

łanie (D) posiada własność przemienności w razie, kiedy dwa elementy działaniu podlegają, przeto działanie to (tw. II) posiada własność przemienności w przypadku najogólniejszym.

Ostatecznie więc, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, działanie (D) posiada własności łączności i przemienności bez względu na liczbę elementów, podlegających działaniu.

U w a g a. W razie przemienności pewnego działania (D) typu (T) własność łączności zachodzi w szerszem znaczeniu, aniżeliśmy wyraz ten określili wyżej, mianowicie: w razie przemienności działania (D) możemy zastąpić, nie sprowadzając zmiany w wyniku, którekolwiek z elementów, działaniu podlegających, przez wynik wykonanego działania (D) na tych elementach. Dodajemy, iż stąd wypływa, że którykolwiek z elementów a , podlegających działaniu (D), możemy bez wywoływania zmiany w wyniku zastąpić przez dowolną liczbę elementów zbioru (Z) tak dobranych, żeby wynik wykonania działania (D) na tych elementach równał się elementowi a .

§ 29. Oznaczając w dalszym ciągu przez (D) pewne działanie typu (T), a przez $F(a, b)$ wynik wykonania tego działania na dwóch elementach a i b odpowiedniego zbioru (Z) uważając przytem element a za pierwszy, a element b za drugi, przyjmijmy

$$c = F(a, b).$$

Możemy tedy rozważać zagadnienia, z których jedno polegałoby na wyznaczeniu elementu a , gdy znane są elementy b i c , a drugie — na tem, żeby wyznaczyć element b , kiedy znane są elementy a i c . Oczywiście, przy pewnych przynajmniej zastrzeżeniach, każde z tych zagadnień posiada jedno przynajmniej rozwiązanie. Zatem związek (1) prowadzi do określenia dwóch działań: jedno z nich δ_1 jest działaniem, którego wykonanie na elementach c i b dostarcza jako wynik element a , a drugie δ_2 określamy przez to, że wynik jego wykonania na elementach c i a jest element b .

Żeby definicya poprzedzająca była całkiem zgodna z ogólnem pojęciem działania, określonem na początku tego rozdziału, oczywiście koniecznem jest i wystarczajacem, ażeby w razie równości.

$$c = c' \text{ i } b = b'$$

równości następujące:

$$c = F(x, b)$$

i

$$c' = F(x, b')$$

były równoważne, a w razie równości

$$c = c' \text{ i } a = a',$$

żeby równoważne były równości

$$c = F(a, x)$$

i

$$c' = F(a', x).$$

Spostrzegamy natychmiast, że warunki te są zawsze spełnione, albowiem za jedną z podstaw naszych rozważań przyjęliśmy to założenie, iż równości

$$a = a' \text{ i } \beta = \beta'$$

pociągają zawsze za sobą równość

$$F(a, \beta) = F(a', \beta').$$

Wogóle działania δ_1 i δ_2 będą odmiennymi od siebie, niekoniecznie jednoznaczными działaniami, a każde z nich wykonalne będzie tylko w pewnych warunkach ograniczających co do wartości elementów, które mu podlegać będą miały. Każde z działań δ_1 i δ_2 zowie się działaniem odwrotnem do działania (D). Jeżeli jednak działanie (D) posiada własność przemienności, to nie istnieje już żadna różnica pomiędzy działaniami δ_1 i δ_2 , albowiem, w takim razie równania

$$c = F(b, a) \text{ i } c = F(b, a)$$

są sobie równoważne.

W rozważanym przypadku działania δ_1 i δ_2 stanowią pewne jedno i to samo działanie, które określić możemy jako działanie, mające na celu wyznaczenie jednego z dwóch elementów, podlegających działaniu (D) w razie, kiedy drugi element i wynik działania (D) są znane.

Ze względu na dalsze zastosowania podajemy tu dwa twierdzenia następujące:

I. Jeżeli przy pewnych wartościach elementu b , nierówność

$$a \neq a'$$

zawsze pociąga za sobą nierówność

$$F(a, b) \neq F(a', b),$$

to przy tych wartościach elementu b , działanie δ_1 jest w razie wykonalności działaniem jednoznaczem.

II. Jeżeli przy pewnych wartościach elementu a , nierówność

$$b \neq b'$$

zawsze pociąga za sobą nierówność

$$F(a, b) \neq F(a, b'),$$

to przy tych wartościach elementu a , działanie δ_2 jest, w razie wykonalności, działaniem jednoznaczem.

Twierdzenia poprzedzające różnią się oczywiście tylko pod względem oznaczeń, w których zostały wysłowione. Zatem, jeżeli uzasadnimy jedno z nich, to tem samem uzasadnimy i drugie. Przyjmijmy tedy założenia pierwszego z tych twierdzeń i załóżmy, że istnieje pewien element a , sprawdzający równanie

$$F(a, b) = c.$$

Jeżeli tedy oznaczmy przez a' jakikolwiek taki element, który sprawdza nierówność

$$(1) \quad a \neq a',$$

to element ten nie może sprawdzać równania

$$F(a', b) = c,$$

albowiem mielibyśmy w takim razie

$$F(a', b) = F(a, b),$$

a równość ta zostawałaby w sprzeczności z nierównością (1).

Zatem, przy uczynionych założeniach, działanie δ_1 , będzie rzeczywiście działaniem jednoznaczem.

§ 30. Teraz zamierzam wprowadzić pojęcie rozdzielnosci pewnego działania (Δ) w stosunku do pewnego innego działania (D) nie zakładając przytem, żeby działania (Δ) i (D) były koniecznie działaniami typu (T); przyjmujemy tylko, że rozważane działania są działaniami jednoznanymi, z których (Δ) obejmuje dwa elementy, a (D) przynajmniej dwa.

Oznaczmy przez $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ wynik wykonania działania (D) na pewnych elementach

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

uważanych w porządku, w którym je wymieniliśmy, i przyjmijmy symbol

$$\varphi(a, b)$$

za symbol wyniku wykonania działania (\triangle) na elementach a i b , gdy uważamy element a za pierwszy, a element b za drugi. Jeżeli, bez względu na wybór $(n+1)$ elementów a_1, a_2, \dots, a_n i m w zbiorze (Z) , dla którego działania (\triangle) i (D) są określone, zachodzą obie równości następujące:

$$\varphi(m, F(a_1, a_2, \dots, a_n)) = F(\varphi(m, a_1), \varphi(m, a_2), \dots, \varphi(m, a_n)) \quad (1)$$

oraz

$$\varphi(F(a_1, a_2, \dots, a_n), m) = F(\varphi(a_1, m), \varphi(a_2, m), \dots, \varphi(a_n, m)) \quad (2)$$

to w takim razie orzekamy, że działanie (\triangle) posiada własność rozdzielności w stosunku do działania (D) .

W przypadku szczególnym, kiedy działanie (\triangle) posiada własność przemienności, równości (1) i (2) są oczywiście równoważne; jeżeli więc zachodzi jedna, to zachodzi także i druga.

I. Jeżeli działanie (\triangle) posiada własność rozdzielności w stosunku do jakiegokolwiek działania (D) typu (T) w przypadku szczególnym, kiedy działanie (D) dwa tylko elementy obejmuje, to działanie (\triangle) posiada własność rozdzielności w stosunku do działania (D) , jakkolwiek liczbę n elementów obejmowałoby działanie (D) .

Istotnie, twierdzenie zachodzi, gdy mamy $n=2$, ponieważ właśnie zakładamy, że tak jest. Załóżmy chwilowo, że twierdzenie zachodzi jeszcze, kiedy mamy $n=p$ ($p \geq 2$) i rozważajmy przypadek, w którym mamy $n=p+1$. Mamy

$$F(a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}) = F(F(a_1, \dots, a_p), a_{p+1}),$$

albowiem działanie (D) jest typu (T) . Zatem

$$\begin{aligned} \varphi(m, F(a_1, \dots, a_p, a_{p+1})) &= \varphi(m, F(F(a_1, \dots, a_p), a_{p+1})) = \\ &= F(\varphi(m, F(a_1, \dots, a_p)), \varphi(m, a_{p+1})) \end{aligned} \quad (3)$$

z tej przyczyny, iż własność rozdzielności działania (\triangle) zachodzi, kiedy działanie (D) obejmuje dwa tylko elementy, którymi są obecnie

$$F(a_1, \dots, a_p) \text{ i } a_{p+1}.$$

Ponieważ zaś zakładamy, że w przypadku, kiedy mamy $n = p$, twierdzenie zachodzi, przeto mamy jeszcze:

$$\varphi(m, F(a_1, \dots, a_p)) = F(\varphi(m, a_1), \dots, \varphi(m, a_p));$$

zatem, ze względu na (3), mamy także

$$\varphi(m, F(a_1, \dots, a_{p+1})) = F(F(\varphi(m, a_1), \dots, \varphi(m, a_p)), \varphi(m, a_{p+1}));$$

z drugiej strony, w następstwie już tego jednego, że działanie (D) jest działaniem typu (T), mamy

$$\begin{aligned} F(F(\varphi(m, a_1), \dots, \varphi(m, a_p)), \varphi(m, a_{p+1})) &= \\ &= F(\varphi(m, a_1), \varphi(m, a_2), \dots, \varphi(m, a_{p+1})). \end{aligned}$$

Z dwóch ostatnich równości wynika związek

$$\varphi(m, F(a_1, \dots, a_{p+1})) = F(\varphi(m, a_1), \dots, \varphi(m, a_{p+1})).$$

Dowiedliśmy więc, że gdyby związek (1) zachodził przy $n = p$, to zachodziłby także przy $n = p + 1$, a ponieważ, jakśmy powiedzieli wyżej, założenie twierdzenia na tem właśnie polega, że związek (1) zachodzi w razie, kiedy $n = 2$, przeto, na podstawie zasady indukcyi matematycznej, związek (1) zachodzi przy jakiegokolwiek wartości liczby n .

Oczywiście, dowiedlibyśmy całkiem analogicznie, że związek (2) także zachodzi przy każdej wartości na n , nie mniejszej od liczby 2. Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

§ 31. Zwracamy się teraz do omówienia ogólnych zasad któremi kierujemy się przy ustawianiu teorii działań zasadniczych. Jakikolwiek byłby zbiór wielkości (Z), dla którego pragnęlibyśmy stworzyć teorię działań zasadniczych, określamy zawsze **dodawanie** i **mnożenie** zapomocą specjalnie dla zbioru (Z) obmyślonych definicyi jako dwa działania typu (T); za **odejmowanie** przyjmujemy zawsze działanie odwrotne w stosunku do dodawania, a nazwę **dzielenia** dajemy działaniu odwrotnemu w stosunku do mnożenia. Winniśmy dodać, że istnieje jeden przypadek, w którym definicya dzielenia inną ma postać. Mianowicie określamy dzielenie liczb całkowitych ¹⁾ jako działanie, polegające na wyznaczeniu takiej liczby całkowitej q , która sprawdza równość

$$a = b \cdot q + r,$$

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych, str. 58, § 24.

gdzie oznaczyliśmy przez a i b dwie liczby całkowite dane, a przez r liczbę całkowitą, która w razie, kiedy jest od zera odmienna, sprawdza nierówność

$$r < b.$$

Przekonamy się jednak w przyszłym rozdziale, że na podstawie ogólnej teorii liczb wymiernych dzielenie liczb całkowitych uważane być może za działanie, mające na celu przedstawienie w pewnej szczególnej postaci tej liczby wymiernej x , która sprawdza równanie

$$a = b \cdot x,$$

gdzie symbole a i b mają to samo znaczenie, co przed chwilą. Zatem definicja dzielenia liczb całkowitych pozorne tylko stanowi odstępianie od jednej z ogólnych zasad, wysłowionych przed chwilą.

Z rozważań tych wynika, że stworzenie teorii działań zasadniczych dla oznaczonego zbioru wielkości (Z) wymaga ustawienia dwóch tylko, specjalnie dla zbioru tego obmyślanych definicji, mianowicie:

1°. Definicji wyniku dodania do dowolnie w zbiorze (Z) wybranego elementu a , drugiego w tymże zbiorze dowolnie wybranego elementu b .

2° Definicji wyniku pomnożenia dowolnie w zbiorze (Z) wybranego elementu a , przyjętego za mnożną, przez drugi, dowolnie w zbiorze (Z) wybrany, a za mnożnik przyjęty element b .

Wynik wykonania działania dodawania na pewnych elementach zowie się zawsze ich sumą, a elementy, ulegające dodawaniu — składnikami.

Wynik wykonania działania mnożenia na pewnych elementach zowie się ich iloczynem, a elementy, ulegające mnożeniu — czynnikami.

Określiwszy ogólnie sumę i iloczyn dwóch elementów oznaczonego zbioru wielkości (Z), określimy tem samem sumę i iloczyn jakiegokolwiek liczby n ($n \geq 2$) dowolnie uszeregowanych elementów

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n \tag{1}$$

zbioru (Z): sumą elementów (1), uważanych w porządku, w którym je wymieniliśmy, będzie ostatni wyraz s_n w ciągu

$$s_1, s_2, s_3, \dots s_n,$$

gdzie s_1 oznacza element równy elementowi a_1 , a $s_i (1 < i \leq n)$ wynik dodania elementu a_i do elementu s_{i-1} ; iloczynem elementów (1), uważanych w tymże porządku co poprzednio, będzie ostatni wyraz p_n w ciągu

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n,$$

gdzie oznaczylibyśmy przez p_1 element równy elementowi a_1 , a przez $p_i (1 < i \leq n)$ iloczyn elementu p_{i-1} , przyjętego za mnożną, przez element a_i , przyjęty za mnożnik.

Sumę elementów (1), uważanych w porządku, w którym przyjmujemy ogólnie za numer porządkowy elementu a_k wskaźnik k , oznaczamy przez symbol

$$(2) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

a iloczyn tychże elementów, uważanych w tymże porządku, przedstawiamy przez symbol

$$(3) \quad a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$$

lub przez symbol

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n;$$

niekiedy posługujemy się przy symbolizowaniu iloczynu zamiast jednym z symbolów poprzedzających, symbolem następującym:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

który wynika z symbolów dopiero co podanych przez opuszczenie znaków mnożenia.

Symbol (2) czytamy jak następuje: a_1 więcej a_2 , więcej a_3 i t. d., więcej a_n , albo a_1 plus a_2 , plus a_3 i t. d., plus a_n , a symbol (3): a_1 razy a_2 razy a_3 i t. d. razy a_n .

Z samej natury pojęcia działania odwrotnego w stosunku do innego działania (§ 29) wynika, że przy całkiem ogólnem stanowisku, zajmowanemu obecnie przez nas wobec działań zasadniczych, należy rozróżniać dwa rodzaje odejmowania, z których jedno ma na celu wyznaczenie elementu x z równości postaci

$$(1) \quad a + x = b,$$

a drugie — elementu y z równości postaci

$$(2) \quad y + a = b,$$

w założeniu, że w obu przypadkach elementy a i b są dane.

Analogicznie winniśmy odróżnić dzielenie, mające na celu wyznaczenie elementu u z równości postaci

$$a \cdot u = b, \quad (3)$$

od dzielenia, którego cel polega na wyznaczeniu elementu v z równości postaci

$$v \cdot a = b. \quad (4)$$

Jeżeli, jak się to w rzeczywistości prawie zawsze zdarza, dodawanie posiada własność przemienności, to w takim razie, na podstawie ogólnych rozważań z § 29-go, istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania. Okoliczność tę stwierdzamy łatwo niezależnie od ogólnej teorii § 29-go: istotnie, w razie przemienności dodawania, równość (2) równoważna jest równości

$$a + y = b,$$

skąd wynika, że problem wyznaczenia elementu y z równości (2) nie różni się od problemu wyznaczenia elementu x z równości (1).

W razie przemienności dodawania, a więc w przypadku, kiedy istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania, symbolizujemy taką wartość na x , która sprawdza równanie (1), przez wyrażenie

$$b - a,$$

które czytamy: b mniej a . W rozważanym przypadku element b zowie się odjemną, element a — odjemnikiem, a wynik odejmowania — resztą; równość (1) jest tedy oczywiście równoważną równości

$$x = b - a.$$

Analogicznie, w razie przemienności mnożenia, istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia. W tym przypadku element u , sprawdzający równanie (1), zowie się ilorazem podziału elementu b , przyjętego za dzielną przez element a , przyjęty za dzielnik, a za symbol ilorazu przyjmujemy w rozważanym przypadku wyrażenie

$$b : a \text{ lub } \frac{b}{a};$$

każde z tych wyrażeń czytamy: b przez a .

Działania dodawania i odejmowania zwiemy działaniami stopnia pierwszego, a działanie mnożenia i dzielenia — działaniami stopnia drugiego.

Wszystkie cztery działania zasadnicze zowią się działaniami wymiernymi. Wszelka kombinacya oznaczonych elementów drogą działań wymiernych zowie się funkcją wymierną rozważanych elementów, a wyrażenie matematyczne, przedstawiające funkcję wymierną, wyrażeniem wymiernem.

Przy opuszczaniu nawiasów w wyrażeniach wymiernych kierujemy się zasadą następującą: w razie, kiedy chodzi o zaznaczenie, iż wynik *w* pewnego działania stopnia drugiego ma być skombinowany działaniem stopnia pierwszego z innym wyrażeniem, opuszczamy nawias, w którym, według ogólnych reguł przy używaniu nawiasów (§ 26), należałoby zamknąć wyrażenie, przedstawiające element *w*.

§ 32. W przypadkach najważniejszych określamy dodawanie i mnożenie w taki sposób, iż działania te posiadają własności następujące.

1°. Dodawanie posiada własności łączności i przemienności.

2°. Nierówność

$$b \neq b'$$

pociąga za sobą w każdym razie nierówność

$$a + b \neq a + b',$$

z czego wynika, na podstawie twierdzeń I i II z § 29-go, że odejmowanie, w razie wykonalności, jest działaniem jednoznaczem.

3°. Mnożenie posiada własność rozdzielności w stosunku do dodawania.

Teraz zamierzamy przedstawić pewne ważne twierdzenia, które zachodzą w przypadkach, kiedy powyższe warunki są spełnione.

I. Jeżeli działanie dodawania elementów pewnego zbioru wielkości (*Z*) posiada własności, wysłowione przed chwilą pod 1° i 2°, to w takim razie zachodzą równości następujące:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a + (b - c) = (a + b) - c \\ a - (b - c) = (a + c) - b \\ (b - c) - a = b - (a + c) \end{array} \right.$$

jeżeli tylko elementy *a*, *b* i *c* zbioru (*Z*) tak są dobrane, żeby działania zaznaczone w powyższych równościach były wykonalne.

Szczegółowe rozwijanie dowodu tego twierdzenia jest zby-

teczne, albowiem spostrzegamy natychmiast, iż ze względu na założenie twierdzenia jesteśmy uprawnieni do zastąpienia wyrazu „liczba całkowita“ w dobrze znanym dowodzie¹⁾ tego szczególnego przypadku obecnego twierdzenia, w którym symbole a , b i c oznaczają liczby całkowite bezwzględne, przez wyrażenie „element zbioru (Z) “.

Opierając się na równościach (1), możemy, naśladowując najdokładniej rozważania, któremi posługiwaliśmy się w teorii liczb całkowitych, udowodnić, że wszelka kombinacja skończonej liczby elementów zbioru (Z) drogą skończonego ciągu działań, z których każde jest dodawaniem lub odejmowaniem, równa się, w razie wykonalności rzeczonych działań, albo sumie rozważanych elementów, albo reszcie odejmowania sumy niektórych z tych elementów, od sumy pozostałych.

Żeby jednak twierdzenie to zachodziło zawsze w podanem brzmieniu, należy, podobnie jak w teorii liczb całkowitych, rozszerzyć nieco znaczenie zwrotu „suma n składników“ w ten sposób, iżby wyrażenie „suma o jedynym jakimkolwiek składniku a “ oznaczało sam element a .

II. Jeżeli dodawanie i mnożenie elementów pewnego zbioru wielkości (Z) posiadają własności, wymienione na początku tego paragrafu, to działanie mnożenia posiada własność rozdzielności w stosunku do odejmowania.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, oznaczmy przez a , b i c trzy elementy zbioru (Z) i zakładając, że odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$b - c,$$

jest wykonalne, przyjmijmy

$$\begin{aligned} x &= a \cdot (b - c) \\ y &= (b - c) \cdot a. \end{aligned}$$

Mamy tedy

$$x + a \cdot c = a(b - c) + a \cdot c = a\{(b - c) + c\} = a \cdot b,$$

oraz

$$y + c \cdot a = (b - c) \cdot a + c \cdot a = \{(b - c) + c\} a = b \cdot a.$$

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych, str. 41 i 42.

Mamy więc

$$x + a \cdot c = a \cdot b,$$

$$y + c \cdot a = b \cdot a,$$

skąd

$$x = a \cdot b - a \cdot c,$$

$$y = b \cdot a - c \cdot a,$$

czyli

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(c - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a.$$

Równości te wyrażają właśnie twierdzenie, o którego dowód chodziło.

§ 33. Po określeniu działania mnożenia dla elementów oznaczonego zbioru wielkości (Z), wprowadzamy elementarne pojęcie potęgi w sposób następujący: potęgą oznaczonego, za zasadę potęgi przyjętego elementu a zbioru (Z), przyjmując za wykładnik oznaczoną liczbę całkowitą m ($m > 0$), zowiemy element, którego wartość przedstawiamy przez symbol

$$a^m,$$

i czytamy „ a do potęgi m -tej“, określając wartość tego symbolu równościami

$$a^1 = a,$$

$$a^{k+1} = a_k \cdot a,$$

z których druga zachodzić ma przy wszystkich od zera większych wartościach całkowitych symbolu k .

Opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, stwierdzamy natychmiast, że definicya poprzedzająca określa w zupełności potęgę dowolnie przyjętego elementu zbioru (Z) przy każdej od zera większej wartości całkowitej wykładnika.

I. Jeżeli, jak się to zwykle w praktyce wydarza, mnożenie posiada własność łączności, to w takim razie zachodzą równości następujące:

$$(1) \quad a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

$$(2) \quad (a^m)^p = a^{m \cdot p},$$

jakikolwiek element zbioru (Z) oznaczylibyśmy przez a , i jakiegokolwiek liczby całkowite od zera większe oznaczylibyśmy przez m i p .

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważamy, iż w przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$p = 1,$$

równość (1) zachodzi bezpośrednio na podstawie definicji potęgi. Załóżmy chwilowo, że równość (1) zachodzi jeszcze, kiedy mamy

$$0 < p \leq k,$$

oznaczając przez k pewną, od zera większą liczbę całkowitą i przyjmijmy

$$p = k + 1.$$

Mamy tedy

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a),$$

skąd

$$a^m \cdot a^{k+1} = (a^m \cdot a^k) \cdot a$$

na podstawie własności łączności mnożenia.

Ponieważ zaś, na podstawie chwilowo przyjętego założenia, mamy

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k},$$

przeto mamy

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1}$$

czyli

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+(k+1)}.$$

Z uzyskanych wyników wnosimy, na podstawie zasady indukcji matematycznej, że zgodnie z brzmieniem twierdzenia, równość (1) zachodzi, jakiegokolwiek liczby całkowite, byle od jedności nie mniejsze, oznaczylibyśmy przez m i p .

Pozostaje do uzasadnienia równość (2). W przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$p = 1,$$

równość (2) oczywiście zachodzi, gdyż mamy:

$$(a^m)^1 = a^m \text{ oraz } a^{m \cdot 1} = a^m,$$

a gdyby rozważana równość zachodziła przy wszystkich tych wartościach na p , które sprawdzają związki

$$0 < p \leq k,$$

gdzie oznaczyliśmy przez k pewną liczbę całkowitą, większą od zera, to mielibyśmy

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot a^m = a^{m \cdot k} \cdot a^m$$

oraz

$$a^{m \cdot k} \cdot a^m = a^{m \cdot k + m} = a^{m(k+1)}$$

na podstawie uzasadnionego już, na równości (1), polegającego twierdzenia. Zatem mielibyśmy

$$(a^m)^{k+1} = a^{m(k+1)}.$$

Stwierdzamy więc, że przy rozważanych warunkach, równość (2) zachodziłaby jeszcze i przy wartości

$$p = k + 1$$

liczby p . Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnosimy z uzyskanych wyników, że równość (2) zachodzi przy wszystkich, od zera większych, wartościach liczb całkowitych m i p .

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

II. Jeżeli mnożenie elementów zbioru wielkości (Z) posiada prócz własności łączności jeszcze własność przemienności, to w takim razie mamy

$$(1) \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m,$$

oznaczając przez m jakąkolwiek od zera większą liczbę całkowitą, a przez a i b dwa jakiegokolwiek elementy rozważanego zbioru wielkości.

Istotnie spostrzegamy z łatwością, że równość (1) zachodzi w przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$m = 1.$$

Z drugiej zaś strony, oznaczając przez k jakąkolwiek, od zera większą liczbę całkowitą, mamy

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b),$$

skąd

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a^k \cdot b^k) \cdot (a \cdot b)$$

na podstawie własności przemienności i łączności mnożenia elementów zbioru (Z).

Zatem gdybyśmy mieli

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k,$$

to mielibyśmy

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b),$$

skąd

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a \cdot b)^{k+1}.$$

Dowiedliśmy więc, że gdyby równość (1) zachodziła przy

$$m = k,$$

to równość ta zachodziłaby także i przy

$$m = k + 1.$$

Z uzyskanych wyników wnosimy, na podstawie zasady indukcji matematycznej, że rozważane twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Bardzo często przywodzeni bywamy do rozważania takiego zbioru wielkości (Z), który czyni zadość warunkom następującym:

1°. Wszystkie liczby całkowite bezwzględne należą do zbioru (Z).

2°. Mnożenie elementów zbioru (Z) posiada własności łączności i przemienności.

3°. Iloczyn dowolnie przyjętego elementu a zbioru (Z) przez jedność równa się temuż elementowi a .

4°. Iloczyn elementów zbioru (Z) równa się zeru w razie i tylko w razie kiedy jeden czynnik przynajmniej równy jest zeru.

5°. Dzielenie elementów zbioru (Z) wykonalne jest jednoznacznie, byle tylko element przyjęty za dzielnik nie był równy zeru.

Gdy warunki powyższe są spełnione, rozszerzamy pojęcie potęgi do przypadku, kiedy wykładnik równa się zeru, stawiając przytem żądanie, żeby, gdy oznaczymy przez a jakikolwiek element zbioru (Z), równość

$$a^k \cdot a = a^{k+1},$$

która, na podstawie definicyi, podanej na początku obecnego paragrafu, zachodzi przy wszystkich od zera większych wartościach liczby całkowitej k , zachodziła jeszcze i przy wartości

$$k = 0$$

tej liczby.

Spostrzegamy natychmiast, że żądanie poprzedzające określa w zupełności wartość symbolu

$$a^0$$

jeżeli tylko element a nie jest równy zeru. Istotnie, jeżeli element a jest od zera odmienny, to w takim razie, z równania

$$a^0 \cdot a = a^1$$

czyli

$$a^0 \cdot a = a$$

wynika

$$a^0 = 1;$$

jeżeli zaś mamy

$$a = 0,$$

to powyższe żądanie pozostawia wartość symbolu

$$a^0$$

w zupełnej nieoznaczoności. Wobec tego przyjmujemy, w razie kiedy zbiór wielkości (Z) sprawdza wysłowione przed chwilą warunki, definicyę następującą: *potęga o wykładniku równym zeru jakiegokolwiek od zera odmiennego elementu zbioru (Z) oznacza element zbioru (Z) równy liczbie jedności.*

III. Przy powyższem rozszerzeniu pojęcia potęgi twierdzenia I i II nie przestają zachodzić nawet w razie, kiedy jedna z liczb m lub p , albo obie te liczby równają się zeru, jeżeli tylko przytem żadna z liczb a i b zeru równą nie jest, a nadto, przy tychże zastrzeżeniach co do wartości elementów a i b , mamy równości następujące:

$$(1) \quad a^m : a^p = a^{m-p}$$

$$(2) \quad b^m : a^m = (b : a)^m$$

gdzie oznaczyliśmy przez m jakąkolwiek liczbę całkowitą, a przez p jakąkolwiek, byle od liczby m nie większą liczbę całkowitą.

Spostrzegamy natychmiast, że twierdzenia I i II rzeczywiście zachodzą obecnie jakiejkolwiek liczby całkowite, chociażby równe zeru, oznaczylibyśmy przez m i p , byleby żaden z elementów a i b zeru równy nie był.

Spostrzegamy nadto, że warunek, ażeby żaden z elementów a i b zeru równy nie był, konieczny jest już z tej przyczyny, iż wyrażenie

$$0^0$$

pozbawione jest wszelkiej oznaczonej wartości.

Żeby uzasadnić równość (1), przyjmijmy

$$u = a^{m-p}.$$

Mamy tedy

$$a^p \cdot u = a^p \cdot a^{m-p} = a^{(m-p)+p} = a^m,$$

skąd wynika, że jedyna wartość, którą ma w rozważanym przypadku iloraz

$$a^m : a^p,$$

rzeczywiście równa się wyrażeniu a^{m-p} .

Żeby uzasadnić i równość (2), przyjmijmy

$$v = (b : a)^m.$$

Mamy tedy

$$v \cdot a^m = (b : a)^m \cdot a^m = \{(b : a) \cdot a\}^m = b^m,$$

skąd, opierając się znowu na jednoznaczności dzielenia w rozważanych warunkach, wnosimy natychmiast, że równość (2) rzeczywiście zachodzi.

Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, które pragnęliśmy byli udowodnić.

