdzie się oczywiście zawsze pewna wartość najmniejsza. Z drugiej strony pomiędzy różnemi takimi od zera odmiennymi wartościami na p , żeby do każdej z nich można było dobrać taką wartość na m , żeby związek (1) pociągał za sobą związek (2), oczywiście istnieć będzie pewna najmniejsza wartość p_0 . Oznaczmy przez m_0 najmniejszą taką liczbę całkowitą, żeby związek

$$i \geq m_0 \tag{5}$$

pociągał za sobą związek

$$c_{i+p_0} = c_i. \tag{6}$$

Oznaczmy dalej przez p' którąkolwiek z takich wartości na p , żeby możebnem było dobrać do niej liczbę m w ten sposób, iżby

związek (1) pociągał za sobą związek (2) i niech m' będzie najmniejsza taka wartość na m , przy której okoliczność ta zachodzi. W takim razie związek

$$(7) \quad i \geq m'$$

pociągać będzie za sobą związek

$$(8) \quad c_{i+p'} = c_i.$$

Zamierzam uzasadnić twierdzenie następujące:

I. Liczba p' podzielna jest przez p_0 , a liczba m' — równa się liczbie m_0 .

Istotnie, przyjmijmy

$$(9) \quad p' = kp_0 + r,$$

oznaczając przez k całkowitą część ilorazu, a przez r resztę podziału liczby p' przez p_0 . Mamy tedy

$$(10) \quad r < p_0.$$

Oznaczmy przez m'' większą z liczb m_0 i m' albo wspólną ich wartość, gdyby one były równe sobie; nierówność

$$(11) \quad i \geq m''$$

oczywiście pociągać będzie za sobą obie równości (6) i (8). Ze względu na to, że (11) pociąga za sobą (6) i na podstawie jednej z uwag, uczynionych wyżej, następstwem nierówności (11), będzie równość

$$(12) \quad c_{i+r+kp_0} = c_{i+r},$$

a ponieważ nierówność (11) pociąga za sobą równość (8), przeto rzeczona nierówność pociąga za sobą i równość

$$(13) \quad c_{i+r+kp_0} = c_i,$$

gdyż na podstawie równości (9), mamy

$$c_{i+r+kp_0} = c_{i+p'}.$$

Z równości (12) i (13) mamy

$$(14) \quad c_{i+r} = c_i.$$

Zatem nierówność (11) pociąga za sobą równość (14). Z tego wynika, że mamy $r = 0$, ponieważ w razie przeciwnym istniałaby, wbrew założeniu od zera odmienna wartość r na p , mniejsza od p_0

(na podstawie nierówności (10)), dopuszczająca pewną wartość m'' na m , przy której związek (11) pociągałby za sobą związek (14). Dowiedliśmy więc, że liczba p' podzielna jest przez p_0 . Mamy jeszcze dowieść, że zachodzi równość:

$$m' = m_0. \quad (15)$$

Liczba m' od liczby m_0 większa być nie może, skoro bowiem (5) pociąga za sobą (6), to (5) pociąga za sobą równość

$$c_{i+kp_0} = c_i$$

jakąkolwiek wartość całkowitą miałyby liczba k . Ale ze względu na (9) i na równość

$$r = 0,$$

którą uzasadniliśmy wyżej, równość powyższa wyraża, że mamy

$$c_{i+p'} = c_i,$$

zatem równość ta jest następstwem związku (5), a stąd wynika, że liczba m' , jako najmniejsza wartość na m , przy której (1) pociąga za sobą (8), rzeczywiście od liczby m_0 większa być nie może. Założmy chwilowo, że mamy

$$m' < m_0$$

i oznaczmy przez μ liczbę całkowitą, która sprawdzałaby nierówności

$$m' \leq \mu < m_0 \quad (16)$$

$$m_0 - \mu \leq p_0. \quad (17)$$

Oczywiście istnieć będzie przynajmniej jedna wartość na μ , która czynić będzie zadość tym warunkom. Z drugiej strony, ponieważ (7) pociąga za sobą (8), a liczba μ od m' mniejsza nie jest, przeto związek

$$i \geq \mu \quad (18)$$

także pociągać będzie za sobą równość (8). Związek (18) ze względu na nierówność (17) pociąga za sobą jeszcze związek

$$i + p_0 \geq m_0,$$

a że (5) pociąga za sobą (6) i z tej przyczyny także równość

$$c_{i+(k-1)p_0} = c_i,$$

przeto związek (18) pociąga za sobą związek

$$c_{i+p_0+(k-1)p_0} = c_{i+p_0},$$

który możemy napisać w postaci

$$(19) \quad c_{i+p'} = c_{i+p_0},$$

albowiem

$$p' = kp_0 = p_0 + (k-1)p_0.$$

Ostatecznie związek (18) pociąga za sobą związki (8) i (19), a więc i związek (6). Zatem, gdybyśmy mieli

$$m' < m,$$

to, wbrew definicji liczby m_0 , istniałaby od liczby m_0 mniejsza liczba μ , taka, żeby związek (6) był następstwem związku (18). Stwierdzamy więc, że liczba m' nie tylko nie może być większa, ale także i mniejsza od liczby m_0 być nie może. Uzasadniliśmy więc równość (15), która jeszcze do udowodnienia pozostawała.

Natychmiastowem następstwem twierdzenia, które uzasadniliśmy, jest twierdzenie następujące:

II. Jeżeli wogóle istnieje taki układ wartości całkowitych, od jedności nie mniejszych, na m i p , żeby związek (1) pociągał za sobą związek (2), to istnieje pewien układ najmniejszych takich wartości. Innymi słowy, jeżeli wogóle istnieje taki układ wartości całkowitych od jedności nie mniejszych na m i p , żeby związek (1) pociągał za sobą równość (2), to istnieją dwie od jedności nie mniejsze liczby całkowite m_0 i p_0 , które posiadają własności następujące:

1°. Związek (5) pociąga za sobą związek (6).

2°. Jeżeli tylko związek (1) pociąga za sobą związek (2), to w takim razie mamy

$$m \geq m_0 \quad \text{oraz} \quad p \geq p_0.$$

Żeby zrozumieć należycie doniosłość twierdzenia poprzedzającego, należy uprzytomnić sobie co następuje:

Jeżeli wogóle istnieje taki układ wartości całkowitych od jedności nie mniejszych na m i p , przy których związek (1) pociąga za sobą związek (2), to niezawodnie istnieć będzie pewna najmniejsza wartość m_0 na m , której odpowiadać będą takie wartości na p , żeby związek (1) pociągał za sobą związek (2); również oczywistą jest rzeczą, iż przy rozważanem założeniu istnieć będzie pewna naj-

mniejsza wartość p_0 na p , której odpowiadać będzie taka wartość na m , żeby związek (1) pociągał za sobą związek (2), ale, a priori nie jest wykluczona ewentualność, w której, przy poprzedzającym określeniu liczb m_0 i p_0 , związek (5) nie pociągałby za sobą związku (6), gdyż dałoby się pomyśleć, iż nierówność $i \geq m_0$ pociąga za sobą równość $c_{i+p} = c_i$ tylko przy wartościach na p większych od p_0 , a nierówność $i \geq m$ — równość $c_{i+p_0} = c_i$ — tylko przy wartościach na m większych od m_0 .

Otóż na podstawie twierdzenia poprzedzającego wspomniany przypadek zajść nie może; gdyby owa okoliczność wykluczona nie była, to zapowiedź, iż rozważamy najmniejsze wartości na m i p , przy których związek (1) pociąga za sobą związek (2) nie miałyby znaczenia precyzyjnego.

Założmy, że liczby m i p mają najmniejsze takie wartości, przy których związek (1) pociągałby za sobą związek (2). W takim razie peryod

$$c_m, c_{m+1}, \dots, c_{m+p-1},$$

zowie się peryodem zasadniczym liczby dziesiętnej peryodycznej λ , a cyfra c_m i cyfry rzędu wyższego liczby λ zowią się cyframi regularnymi rozważanej liczby dziesiętnej peryodycznej.

W razie równości

$$m = 1$$

liczba λ zowie się liczbą dziesiętną czysto-peryodyczną, jeżeli zaś mamy

$$m > 1,$$

to liczba λ ma nazwę liczby dziesiętnej mieszano-peryodycznej, a cyfry

$$c_1, c_2, \dots, c_{m-1}$$

zowią się cyframi nieregularnymi liczby λ .

§ 55. I. *Liczba dziesiętna nieskończona λ , przedstawiająca wynik rozwinięcia jakiegokolwiek liczby wymiernej L na liczbę dziesiętną, jest liczbą dziesiętną peryodyczną. Jeżeli liczba L może być przemieniona dokładnie na liczbę dziesiętną, to peryod liczby λ równa się zeru; w razie przeciwnym, peryod ten jest od zera odmienny.*

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważmy, że zawsze możemy przyjąć:

$$L = \frac{w}{b}, \quad (1)$$