



VII. Liczby dziesiętne, liczby systematyczne wogóle.

§ 47. Pomiedzy liczbami ułamkowemi zasługują na szczególną uwagę te liczby, których mianowniki są potęgami liczby 10, o wykładnikach całkowitych, od zera większych, albowiem wykonywanie rachunków na takich liczbach wymaga znacznie mniejszego nakładu pracy od rachunków na liczbach ułamkowych jakichkolwiek. Wspomniane liczby ułamkowe zowią się liczbami dziesiętnymi.

Względna łatwość wykonywania rachunków na liczbach dziesiętnych z dwóch pochodzi przyczyn:

1°. Ponieważ mianowniki liczb dziesiętnych są potęgami tej samej liczby całkowitej przeto przy sprowadzaniu kilku liczb dziesiętnych do wspólnego mianownika możemy przyjąć za wspólny mianownik liczbę znaną bezpośrednio, mianowicie mianownik tej z liczb dziesiętnych danych, której mianownik jest największy.

2°. Ponieważ mianowniki liczb dziesiętnych są potęgami tej właśnie liczby, która stanowi zasadę powszechnie przy rachunkach używanej numeracyi, przeto przez wprowadzenie odpowiedniej symbolistyki, którą omówimy niżej, możemy w rachunkach na liczbach dziesiętnych urzeczywistnić pewne szczególne uproszczenia.

Czytelnik spostrzeże z największą łatwością, że w razie posługiwania się numeracją o jakiegokolwiek zasadzie p , liczby ułamkowe o mianownikach równych potęgom o wykładnikach całkowitych liczby p , odgrywałyby rolę analogiczną do tej, którą przy numeracyi dziesiętnej odgrywają liczby dziesiętne.

Wogóle liczby ułamkowe, których mianowniki równają się potęgom o wykładnikach całkowitych, od zera większych, liczby, przyjętej za zasadę numeracyi, zowią się liczbami systematycznymi.

Z liczb systematycznych oczywiście tylko liczby dziesiętne mają znaczenie dla techniki rachunkowej. Z drugiej znów strony, ogólna teoria liczb systematycznych stanowi natychmiastowe rozszerzenie teorii liczb dziesiętnych. Wobec tego sądzimy, że niema powodów do rozwijania ogólnej teorii liczb systematycznych i porzucimy na wykładzie teorii liczb dziesiętnych.

§ 48. Numeracya dziesiętna polega, jak wiemy, na przedstawianiu liczb całkowitych przez symbole postaci

$$(1) \quad c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_2 c_1$$

gdzie każdy z symbolów

$$c_1, c_2, c_3, \dots c_n$$

oznacza jedną z cyfr następujących:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

z tem nadmienieniem, że cyfra, którą oznacza symbol c_n jest w każdym razie od cyfry 0 odmienna, określając przytem znaczenie symbolu (1) przez równość

$$(2) \quad c_n c_{n-1} \dots c_1 = \sum_{i=1}^n c_{n-i+1} \cdot 10^{n-i}.$$

Założenie, polegające na tem, że mamy

$$(3) \quad c_n \neq 0$$

oczywiście ma drugorzędne tylko znaczenie: gdybyśmy założenie to odrzucili, to na podstawie wzoru (2) symbol (1) przedstawiałby i w tym przypadku oznaczoną liczbę całkowitą; natomiast, na skutek odrzucenia założenia, polegającego na nierówności (3), liczba cyfr n liczby L , którą przedstawiałby symbol (1) nie byłaby oznaczona w zupełności: przy oznaczonej wartości liczby L moglibyśmy oczywiście przyjąć liczbę całkowitą n dowolnie, z tem jedynem ograniczeniem, ażeby ona nie była mniejsza od pewnej oznaczonej, od liczby L wyłącznie zależnej liczby n_0 . Gdybyśmy tedy przyjęli

$$n = n_0,$$

to nierówność (3) byłaby spełniona; gdybyśmy przyjęli

$$n > n_0,$$

to mielibyśmy

$$c_n = c_{n-1} = \dots c_{n_0+1} = 0.$$

Co się zaś tyczy cyfr

$$c_{n_0}, c_{n_0-1}, c_{n_0-2}, \dots, c_1,$$

to cyfry te miałyby pewne oznaczone wartości, niezależne od tego, czy liczba n równałaby się liczbie n_0 , czy też byłaby od niej większa; wspomniane cyfry zależałyby oczywiście wyłącznie od liczby L .

W razie nierówności (3) orzekamy, że liczba n jest liczbą cyfr liczby L w znaczeniu właściwym, a w razie, kiedy nierówność ta spełniona nie jest — liczbą cyfr liczby L w znaczeniu szerszym. Z uwag tych wynika, że każdą daną liczbę całkowitą możemy przedstawić w postaci liczby, której liczba cyfr n w szerszym znaczeniu¹⁾ równałaby się jakiegokolwiek, od liczby cyfr w znaczeniu właściwym nie mniejszej liczbie.

Powszechnie przyjęty symbol na liczbę dziesiętną, czyli symbol specyficzny takiej liczby tworzymy w sposób następujący: *piszemy licznik w postaci liczby, której liczba cyfr o jedność przynajmniej większa jest od wykładnika k tej potęgi liczby 10, która stanowi mianownik, następnie, kładziemy przecinek pomiędzy dwiema cyframi sąsiednimi licznika tak dobrane, żeby liczba cyfr, położonych po prawej stronie przecinka, równała się wykładnikowi k .*

Naprzykład według tej reguły symbolem na liczbę dziesiętną

$$\frac{3}{10^2}$$

jest symbol

$$0,03.$$

W dalszym ciągu wyraz „liczba dziesiętna“ nie tylko używany będzie jako nazwa określonego wyżej rodzaju liczby ułamkowej, ale także i jako nazwa dopiero co określonego osobnego symbolu na tego rodzaju liczbę ułamkową. Takie używanie wyrażenia „liczba dziesiętna“ w dwóch różnych znaczeniach nie spowoduje żadnego nieporozumienia, albowiem sama budowa zdania, do którego wchodzić będzie omawiany wyraz podawawsze dostatecznie jasną wskazówkę znaczenia, w którym wyraz ten został użyty.

¹⁾ Celem uproszczenia języka posługiwać się będziemy wyrażeniem „liczba cyfr pewnej liczby“ w znaczeniu „liczba cyfr pewnej liczby w szerszym znaczeniu“, o ile nieporozumienie będzie wykluczone.

Bezpośredniem prawie następstwem powyższych definicyi są dwa twierdzenia następujące:

I. *Jeżeli dopiszemy po prawej lub lewej stronie, albo i po obu stronach oznaczonej liczby dziesiętnej ilekolwiek zer, to nie spowodujemy żadnej zmiany wartości rozważanej liczby dziesiętnej, albowiem dopisywanie zer po lewej stronie liczby ułamkowej nie zmienia ani licznika ani mianownika, a dopisanie jakiegokolwiek liczby zer (powiedzmy p zer), po prawej stronie stanowi tylko pomnożenie licznika i mianownika przez 10^p .*

II. *Jeżeli w pewnej liczbie dziesiętnej x , po lewej stronie przecinka, znajduje się tylko cyfra zero (albo ogólniej — jeżeli po lewej stronie przecinka znajdują się tylko same zera), to rozważana liczba dziesiętna jest ułamkiem właściwym (i zowie się tedy **ułamkiem dziesiętnym**); jeżeli zaś cyfry po lewej stronie przecinka, uważane niezależnie od przecinka i cyfr po prawej jego stronie, przedstawiają łącznie pewną liczbę całkowitą a , od zera odmienną, to część całkowita rozważanej liczby dziesiętnej x równa się liczbie a , a ułamek dziesiętny, w który przeszłaby liczba x , gdybyśmy zastąpili cyfry po lewej stronie przecinka, przez zero, — ten ułamek właściwy, po dodaniu którego do liczby a , uzyskalibyśmy samą liczbę x .*

Dowód na to twierdzenie jest bardzo prosty. Oznaczmy przez x pewną liczbę dziesiętną, a przez 10^k jej mianownik. Jeżeli po lewej stronie przecinka mamy tylko same zera, to licznik jest liczbą całkowitą, której właściwa liczba cyfr równa się co najwyżej liczbie k , i która zatem mniejsza jest od mianownika 10^k . W tym więc przypadku rozważana liczba dziesiętna jest rzeczywiście ułamkiem właściwym czyli ułamkiem dziesiętnym. Zwróćmy się teraz do przypadku, kiedy cyfry po lewej stronie przecinka w pewnej liczbie dziesiętnej x przedstawiają łącznie, po usunięciu cyfr po prawej stronie przecinka i samego przecinka, pewną, od zera odmienną liczbę całkowitą a . Jeżeli tedy oznaczmy przez 10^k mianownik, a przez b liczbę, którą przedstawiałyby łącznie cyfry po prawej stronie przecinka po usunięciu cyfr najpierw uważanych i samego przecinka, to mamy

$$x = \frac{a \cdot 10^k + b}{10^k} = a + \frac{b}{10^k},$$

gdzie b przedstawia liczbę o k cyfrach (ewentualnie w szerszem znaczeniu). Z uzyskanego wzoru na x wynika oczywiście, że i druga część twierdzenia jest uzasadniona.

§ 49. Z twierdzenia I-szego z paragrafu poprzedzającego i ogólnej teorii liczb ułamkowych wysnuwamy z łatwością na kombinowanie liczb dziesiętnych drogą dodawania i odejmowania regułę następującą: jeżeli nie wszystkie liczby, mające ułedz jednemu albo obu ze wspomnianych działań, mają równą liczbę cyfr po prawej stronie przecinka, jeżeli więc nie wszystkie ich mianowniki są sobie równe, to równość mianowników urzeczywistnimy przez to, iż drogą dopisywania zer po prawej stronie tych liczb dziesiętnych, które po prawej stronie przecinka mniej mają cyfr od innych, zrównyamy liczby cyfr po prawej stronie przecinków w rozważanych liczbach dziesiętnych; po tem przekształceniu wykonywamy działanie tak, jak gdyby chodziło o liczby całkowite, w które przeszłyby rozważane liczby dziesiętne przez usunięcie przecinków, a w wyniku, tą drogą uzyskanym, kładziemy przecinek w ten sposób, ażeby liczba cyfr po prawej stronie przecinka równała się tej liczbie cyfr, którą znajdujemy po prawej stronie przecinka w każdej z liczb dziesiętnych danych po przekształceniu, wspomnianem przed chwilą. Liczba ułamkowa uzyskana tą drogą przedstawia właśnie sumę, o wyznaczenie której chodziło.

W praktyce rachunkowej opuszczamy przy dodawaniu i odejmowaniu liczb dziesiętnych te zera, których dopisywanie stanowi akt sprowadzania rozważanych liczb dziesiętnych do wspólnego mianownika.

Na podstawie znanego prawidła mnożenia liczb ułamkowych i znanych własności potęg iloczyn jakiegokolwiek liczby liczb dziesiętnych równa się liczbie dziesiętnej, której licznik równa się iloczynowi liczników rozważanych czynników, a mianownik — potędzie liczby 10 o wykładniku równym sumie wykładników tych potęg liczby 10, które stanowią odpowiednio mianowniki liczb dziesiętnych, mających ułedz mnożeniu. Stąd reguła następująca:

Żeby wyznaczyć iloczyn jakiegokolwiek liczby liczb dziesiętnych, wykonywamy najpierw działanie tak, jak gdyby chodziło o iloczyn liczb całkowitych, na które zamieniłyby się rozważane liczby dziesiętne, gdybyśmy pousuwali przecinki. W uzyskanym iloczynie kładziemy przecinek tak, żeby liczba cyfr po prawej stronie przecinka równała się sumie liczb cyfr położonych po tejże samej stronie przecinka w rozważanych liczbach dziesiętnych. Uzyskana liczba dziesiętna przedstawia tedy iloczyn, o który chodziło.

Reguły, które podaliśmy na wykonywanie dodawania, odejmowania i mnożenia liczb dziesiętnych, zachowują swą wartość nawet i w tym razie, kiedy pośród liczb, mających ułedz działaniu, znajdują się nie tylko same liczby dziesiętne, ale także i liczby całkowite; należy tylko uważać liczby całkowite jako liczby dziesiętne, w których liczba cyfr po prawej stronie przecinka równa się zeru.

Dzielenie liczb dziesiętnych, zarówno zresztą jak i każde inne z działań zasadniczych na tych liczbach, możemy oczywiście wykonać na podstawie ogólnej teorii liczb ułamkowych; ponieważ jednak, w przeciwieństwie do tego, co zachodzi przy innych działaniach zasadniczych, dzielenie liczb dziesiętnych nie zawsze prowadzi do liczby dziesiętnej, przeto odkładamy bliższe omówienie tego działania na liczbach dziesiętnych do chwili późniejszej.

§ 50. W celu łatwiejszego wysławiania się w dalszym ciągu, poświęcamy obecny paragraf definicyi pewnych wyrażeń.

Oznaczając ogólnie przez c_i jedną, od wartości wskaźnika i zależną cyfrę z układu następującego:

$$(4) \quad 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

możemy oczywiście przedstawić każdą liczbę całkowitą lub dziesiętną L przez wzór następujący:

$$(5) \quad L = \frac{c_n \cdot 10^{n-1} + c_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_2 \cdot 10 + c_1}{10^k},$$

zakładając naturalnie, że liczby całkowite n i k , oraz cyfry

$$(6) \quad c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1$$

zostały stosownie dobrane.

Ze wzoru (5) mamy

$$(7) \quad L = c_n \cdot \frac{10^{n-1}}{10^k} + c_{n-1} \cdot \frac{10^{n-2}}{10^k} + \dots + c_2 \cdot \frac{10}{10^k} + c_1 \cdot \frac{1}{10^k}.$$

Wzór ten przedstawia liczbę L w postaci sumy iloczynów, z których każdy jest iloczynem jednej z cyfr (4) przez czynnik postaci

$$(8) \quad \frac{10^\alpha}{10^\beta},$$

gdzie α i β oznaczają dwie liczby całkowite.

Uwaga powyższa nie traci swej wartości nawet w stosunku do składnika

$$c_1 \cdot \frac{1}{10^k},$$

gdyż mamy

$$\frac{1}{10^k} = \frac{10^0}{10^k}.$$

Każdemu wyrażeniu postaci (8) nadamy nazwę jednostki dziesiętnej o wartości równej ilorazowi czyli liczbie ułamkowej (8). Gdybyśmy mieli $\alpha \geq \beta$, to moglibyśmy iloraz (8) przedstawić w postaci prostszej

$$10^{\alpha-\beta};$$

gdybyśmy zaś mieli $\alpha < \beta$, to wartość ilorazu (8) równałaby się ułamkowi

$$\frac{1}{10^{\beta-\alpha}}.$$

Żeby jednak mieć możność objęcia wszystkich możliwych przypadków jednym wzorem, zachowamy na jednostkę dziesiętną wyrażenie (8) w tej postaci, w jakiej je napisaliśmy.

We wzorze (7) którakolwiek c_i z cyfr układu (6) jest jednym ze współczynników takiego iloczynu dwóch czynników, w którym drugi równa się jednostce dziesiętnej

$$\frac{10^{i-1}}{10^k};$$

z tej przyczyny zowiemy cyfrę c_i cyfrą jednostek dziesiętnych wartości $\frac{10^{i-1}}{10^k}$ w liczbie dziesiętnej L .

Iloczyn albo iloraz jakiejkolwiek jednostki dziesiętnej przez jakąkolwiek potęgę liczby dziesięć równa się oczywiście zawsze znowu pewnej jednostce dziesiętnej; odwrotnie, każda jednostka dziesiętna przedstawiona być może stosownie do życzenia w postaci iloczynu lub ilorazu każdej innej przez stosownie dobraną potęgę liczby 10.

Żeby wyrazić, że pomiędzy dwiema nierównymi sobie jednostkami dziesiętnymi

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} \text{ i } \frac{10^{\alpha'}}{10^{\beta'}}$$

zachodzi związek postaci

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} = 10^p \cdot \frac{10^{\alpha'}}{10^{\beta'}}$$

orzekamy, że jednostka

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

jest o p jedności niższego rzędu od jednostki

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

lub poprzedza ją o p rzędów; to samo wyrażamy także, orzekając, że jednostka

$$\frac{10^{\alpha'}}{10^{\beta'}}$$

jest o p jedności wyższego rzędu od jednostki

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

lub następuje po niej w p -tym rzędzie. Liczba p zowie się różnicą rzędów rozważanych jednostek dziesiętnych.

W razie równości

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{10^{\alpha'}}{10^{\beta'}}$$

orzekamy, że jednostki dziesiętne $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ i $\frac{10^{\alpha'}}{10^{\beta'}}$ są równorzędne.

Na podstawie definicyi poprzedzających jednostki coraz wyższych rzędów mają wartości coraz mniejsze.

Żeby wyrazić, że w pewnej liczbie dziesiętnej x pewna cyfra c jest cyfrą jednostek o p jedności niższego rzędu od jednostek, których cyfrą jest pewna cyfra c' , orzekamy, że w liczbie x cyfra c poprzedza cyfrę c' o p rzędów lub jest o p jedności niż-

szego rzędu od cyfry c' . To samo wyrażamy także, orzekając, że cyfra c' jest o p jedności wyższego rzędu od cyfry c , albo następuje w p -tym rzędzie po tej cyfrze. Liczba p zowie się różnicą rzędów cyfr c i c' .

Cyframi równorzędnymi w dwóch liczbach dziesiętnych nazywamy cyfry jednostek równorzędnych; jeżeli w pewnej liczbie dziesiętnej x pewna cyfra c jest cyfrą jednostek o p jedności niższego rzędu od rzędu jednostek, których cyfrą w pewnej innej liczbie dziesiętnej x' jest pewna cyfra c' , to orzekamy, że cyfra c liczby x jest o p jedności niższego rzędu od cyfry c' liczby x' , albo, że cyfra c' liczby x' jest o p jedności wyższego rzędu od cyfry c liczby x .

Zamiast wyrażenia „cyfra jednostek oznaczonej wartości w liczbie dziesiętnej x “ posługiwać się będziemy wyrażeniem „cyfra jednostek oznaczonego rzędu“.

Oznaczmy przez x jakąkolwiek liczbę dziesiętną, przedstawioną przez symbol specyficzny liczb dziesiętnych, określony w paragrafie poprzedzającym, a przez c jedną z cyfr tego symbolu; oznaczmy nadto przez p liczbę cyfr pomiędzy cyfrą c a przecinkiem, umawiając się przytem, że przyjęlibyśmy na liczbę p wartość zero, gdyby cyfra c położona była bezpośrednio przy przecinku. Oczywiście dwa tylko przypadki wydarzyć się mogą:

1°. Cyfra c położona jest po lewej stronie przecinka. W takim razie cyfra c jest, na podstawie definicyi podanej na początku obecnego paragrafu, cyfrą jednostek wartości

$$10^p$$

w liczbie x .

2°. Cyfra c położona jest po prawej stronie przecinka. W takim razie cyfra c jest oczywiście cyfrą jednostek wartości

$$\frac{1}{10^{p+1}}$$

liczby x .

Uważajmy i nadal literę x jako oznaczającą pewną liczbę dziesiętną, przedstawioną w postaci symbolu specyficznego liczb dziesiętnych. W takim razie pośród cyfr liczby x znajdzie się pewna cyfra c najniższego rzędu, która będzie cyfrą jednostek dziesiętnych największej wartości, i pewna cyfra c' rzędu najwyższego,

która znów będzie cyfrą jednostek dziesiętnych najmniejszej wartości. Jeżeli tedy oznaczymy przez

$$(9) \quad \frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

pewną jednostkę dziesiętną, to cyfra jednostek dziesiętnych tej wartości w liczbie x będzie mogła nie istnieć. Ponieważ jednak możemy na podstawie tw. I-go z paragrafu poprzedzającego, dopisać po lewej lub po prawej stronie liczby x dowolną liczbę zer, nie powodując przez to żadnej zmiany wartości rozważanej liczby dziesiętnej, przeto symbolowi specyficznemu takiej liczby dziesiętnej, która ma pewną oznaczoną wartość, możemy zawsze nadać taką postać, ażeby istniała cyfra jednostek dziesiętnych wartości (9), jakiegokolwiek byłyby a priori dane wartości na liczby całkowite α i β . Cyfrę, którą w taki sposób uzyskamy na cyfrę jednostek wartości (9) (i która w takim razie oczywiście równać się będzie zeru), nazywamy cyfrą jednostek dziesiętnych wartości (9) w rozważanej liczbie dziesiętnej.

Na podstawie definicyi tej możemy mówić o cyfrze jednostek dziesiętnych, oznaczonej wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$, w pewnej liczbie dziesiętnej x , jako o rzeczy najzupełniej oznaczonej nawet i w tym razie, kiedy symbol specyficzny liczby dziesiętnej x w takiej postaci jest napisany, iż cyfra jednostek dziesiętnych rozważanej wartości do symbolu tego nie wchodzi.

Uważajmy dwie liczby dziesiętne x i x' i załóżmy, że nie każda cyfra jednej równa się cyfrze równorzędnej drugiej. W takim razie istnieć będą dwie takie nierówne sobie cyfry równorzędne c i c' , należące odpowiednio do liczb x i x' , że każde dwie równorzędne, niższego od cyfr c i c' rzędu cyfry liczb x i x' będą równe sobie. Przy tych oznaczeniach mamy twierdzenie następujące:

I. *W razie nierówności*

$$(10) \quad c < c'$$

zachodzić będzie nierówność

$$(11) \quad x < x',$$

a w razie nierówności

$$(12) \quad c > c'$$

— nierówność

$$(13) \quad x > x',$$

Istotnie, możemy oczywiście liczby x i x' przedstawić w takiej postaci, żeby liczby cyfr położonych po lewych i prawych stronach przecinków były w liczbach tych równe sobie odpowiednio.

Zakładając, że warunek ten jest spełniony, będziemy mogli przedstawić liczby x i x' przez wzory następujące:

$$x = a_n \frac{10^{\alpha+n}}{10^{\beta}} + a_{n-1} \frac{10^{\alpha+n-1}}{10^{\beta}} + \dots + a_1 \frac{10^{\alpha+1}}{10^{\beta}} + c \cdot \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta}} +$$

$$+ b_1 \cdot \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+1}} + b_2 \cdot \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+2}} + \dots + b_p \cdot \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+p}}$$

$$x' = a_n \frac{10^{\alpha+n}}{10^{\beta}} + a_{n-1} \frac{10^{\alpha+n-1}}{10^{\beta}} + \dots + a_1 \frac{10^{\alpha+1}}{10^{\beta}} + c' \cdot \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta}} +$$

$$+ b'_1 \cdot \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+1}} + b'_2 \cdot \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+2}} + \dots + b'_p \cdot \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+p}},$$

gdzie oznaczyliśmy przez $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, b_1, b_2, \dots, b_p, b'_1, b'_2, \dots, b'_p$ cyfry rozważanych liczb dziesiętnych.

Ze wzorów poprzedzających mamy:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+p}} C \\ x' &= \frac{10^{\alpha}}{10^{\beta+p}} C', \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

gdzie przyjęliśmy:

$$C = a_n 10^{n+p} + a_{n-1} 10^{n+p-1} + \dots + a_1 \cdot 10^{p+1} + c \cdot 10^p +$$

$$+ b_1 \cdot 10^{p-1} + b_2 \cdot 10^{p-2} + \dots + b_p,$$

$$C' = a_n \cdot 10^{n+p} + a_{n-1} \cdot 10^{n+p-1} + \dots + a_1 10^{p+1} + c' \cdot 10^p +$$

$$+ b'_1 \cdot 10^{p-1} + b'_2 \cdot 10^{p-2} + \dots + b'_p.$$

Liczby C i C' są oczywiście liczbami całkowitemi, a ze wzorów poprzedzających i z teoryi numeracyi dziesiętnej wynika, że nierówność (10) pociągałaby za sobą nierówność

$$C < C',$$

a nierówność (12), nierówność

$$C > C'.$$

Zatem, na podstawie wzorów (14), nierówność (10) pociągałaby za sobą (11), a nierówność (12) — związek (13).

Na tem właśnie polega twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Z twierdzenia poprzedzającego wynika bezpośrednio twierdzenie następujące:

II. *Dwie liczby dziesiętne w takim i tylko w takim razie są sobie równe, kiedy każda cyfra jednej równa się cyfrze równorzędnej drugiej.*

Uważajmy jakąkolwiek liczbę dziesiętną x i jakąkolwiek jednostkę dziesiętną

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta}.$$

Określiliśmy wyżej, co należy rozumieć przez cyfrę jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ liczby x . Obecnie pragniemy określić wyrażenie „liczba jednostek“ wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$. W tym celu zważmy, że liczbę x możemy zawsze przedstawić przez wzór następujący:

$$x = a_n \frac{10^{\alpha+n}}{10^\beta} + a_{n-1} \frac{10^{\alpha+n-1}}{10^\beta} + \dots + a_1 \frac{10^{\alpha+1}}{10^\beta} + a_0 \frac{10^\alpha}{10^\beta} + \\ + b_1 \frac{10^\alpha}{10^{\beta+1}} + \dots + b_k \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}}$$

skąd

$$x = \{a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} \dots + a_1 \cdot 10 + a_0\} \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} + x',$$

przyjmując

$$x' = b_1 \frac{10^\alpha}{10^{\beta+1}} + \dots + b_k \frac{10^\alpha}{10^{\beta+k}} = \left(\frac{b_1}{10} + \dots + \frac{b_k}{10^k} \right) \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}.$$

Liczba całkowita

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} \dots + a_1 10 + a_0$$

zowie się liczbą jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ w liczbie x , a liczba dziesiętna x' — odnośną resztą. Mamy oczywiście

$$x' < \frac{10^\alpha}{10^\beta}.$$

Liczba jednostek rzędu $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ liczby dziesiętnej x jest oczywiście całkowita część liczby ułamkowej, która przedstawia iloraz podziału liczby x przez rozważaną jednostkę dziesiętną, a iloczyn części właściwie ułamkowej tego ilorazu przez $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ równa się oczywiście odnośnej reszcie czyli liczbie x' .

Przedstawiając liczbę dziesiętną x przez symbol specyficzny liczby dziesiętnej, możemy oczywiście wyznaczyć liczbę jednostek oznaczonego rzędu w liczbie x w sposób następujący:

III. Po odszukaniu w liczbie dziesiętnej x cyfry c jednostek rzędu, o który chodzi, usuwamy przecinek i wszystkie cyfry, położone po prawej stronie cyfry c ; symbol tą drogą uzyskany przedstawia oczywiście tę właśnie liczbę całkowitą, która jest liczbą jednostek rozważanego rzędu w liczbie x .

§ 51. Ponieważ ze stanowiska techniki rachunkowej dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb dziesiętnych prostszem jest od wykonywania tychże działań na liczbach wymiernych jakichkolwiek, przeto powstaje pytanie, czy nie moglibyśmy zastąpić każdej liczby wymiernej przez liczbę ułamkową.

Ponieważ każda liczba całkowita może być uważaną za liczbę dziesiętną, przeto winniśmy tylko rozważyć przypadek, kiedy chodzi o to, ażeby zastąpić daną liczbę ułamkową nieprzywiedlną

$$\frac{m}{p},$$

której mianownik nie jest potęgą o wykładniku całkowitym liczby 10, przez liczbę dziesiętną.

Gdyby pewna liczba dziesiętna

$$\frac{l}{10^k}$$

sprawdzała równość

$$\frac{l}{10^k} = \frac{m}{p},$$

to ze względu na to, iż liczba $\frac{m}{p}$ jest liczbą ułamkową nieprzywiedlną, mielibyśmy (§ 36)

$$\begin{aligned} l &= m \cdot \lambda \\ 10^k &= p \cdot \lambda, \end{aligned}$$

oznaczając przez λ pewną liczbę całkowitą. Zatem, liczba p musiałaby być dzielnikiem liczby 10^k . Ponieważ zaś, rozkładając liczbę 10^k na czynniki pierwsze, otrzymujemy

$$10^k = 2^k \cdot 5^k,$$

przeto na podstawie znanego twierdzenia ¹⁾ mielibyśmy

$$p = 2^\alpha \cdot 5^\beta,$$

oznaczając przez α i β pewne dwie liczby całkowite.

Zatem, żeby istniała liczba dziesiętna, równa danej liczbie ułamkowej nieprzywiedlnej, koniecznem jest, żeby mianownik tej liczby nie posiadał żadnych innych, od jedności większych dzielników pierwszych, prócz tylko dzielników 2 i 5.

Warunek ten jest wystarczający: jeżeli bowiem na mianownik p pewnej liczby ułamkowej

$$\frac{m}{p}$$

mamy wzór

$$p = 2^\alpha \cdot 5^\beta,$$

to, gdyby nie zachodziła równość

$$\alpha = \beta,$$

gdyby więc rozważana liczba ułamkowa liczbą dziesiętną nie była, moglibyśmy, mnożąc przez stosowną potęgę jednej z liczb 2 lub 5 licznik i mianownik rozważanej liczby, wyznaczyć liczbę dziesiętną, równą tej liczbie ułamkowej.

Z powyższego wywodu wynika, że wogóle nie istnieje liczba dziesiętna, równa danej liczbie ułamkowej. Nie należy jednak z tego wnioskować, że w rachunkach liczbowych nie możemy wogóle zastępować liczb ułamkowych zwykłych przez liczby dziesiętne, a to z przyczyny następującej: w rachunkach liczbowych dokładność bezwzględna jest z reguły zbędna; chodzi tylko o to, żeby błędy nie przekraczały pewnych granic. Przekonamy się, że jakkolwiek małą byłaby pewna dana liczba ε , od zera większa, zawsze możemy dobrać do danej liczby ułamkowej $\frac{m}{p}$ taką liczbę dziesiętną x , ażeby różnica liczb x i $\frac{m}{p}$ mniejsza była od ε , tem sa-

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych, str. 156, tw. V.

mem upewniamy się, że w rachunkach liczbowych możemy wogóle zastępować liczby ułamkowe jakiekolwiek przez liczby dziesiętne,

Wogóle, żeby wyrazić, iż dwie liczby x i x' sprawdzają związki $x \leq x'$ oraz $x' - x < \varepsilon$, gdzie oznaczyliśmy przez ε pewną trzecią liczbę, orzekamy, że liczba x przedstawia w przybliżeniu liczbę x' z niedoborem mniejszym od ε , albo, że liczba x' przedstawia liczbę x z nadmiarem mniejszym od ε . Pragnąc wyrazić tylko, że różnica dwóch liczb mniejsza jest od pewnej trzeciej liczby, orzekamy, że każda z nich przedstawia drugą z błędem mniejszym od ε .

Zwróćmy się do zagadnienia następującego: oznaczając przez w daną liczbę dziesiętną, przez p daną liczbę całkowitą od zera odmienną, a przez

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

daną jednostkę dziesiętną, wyznaczyć liczbę dziesiętną x , sprawdzającą warunki następujące:

1°. Najwyższego rzędu cyfra liczby x , mogąca jeszcze być od zera odmienną, jest cyfra jednostek wartości

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} \quad (15)$$

2°. Liczba x sprawdza związki:

$$\left. \begin{aligned} x &\leq w : p \\ x + \frac{10^\alpha}{10^\beta} &> w : p. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wogóle, jeżeli pewna liczba dziesiętna x , sprawdzająca warunek 1° czyni jeszcze zadość związkom

$$x \leq L \quad \text{ i } \quad x + \frac{10^\alpha}{10^\beta} > L,$$

analogicznym do związków (16), i w których L przedstawia liczbę w jakimkolwiek sposób oznaczoną, to orzekamy, że liczba dziesiętna x przedstawia aż do cyfry jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ doprowadzoną wartość przybliżoną liczby L .

Czynność, polegająca na wyznaczeniu liczby x przy danych wartościach liczby L i jednostki dziesiętnej $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$, zowie się krótko przemianą liczby L na liczbę dziesiętną. Jeżeli istnieje pewna liczba dziesiętna, która równa się dokładnie liczbie L , to orzekamy, że liczba L może być przekształcona, albo przemieniona dokładnie na liczbę dziesiętną.

Żeby rozwiązać problem przemiany wyrażenia $w:p$ na liczbę dziesiętną, zważmy, że liczby x i w możemy przedstawić w postaciach następujących:

$$(17) \quad \begin{cases} x = X \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} \\ w = W \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} + w' \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}, \end{cases}$$

gdzie oznaczyliśmy przez X liczbę jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ w liczbie x , przez W liczbę jednostek tejże wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ w liczbie w , a przez w' liczbę ułamkową, która w każdym razie sprawdza nierówność

$$(18) \quad w' < 1.$$

Podstawiając wartości (17) i (18) na x i w do związków

$$\begin{aligned} x \cdot p &\leq w \\ x \cdot p + \frac{10^\alpha}{10^\beta} \cdot p &> w, \end{aligned}$$

które równoważne są związkom (16), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} X \cdot p \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} &\leq W \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} + w' \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} \\ (X+1) \cdot p \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} &> W \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} + w' \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}, \end{aligned}$$

którymto związkom równoważne są związki:

$$(19) \quad \begin{cases} X \cdot p \leq W + w' \\ (X+1)p > W + w'. \end{cases}$$

Powiadam, że związki (19) równoważne są następującym:

$$(20) \quad \begin{cases} X \cdot p \leq W \\ (X+1) \cdot p > W. \end{cases}$$

Istotnie, załóżmy, że związki (19) zachodzą. Drugi ze związków (20) jest oczywiście następstwem drugiego ze związków (19), że zaś pierwszy ze związków (19) pociąga za sobą pierwszy ze związków (20), o tem przekonywamy się natychmiast, zważywszy, iż liczby X , p i W są liczbami całkowitemi, a liczba w' — ułamkiem właściwym, skąd wynika, że gdybyśmy mieli

$$X \cdot p > W,$$

to różnica $X \cdot p - W$ równałaby się przynajmniej jedności i z tego powodu, wbrew założeniu, pierwszy ze związków (19) nie zachodziłby. Stwierdzilibyśmy w sposób całkiem analogiczny, że związki (19) stanowią konieczne następstwo założenia, iż związki (20) zachodzą. Ostatecznie związki (20) i (19) są rzeczywiście równoważne. Ale związki (19) równoważne są związkom (16). Zatem związki (20) także są równoważne związkom (16), a ponieważ związki (20) wyrażają, że liczba X jest całkowitą częścią ilorazu podziału liczby W przez liczbę p , przeto uwzględniając definicyę liczb X i W , dochodzimy do twierdzenia następującego:

I. *Zagadnienie, polegające na wyznaczeniu aż do cyfry jednostek danej wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ doprowadzonej wartości przybliżonej x ilorazu danej liczby dziesiętnej w przez daną liczbę całkowitą, od zera odmienną p , posiada zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie, które równa się liczbie dziesiętnej, równej iloczynowi*

$$X \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta},$$

gdzie oznaczyliśmy przez X całkowitą część ilorazu podziału liczby W jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ w liczbie w przez liczbę p .

Twierdzenie powyższe poucza nas nie tylko o tem, że problem postawiony wyżej zawsze posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie, ale oczywiście wyraża jeszcze regułę techniczną do rzeczywistego rozwiązania tego problemu. Gdyby jednak chodziło o udowodnienie tylko tego, że problem ten posiada zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie, to moglibyśmy poprzestać na ogólnem twierdzeniu następującem:

II. *Jakąkolwiek liczbę (wymierną) oznaczylibyśmy przez L , to jest liczbę, która mogłaby nie być daną bezpośrednio, albo tylko jako wynik*

wykonania pewnego układu działań na liczbach danych bezpośrednio zawsze istnieje jedna i tylko jedna liczba dziesiętna x , która w znaczeniu określonym wyżej przedstawia aż do cyfry jednostek danej wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ doprowadzoną wartość przybliżoną liczby L .

Dowód twierdzenia tego bardzo jest prosty: oznaczając przez X liczbę jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ w liczbie x , mamy, na podstawie definicji liczby x , związki następujące:

$$(21) \quad x = X \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

$$(22) \quad \begin{cases} X \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} \leq L \\ (X+1) \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta} > L. \end{cases}$$

Równości (22) oczywiście równoważne są równościami następującym:

$$X \leq \frac{10^\beta}{10^\alpha} \cdot L$$

$$(X+1) > \frac{10^\beta}{10^\alpha} \cdot L.$$

Równości te wyrażają, że liczba całkowita X (dla której wartość 0 nie jest wykluczona) największą jest liczbą całkowitą, nie większą od iloczynu

$$\frac{10^\beta}{10^\alpha} \cdot L.$$

Z tego wynika, że istnieje jedna, ale tylko jedna taka wartość na liczbę całkowitą X , przy której zachodzą związki (22). Zatem zgodnie z brzmieniem twierdzenia, istnieje jedna i tylko jedna wartość na x , która czyni zadość warunkom zadania.

Ponieważ, jakkolwiek małą, byle od zera odmienną, byłaby dana liczba ε , możemy zawsze wyznaczyć liczby całkowite α i β tak, żebyśmy mieli

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} \leq \varepsilon,$$

przeto na podstawie twierdzenia poprzedzającego istnieje zawsze taka liczba dziesiętna x , która przedstawia jakąkolwiek daną liczbę L z nie-

doborem mniejszym od dowolnie naprzód danej, byle od zera większej liczby ε ; nadto, w razie potrzeby, możliwem jest wyznaczyć taką liczbę dziesiętną d , żeby ona przedstawiała liczbę L z nadmiarem mniejszym od ε : w razie nierówności $x < L$ możemy przyjąć $d = x + \frac{10^a}{10^b}$, gdyby zaś zachodziła równość $x = L$, to moglibyśmy przyjąć $d = x$.

Zatem, jeżeli o bezwzględną dokładność nie chodzi, to możemy zastąpić każdą liczbę przez liczbę dziesiętną.

W razie, kiedy liczba L oznaczona jest jako iloraz podziału danej liczby dziesiętnej przez liczbę całkowitą, od zera odmienną, a więc w szczególności i w razie, kiedy liczba L jest daną liczbą ułamkową jakąkolwiek, posiadamy, jakśmy już powiedzieli wyżej, na podstawie twierdzenia I-szego, regułę rachunkową do rzeczywistego wyznaczenia liczby dziesiętnej x , przedstawiającej wartość przybliżoną liczby L , doprowadzoną do cyfry jednostek jakiejkolwiek danej wartości $\frac{10^a}{10^b}$. Obecnie zamierzamy bliżej zbadać przypadek,

w którym liczba L oznaczona jest jako iloraz podziału danej liczby dziesiętnej y przez inną daną liczbę dziesiętną z . Oznaczając przez a i p liczniki liczb y i z a przez 10^n i 10^k ich mianowniki, mamy

$$y = \frac{a}{10^n}, \quad z = \frac{p}{10^k},$$

skąd

$$y : z = \frac{a \cdot 10^k}{p \cdot 10^n}. \quad \left. \vphantom{\frac{a \cdot 10^k}{p \cdot 10^n}} \right\} \quad (23)$$

Z równości tej wynika, że zgodnie z uwagą podaną przy końcu § 49-go i w przeciwieństwie do tego, co zachodzi w razie, kiedy dwie liczby dziesiętne kombinujemy ze sobą drogą dodawania, odejmowania lub mnożenia, iloraz liczb dziesiętnych nie zawsze może być dokładnie przedstawiony w postaci liczby dziesiętnej, albowiem po sprowadzeniu liczby ułamkowej

$$\frac{a \cdot 10^k}{p \cdot 10^n}$$

do postaci nieprzywiedlnej, może oczywiście się zdarzyć, że mianownik będzie podzielny przez liczbę pierwszą, od jedności większą i odmienną od każdej z liczb 2 i 5.

Na podstawie tw. I-szego z § 48-go, możemy, bez szkody dla ogólności założyć, że mamy

$$n \geq k.$$

Przyjawszy to założenie, możemy oczywiście równości (23) nadać postać następującą:

$$(24) \quad y : z = w : p,$$

przyjmując

$$w = \frac{a}{10^{n-k}}.$$

Mamy więc twierdzenie następujące:

III. *Iloraz podziału oznaczonej liczby dziesiętnej y przez drugą, naturalnie od zera odmienną liczbę dziesiętną z , równa się ilorazowi podziału przez licznik p liczby z , tej liczby dziesiętnej w , którą uzyskujemy w sposób następujący: nadawszy, gdyby okoliczność ta już nie zachodziła sama przez się, dzielnej y taką postać, żeby liczba cyfr po prawej stronie przecinka nie była mniejsza od liczby cyfr po prawej stronie przecinka w dzielniku, posuwamy w niej przecinek ku prawej tak, ażeby liczba cyfr po prawej stronie przecinka równała się różnicy liczb cyfr po prawej stronie przecinków w dzielniku i dzielnej; symbol taką drogą uzyskany przedstawiać będzie właśnie liczbę w , o którą chodzi.*

Na podstawie powyższego twierdzenia, problem wyznaczenia liczby dziesiętnej, przedstawiającej wartość przybliżoną ilorazu dwóch liczb dziesiętnych, doprowadzoną aż do cyfry jednostek dziesiętnych danej wartości, sprowadzony jest oczywiście do przypadku objętego regułą, wyrażoną w postaci tw. I-szego.

Z natury rzeczy wyłania się obecnie pytanie następujące: jakie szczególne okoliczności zachodzą w tym przypadku, kiedy rozważać będziemy liczbę dziesiętną x , przedstawiającą aż do cyfry jednostek oznaczonej wartości $\frac{10^a}{10^b}$ doprowadzoną wartość przybliżoną takiej liczby L , która sama równa się dokładnie oznaczonej liczbie dziesiętnej d ?

Oznaczając przez a liczbę jednostek wartości $\frac{10^a}{10^b}$ w liczbie d , a przez l pewną liczbę dziesiętną od jedności mniejszą, mamy:

$$L = d = a \cdot \frac{10^a}{10^b} + l \cdot \frac{10^a}{10^b}.$$

Mamy zatem

$$L \geq a \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

oraz

$$L < (a + 1) \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}$$

ze względu na to, iż liczba l jest od jedności mniejsza. Ze związków tych wynika, że ta jedyna wartość na x , która warunkom zadania czyni zadość, jest następująca.

$$x = a \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta}.$$

a ponieważ w razie, gdyby w liczbie dziesiętnej d cyfry rzędów wyższych od cyfry jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ równały się zeru, mielibyśmy

$$l = 0,$$

przeto, możemy jeszcze dodać, że w tym razie mielibyśmy

$$x = d,$$

a więc i

$$x = L.$$

Uwzględniając tw. III-cie z § 50-go możemy przedstawić uzyskane wyniki w postaci twierdzenia następującego:

IV. Jeżeli pewna liczba L równa się dokładnie pewnej znanej nam liczbie dziesiętnej d , to liczba dziesiętna x , która przedstawia przybliżoną wartość liczby L , doprowadzoną aż do cyfry jednostek danej wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$, może być uzyskana w sposób następujący: wyszukujemy w liczbie d cyfrę c jednostek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ i zastępujemy następnie w liczbie d wszystkie cyfry po prawej stronie cyfry c zerami; liczba dziesiętna tą drogą uzyskana jest właśnie liczbą x , o którą chodziło; w razie, kiedy w liczbie d cyfry rzędów wyższych od cyfry c równe są zeru, mamy oczywiście

$$x = d.$$

§ 52. Zamianie oznaczonej liczby L na liczbę dziesiętną towarzyszą pewne okoliczności ważne i zajmujące. Żeby okoliczności