

V. Ogólne pojęcie działania; działania podstawowe.

§ 23. W rozdziale tym zamierzamy podać pewne wyjaśnienia i wyłożyć pewne rozważania natury ogólnej, które dadzą nam możliwość połączenia w dalszym ciągu większej jasności wykładu z większą zwięzłością¹⁾.

§ 24. Pojęcie zbioru i pojęcie klasy pewnych rzeczy różnią się od siebie tylko pod tym względem, że, ustawiając kryterium do rozpoznania tych rzeczy, które razem stanowią mają oznaczony zbiór, nie jesteśmy skrepowani żadnymi warunkami, ograniczającymi naturę takiego kryterium, podczas gdy przy ustawieniu analogicznego kryterium, w razie, kiedy chodzi o określenie pewnej klasy rzeczy, nie czujemy się w równej mierze swobodnymi.

Naprzykład, nie dostrzegamy nic rażącego w tem, żeby określić pewien zbiór, oświadczając, iż przedmiotami, zbiór ten stanowią mającymi, czyli elementami tego zbioru mają być odcinki prostoliniowe i liczby całkowite. Natomiast oświadczylibyśmy zapewne, że odcinki prostoliniowe i liczby całkowite są przedmiotami zbyt różnorodnymi, abyśmy je mogli zaliczać do jednej i tej samej klasy rzeczy. W tej właśnie różnicy w znaczeniach wyrazu „zbiór“ i wyrażenia „klasa pewnych przedmiotów“ tkwi przyczyna, która skłania nas do posługiwania się w rozważaniach matematycznej natury raczej wyrazem „zbiór“, aniżeli wyrażeniem „klasa pewnych przedmiotów“.

Jeżeli wszystkie elementy pewnego zbioru (Z') należą do pewnego innego zbioru (Z), to okoliczność tę wyrażamy krótko, orzekając, iż zbiór (Z') jest podzbiorem zbioru (Z); oczywiście może

¹⁾ Porównaj, Stolz u. Gmeiner, Theoretische Arithmetik, III Abschnitt, Analytische Theorie der rationalen Zahlen, p. 37.

się wydarzyć, iż pewien podzbiór pewnego zbioru zlewa się z tym zbiorem.

§ 25. Oznaczmy przez (Z) pewien zbiór wielkości i nie wymagając, żeby ten zbiór był koniecznizbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem tego wyrazu, przyjmijmy w nim tyle elementów, ile wynosi pewna liczba całkowita n ($n \neq 0$). Założmy, że po uszeregowaniu tych elementów w pewnym porządku

$$A_1, A_2, \dots A_n, \quad (1)$$

gdzie oznaczyliśmy ogólnie przez A_i element i -ty; możemy, przynajmniej w razie, kiedy wybór elementów (1) i sposób ich uszeregowania czynią zadość pewnym warunkom ograniczającym, przez wykonanie pewnej czynności (C) , określonej przez pewną definicyę (U) , wyznaczyć jeden przynajmniej element X zbioru (Z) .

W takim razie oświadczamy, że czynność (C) stanowi pewne działanie (arytmetyczne), określone definicyą (U) dla rozważanego rodzaju wielkości, a elementowi X nadajemy nazwę wyniku działania.

Dla uproszczenia rzeczy wprowadzamy definicyę następującą: jeżeli, rozważając jakikolwiek rodzaj wielkości (Z) , określimy pewien symbol (lub wyraz) s w taki sposób, ażeby spełnione były warunki następujące:

1°. w zbiorze (Z) istnieje przynajmniej jeden element, którego symbolem byłby symbol s ,

2°. dwa elementy, z których każdy uważany być może jako taki element, którego symbolem jest symbol s , są zawsze równe sobie,

3°. jeżeli z dwóch równych sobie elementów zbioru (Z) jeden uważany być może za element, którego symbolem byłby symbol s , to wówczas drugi element też uważany być może jako taki element, którego symbolem jest symbol s ,

w takim razie orzekamy, że symbol s ma oznaczoną wartość, a każdy element, za symbol którego może być uważany symbol s , przedstawia wartość tego symbolu.

Na podstawie umowy poprzedzającej wyrażenie „wielkość oznaczonej wartości“ oznacza którąkolwiek wielkość pewnego takiego zbioru równych sobie wielkości, do którego należy każda wielkość równa jakiegokolwiek wielkości tego zbioru.

Przy ustawieniu definicyi jakiegokolwiek działania zastosujemy się zawsze do wymagań następujących:

1°. Wynik działania arytmetycznego winien zależeć wyłącznie od wartości elementów ulegających działaniu.

2°. Wynik działania na oznaczonych elementach powinien być oznaczony tylko co do wartości.

Warunki te możemy wysłowić wyraźniej w sposób następujący:

1°. Jeżeli pewien element X oznaczonego zbioru wielkości (Z) uważany być może za wynik wykonania pewnego działania na pewnych elementach tego zbioru, to ten sam element X powinien także sprawdzać definicyę wyniku rozważanego działania na elementach odpowiednio równych elementom, rozważanym najpierw.

2°. Jeżeli pewien element X sprawdza definicyę wyniku pewnego działania na pewnych elementach, to każdy element równy elementowi X także sprawdzać powinien definicyę wyniku rozważanego działania na rozważanych elementach.

Gdybyśmy na przykład, zachowując te reguły porównywania ilościowego liczb ułamkowych, do których przywiedzeni byliśmy w rozdziale poprzedzającym, oświadczyli, że uważamy za wynik wykonanie pewnego działania (D) na dwóch liczbach ułamkowych liczbę ułamkową, której licznik równa się sumie liczników, a mianownik — sumie mianowników rozważanych liczb ułamkowych, to w takim razie, jak to czytelnik z łatwością sam sprawdzi, wykroczylibyśmy przeciwko powyższym zasadom.

Żeby wyrazić, iż pewna wielkość x jest wynikiem pewnego działania albo pewnego układu działań, wykonanych na oznaczonych wielkościach, orzekamy, że wielkość x jest pewną funkcją wielkości poprzedzających. Ponieważ wszelka kombinacja oznaczonych działań oczywiście sama uważana być może za pewne działanie, przeto pojęcie funkcyi nie różni się w rzeczywistości od pojęcia działania.

Ze względu na dwa, przed chwilą wysłowione warunki, do których zawsze stosujemy się przy określaniu działań arytmetycznych, wyjątkowo tylko mamy powody do odróżniania od siebie równych pomiędzy sobą wielkości, jako rzeczy odrębnych. Z tej przyczyny posługujemy się wyrażeniem „wielkość odmienna od drugiej w znaczeniu wielkość nierówna drugiej“. Z tejże przyczyny oświadczamy często, że takim a takim warunkom odpowiada

jedna tylko wielkość, kiedy właściwie pragniemy wyrazić, iż rozważanym warunkom odpowiada wielkość, której wartość tylko oznaczona jest w zupełności.

Jeżeli po dokonanych wyborze elementów, mających uleść pewnemu działaniu, i po uszeregowaniu tych elementów w oznaczonym porządku, tylko równe sobie elementy sprawdzają definicyę wyniku rozważanego działania, to takie działanie zowie się **działaniem jednoznaczem**. Jeżeli zaś pewne działanie arytmetyczne tej własności nie posiada, to nazywamy je działaniem **wieloznacznem**.

Zaznaczamy, że ewentualna wieloznaczność działania bynajmniej nie znajdowałaby się w sprzeczności z warunkami, którym, według zasad, przytoczonych wyżej, podlegać winna definicya działania w każdym razie. Oznaczmy naprzykład ogólnie przez (D) pewne działanie, określone dla każdej dwójki w pewnym porządku ułożonych elementów pewnego zbioru (Z) , a przez (X) — zbiór tych elementów zbioru (Z) , z których każdy odpowiada definicyi wyniku wykonania działania (D) na pewnych elementach a i b zbioru (Z) , uważanych w porządku, w którym je wymieniliśmy. W takim razie, chociażby zbiór (X) obejmował elementy, które nie wszystkie równe byłyby pomiędzy sobą, to określenie działania (D) zgodnem będzie z powyższymi warunkami, jeżeli

1°. podstawienie na miejsce elementów a i b elementów odpowiednio im równych a' i b' żadnej zmiany w zbiorze (X) nie wywoła,

2°. każdy element zbioru (Z) , równy jakimukolwiek elementowi zbioru (X) , sam należeć będzie do zbioru (X) .

Wynik wykonania oznaczonego działania na oznaczonych elementach

$$A_1, A_2 \dots A_n$$

oznaczonego zbioru wielkości, uważanych w porządku, w jakim je wymieniliśmy, czyli funkcję elementów

$$A_1, A_2 \dots A_n$$

symbolizujemy często w sposób następujący: obieramy pewien symbol, najczęściej pewną literę, np. literę f za symbol rozważanego działania czyli rozważanej funkcji i uważamy tedy symbol

$$f(A_1, A_2 \dots A_n)$$

za symbol wyniku wykonania rozważanego działania na elementach $A_1, A_2 \dots A_n$, uszeregowanych w porządku, w jakim je wymieniliśmy.

Przy takim znakowaniu symbol przedstawiający naturę działania (a więc litera f w powyższym przykładzie) zowie się charakterystyką działania czyli funkcji, a symbole $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$, oznaczające elementy, które ulegają działaniu, — argumentami funkcji.

Jeżeli wynik pewnego działania zależy wyłącznie od tego, jakie są wartości elementów, które ulegają działaniu, a natomiast niezależnym jest od uszeregowania tych elementów, to okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że rozważane działanie ma własność przemienności.

Jeżeli działanie, którego wynik wykonania na pewnych elementach $A_1, A_2 \dots A_n$ oznaczamy przez symbol $f(A_1, A_2 \dots A_n)$, ma własność przemienności, to w takim razie jakakolwiek przemiana porządku symbolów $A_1, A_2 \dots A_n$ w symbolu $f(A_1, A_2 \dots A_n)$ wartości elementu, oznaczonego przez ten symbol, oczywiście nie zmienia; odwrotnie, jeżeli przy dowolnych wartościach elementów $A_1, A_2 \dots A_n$ wszelka przemiana porządku tychże w symbolu $f(A_1, A_2 \dots A_n)$, pozostaje bez wpływu na wartość tego symbolu, to symbol f oznacza działanie, które posiada wartość przemienności.

Do pojęcia przemienności możemy nawiązać całkiem ogólne twierdzenie następujące:

Jeżeli po oznaczeniu elementów, które ulegają pewnemu działaniu (C), i po ustawieniu ich w oznaczonym porządku przemiana porządku następowania po sobie dwóch jakichkolwiek elementów sąsiednich czyli takich, z których jeden następuje bezpośrednio po drugim, pozostaje bez wpływu na wynik, jeżeli, wystawiając się krócej, transpozycja jakichkolwiek dwóch elementów sąsiednich w układzie tych, które mają ulegać pewnemu działaniu, dla wyniku działania jest rzeczą obojętną, to rozważane działanie posiada własność przemienności.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zwracamy się do dobrze znanego twierdzenia następującego¹⁾: Każdą permutację oznaczonych przedmiotów możemy przemienić w każdą inną permutację tychże przedmiotów przez wykonanie stosownego ciągu transpozycji ele-

¹⁾ Zaręmba, Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych, str. 29.

mentów sąsiednich. Na podstawie tego twierdzenia i założenia przyjętego w twierdzeniu, o którego udowodnienie chodzi, możemy oczywiście, od jakiegokolwiek porządku następstwa, przyjętego dla elementów, mających uleżać działaniu, przejść do jakiegokolwiek innego—przez kolejne wykonanie pewnej liczby takich czynności, z których żadna na wynik wpływu nie wywiera. Z tego zaś wynika, że rozważane działanie posiada rzeczywiście własność przemienności.

§ 26. Uzupełniamy poprzedzające ogólne uwagi o działaniach, podając regułę używania nawiasów w teorii działań i określając pewne wyrażenia. Będą to rzeczy już do pewnego stopnia czytelnikowi znane z poprzedniego, ale obecnie dopiero możemy je określić w sposób całkiem precyzyjny i ogólny.

Załóżmy, że pewien element x i ewentualnie inne elementy mają podlegać pewnemu działaniu (D) , i przypuśćmy, że, na podstawie pewnych przyjętych definicji możemy przedstawić wynik w działania (D) na rozważanych elementach w postaci pewnego symbolu S , do którego wchodziłby symbol x . Jeżeli sam element x określony jest jako wynik pewnego działania (Δ) i, na podstawie znowu pewnych definicji może być przedstawiony przez pewien symbol Σ , do którego wchodziłyby symbole elementów, podlegających działaniu (Δ) , to przedstawiamy często wynik w działania (D) na rozważanych elementach przez symbol S' , w który przemienia się symbol S przez zastąpienie symbolu x przez symbol Σ , zamknięty w nawiasie. Gdyby do symbolu Σ wchodziły już nawiasy, to wspomnianemu przed chwilą nawiasowi nadajemy kształt odmienny od nawiasów, mogących już znajdować się w symbolu Σ . Przy tworzeniu symbolu S' zamykamy z reguły symbol Σ w nawiasie z tej przyczyny, że gdybyśmy poprzestali na podstawieniu na miejsce symbolu x symbolu Σ , to znaczenie uzyskanego symbolu mogłoby być wątpliwem. Są jednak przypadki, kiedy opuszczenie nawiasu nie pociąga za sobą żadnej niejasności; w takich przypadkach oczywiście nawias opuszczamy. Na zapytanie, w jakich mianowicie przypadkach opuszczanie nawiasów nie sprowadza niejasności nie możemy dać żadnej całkiem ogólnej odpowiedzi. W pewnych szczególnych przypadkach, które zostaną omówione w odpowiednich ustępach, opuszczamy nawiasy na podstawie powszechnie przyjętego zwyczaju. W innych znów przypadkach, zachowanie lub opuszczenie nawiasu zależy od tego, co właściwie pragniemy wyrazić. Na przykład, kiedy chodzi o wynik kombinacji kilku liczb

całkowitych drogą dodawania, to nawiasy zwykle opuszczamy, ponieważ ostateczny wynik nie jest zależny od tego, w jaki sposób grupujemy rozważane liczby całkowite przy kombinowaniu ich drogą dodawania; jednak zachodzi niekiedy konieczność wyrażenia, że kombinowanie rozważanych liczb drogą dodawania ma być wykonane w pewien szczególny sposób i w takim razie oczywiście zachowanie nawiasów staje się koniecznem.

Wszelki symbol, który wyraża, że pewne elementy mają podlegać oznaczonemu działaniu albo oznaczonemu układowi działań, zowie się wzorem albo wyrażeniem matematycznym.

Oświadczenie, że pewne dwa układy orzeczeń (U) i (U') (z których każdy może redukować się do jednego tylko orzeczenia) są sobie równoważne, wyraża zawsze, że założenie, polegające na tem, iż jeden z układów (U) lub (U') wyraża prawdziwy stan rzeczy, pociąga za sobą, jako konieczność logiczną, to następstwo, że drugi z tych układów orzeczeń także wyraża prawdziwy stan rzeczy. Jeżeli więc na przykład oświadczamy, że pewien układ równości i nierówności (R) równoważny jest pewnemu drugiemu układowi równości i nierówności (R'), to tem samem wyrażamy, że żaden z układów związków (R) albo (R') nie może zachodzić, jeżeli nie zachodzi i drugi.

Uważajmy równość postaci

$$S = S',$$

gdzie S i S' przedstawiają oznaczone wzory (które jednak mogą redukować się do symbolów, oznaczających pojedyncze elementy). Dwa przypadki mogą się zdarzyć:

1°. Powyższa równość zachodzi bez względu na wybór elementów, które wchodzą do wzorów S i S' . W takim razie równość

$$S = S'$$

zowie się tożsamością lub identycznością i wyraża, że wynik, do którego doprowadza wykonanie zaznaczonych we wzorze S działań na pewnych elementach dowolnie przyjętych, byle tak, żeby rozważane działania były wykonalne, równa się wynikowi, do którego doprowadza wykonanie działań, zaznaczonych we wzorze S' , na tych samych elementach, o ile warunki wykonalności tych działań są spełnione.

Tożsamość nie wyraża zatem żadnej własności elementów, które do niej wchodzi, lecz tylko pewną własność działań zaznaczonych we wzorach S i S' .

2°. Równość:

$$S = S',$$

zachodzi tylko w przypadku, kiedy wybór elementów, do niej wchodzących, podlega dalej idącym ograniczeniom aniżeli tylko tym, które stanowią warunki wykonalności działań, zaznaczonych we wzorach S i S' . W takim razie, omawiana równość, przybiera nazwę równania i wyraża pewne ograniczenie co do wyboru elementów, które do wzorów S i S' wchodzi. Może się oczywiście zdarzyć, że nie istnieją takie wartości na elementy, wchodzące do wzorów S i S' , przy których zachodziłaby równość.

$$S = S'$$

Oświadczamy wówczas, że równanie

$$S = S'$$

jest niemożliwe.

Oczywiście możemy rozróżnić całkiem analogiczne dwa przypadki i co do każdego ze związków

$$S > S' \text{ i } S \leq S',$$

gdzie S i S' oznaczają znowu dwa wzory, albowiem związek tego rodzaju może zachodzić albo pod jedynym warunkiem, żeby działania zaznaczone we wzorach S i S' były wykonalne, albo znów, jeżeli wogóle zachodzić może, to tylko przy dalszych ograniczeniach co do elementów, które wchodzi do wzorów S i S' .

Nie posługujemy się jednak żadnymi technicznymi wyrazami do odróżnienia wspomnianych przypadków.

§ 27. W teorii liczb całkowitych poznaliśmy już cztery działania o nazwach następujących:

Dodawanie, Odejmowanie, Mnożenie i Dzielenie. (2)

Następnie, w rozdziale „O odcinkach prostoliniowych uważanych za wielkości“, a nadto w rozdziale poprzedzającym mieliśmy sposobność pewnym przynajmniej z wyrazów (2) nadać znaczenie nazw działań określonych dla zbiorów wielkości odmiennych od zbioru liczb całkowitych. Te same okoliczności powtórzą się jeszcze

kilkakrotnie w dalszym ciągu tego dzieła. Działania, oznaczane przez nazwy (2), stanowią tak zwane działanie zasadnicze.

Oczywiście niepodobieństwem byłoby określić jakiegokolwiek działania w sposób tak ogólny, żeby po przyjęciu odnośnej definicyi działanie to mogło być uważane za określone z góry w stosunku do każdego zbioru, dla elementów którego tylko pojęcie równości byłoby ustanowione.

Zatem możemy uważać wyrazy (2) za nazwy oznaczonych działań tylko w stosunku do oznaczonego zbioru wielkości i na podstawie definicyi dla tego zbioru osobno ustawionych. Natomiast, przy ustawianiu takich definicyi dla różnych zbiorów nie tylko możemy stosować się do pewnych ogólnych zasad, ale nawet, skoro wśród rozmaitości uwzględnianych zbiorów posługujemy się stale nazwami (2), to logika obowiązuje nas do przyjęcia takich stałych zasad.

Żeby zasady te w należytem świetle przedstawić, omówimy najpierw w sposób ogólny pewien szczególny typ działań. W braku jakiegokolwiek w literaturze przyjętej ogólnej nazwy dla tych działań nazwiemy je działaniami typu (T).

§ 28. Właściwy charakter działań typu (T) polega na tem, że definicyę każdego działania (D) tego typu dla jakiegokolwiek zbioru wielkości (Z) podać możemy w sposób następujący: Określamy najpierw działanie (D) w przypadku szczególnym, kiedy działanie na dwóch tylko elementach zbioru (Z) ma być wykonane, co uskuteczniamy, ustawiając pewną definicyę (Δ), osobno dla zbioru (Z) obmyślaną, stosując się przytem oczywiście do ogólnych wymagań, omówionych w § 25-tym. Od definicyi (Δ) żądamy, żeby działanie, przez nią określone, było jednoznaczne i wykonalne bez żadnych zastrzeżeń. Żeby się w dalszym ciągu łatwiej wysławać, oznaczymy przez

$$F(a, b)$$

wynik działania (D) w tym przypadku, kiedy je wykonywamy nad elementami a i b zbioru (Z), uważając przytem element a za pierwszy, a element b za drugi¹⁾.

¹⁾ Nie wykluczamy przypadku, w którymby role elementów a, b w definicyi (Δ) niezem nie różniły się od siebie, i w którym zatem nie byłoby konieczności oznaczyć, który z nich ma być pierwszym, a który drugim, ale ogólnej teorii nie zacieśniamy do tego przypadku.

Określiwszy działanie (D) w tym przypadku, kiedy dwa tylko elementy zbioru (Z) mają podlegać działaniu, rozszerzamy następnie pojęcie działania (D) tak, żeby dowolna liczba n ($n \geq 2$) elementów zbioru (Z) tem działaniem mogła być objęta, a to w sposób następujący:

Oznaczmy przez

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n \quad (1)$$

ciąg o n wyrazach ($n > 2$), którego wyrazami są, ze zbioru (Z) dowolnie przyjęte, elementy i przyjmijmy

$$s_2 = F(a_1, a_2), \quad (2)$$

oraz ogólnie

$$s_i = F(s_{i-1}, a_i) \quad (i = 3, 4, 5 \dots, n). \quad (3)$$

Spostrzegamy natychmiast, opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, że definicyja poprzedzająca określa w zupełności wartości symbolów

$$s_2, s_3, s_4 \dots s_n$$

jakąkolwiek, byle od liczby 2 nie mniejszą wartość miałyby liczba całkowita n . Otóż wszelka wielkość, równa wartości symbolu s_n , zowie się wynikiem wykonania działania (D) na elementach (1), uważanych w porządku, w jakim je napisaliśmy.

Definicyja poprzedzająca oczywiście czyni zadość ogólnym warunkom, do których postanowiliśmy (§ 25) zastosowywać się zawsze przy określaniu jakiegokolwiek działania, i określa działanie (D) jako działanie jednoznaczne, wykonalne bez zastrzeżeń.

Przyjmijmy ogólnie za symbol na wynik działania (D) wykonanego na elementach (1), uważanych w porządku, w którym je napisaliśmy, symbol

$$F(a_1, a_2, a_3 \dots, a_n) \quad (4)$$

i, zwracając się do szczególnego przypadku, kiedy mamy $n = 3$, założmy, że zachodzi równość ¹⁾

$$F(a_1, a_2, a_3) = F(a_1, F(a_2, a_3)) \quad (5)$$

¹⁾ Zwracamy uwagę czytelnika nato, że związek (5), który, zależnie od brzmienia definicyi (Δ), może zachodzić lub nie zachodzić, należy starannie odróżniać od związku

$$F(a_1, a_2, a_3) = F(F(a_1, a_2), a_3),$$

który jest natychmiastowem następstwem definicyi działania (D) i dlatego zawsze zachodzi.

bez względu na wybór elementów a_1, a_2, a_3 w zbiorze (Z) . W takim razie zachodzi także twierdzenie następujące:

Jeżeli oznaczymy przez (C) ciąg, w który przemieniłby się ciąg (1) , gdybyśmy zastąpili dowolną, byle od liczby n mniejszą, liczbę k ($k \geq 2$) bezpośrednio po sobie następujących wyrazów tego ciągu przez wynik wykonania działania (D) na tych wyrazach, to wynik wykonania działania (D) na elementach (1) równać się będzie wynikowi wykonania działania (D) na elementach, stanowiących ciąg (C) , jeżeli oczywiście zachowamy, przy wykonaniu działania (D) ten porządek elementów temu działaniu podlegających, w którym elementy te następują po sobie w ciągu (C) .

Tak określona własność działania (D) zowie się własnością łączności. Możemy zatem wyrazić krócej twierdzenie, wysłowione przed chwilą, w postaci następującej:

I. *Jeżeli pewne działanie (D) typu (T) posiada własność łączności w przypadku szczególnym, kiedy trzy elementy działaniu temu podlegają, to rozważane działanie posiada własność łączności i w przypadku najogólniejszym.*

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zwracamy się najpierw do przypadku, kiedy mamy

$$k = 2$$

i, oznaczając przez a_i i a_{i+1} dwa po sobie następujące wyrazy ciągu (3) , przyjmujemy

$$(6) \quad b = F(a_i, a_{i+1}).$$

Gdybyśmy mieli

$$i = 1,$$

to na podstawie samej definicyi działania (D) mielibyśmy zgodnie z treścią twierdzenia:

$$F(a_1, a_2, a_3 \dots a_n) = F(b, a_3, a_4, \dots a_n).$$

Założmy więc, że mamy

$$i > 1$$

i przyjmijmy

$$(7) \quad c = F(a_1, \dots a_{i-1})$$

w razie, gdyby liczba i była większa od liczby 2, umawiając się

jednocześnie, że w przypadku, kiedy i równa się jedności, należy określić element c równością:

$$c = a_1.$$

Przy tych oznaczeniach, mamy

$$F(a_1 \dots a_n) = F(F(c, a_i, a_{i+1}), a_{i+2}, \dots, a_n)^{1)} \quad (8)$$

bezpośrednio na podstawie przyjętych definicyi.

Na podstawie zaś założenia, wyrażonego równością (5), mamy

$$F(c, a_i, a_{i+1}) = F(c, F(a_i, a_{i+1})),$$

skąd

$$F(c, a_i, a_{i+1}) = F(c, b),$$

zatem, na podstawie równości (8) mamy

$$F(a_1, a_2 \dots a_n) = F(F(c, b), a_{i+2} \dots a_n). \quad (9)$$

Z drugiej znów strony mamy

$$F(a_1, a_2 \dots a_{i-1}, b, a_{i+2}, \dots, a_n) = F(F(c, b), a_{i+1}, \dots, a_n), \quad (10)$$

a to znowu bezpośrednio na podstawie przyjętych definicyi.

Ponieważ na podstawie równości (9) i (10) mamy:

$$F(a_1 \dots a_n) = F(a_1 \dots a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

przeto przekonywamy się, że, kiedy mamy $k=2$, to twierdzenie zachodzi niezawodnie.

Założmy chwilowo, że twierdzenie zachodzi jeszcze kiedy mamy $k=p$ i zwróćmy się do przypadku, w którym mielibyśmy $k=p+1$. Uważajmy tedy wyrazy

$$a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+p+1}$$

ciągu (1) i przyjmijmy

$$b = F(a_i, \dots, a_{i+p}). \quad (11)$$

Na podstawie chwilowo przyjętego założenia i równości (11) mamy:

$$F(a_1, \dots, a_n) = F(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+p+1}, \dots), \quad (12)$$

¹⁾ Pisząc ten wzór, zakładamy milcząco, że $i+1 < n$; czytelnik sam łatwo spostrzeże zmiany, jakie zaszczyłyby w tym wzorze i wzorach dalszych, gdybyśmy mieli $i+1 = n$.

a ponieważ w razie $k=2$ twierdzenie już uzasadniliśmy, przeto

$$(13) \quad F(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+p+1}, \dots) = F(a_1, \dots, a_{i-1}, F(b, a_{i+p+1}), a_{i+p+2}, \dots).$$

Z drugiej strony, bezpośrednio na podstawie przyjętych definicyi, mamy

$$(14) \quad F(b, a_{i+p+1}) = F(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+p+1}).$$

Z równości (12), (13) i (14) wynika natychmiast równość:

$$F(a_1, \dots, a_n) = F(a_1, \dots, a_{i-1}, F(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+p+1}), a_{i+p+2}, \dots),$$

wyrażająca właśnie twierdzenie, o które chodziło.

Ostatecznie dowiedliśmy, że w razie, kiedy $k=2$, twierdzenie zachodzi, a następnie okazaliśmy, że gdyby ono zachodziło przy $k=p$, to zachodziłoby także i przy $k=p+1$. Zatem, na podstawie zasady indukcji matematycznej twierdzenie zachodzi w każdym razie.

II. Jeżeli pewne działanie (D) typu (T), posiadające własność przemienności w razie, kiedy działanie to wykonywamy na dwóch elementach odpowiedniego zbioru (Z), posiada jeszcze własność łączności, to rozważane działanie posiada własność przemienności i w przypadku, kiedy liczba elementów, podlegających działaniu, równa się jakiegokolwiek liczbie oznaczonej n .

Dowód twierdzenia nie trudno przeprowadzić. Istotnie, oznaczając, jak wyżej, przez

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

wynik uzyskany przez wykonanie działania (D) na elementach

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

uważanych w porządku, w jakim je napisaliśmy, mamy

$$(1) \quad F(\dots, a_i, a_{i+1}, \dots) = F(\dots, F(a_i, a_{i+1}), \dots)$$

oraz

$$(2) \quad F(\dots, a_{i+1}, a_i, \dots) = F(\dots, F(a_{i+1}, a_i), \dots),$$

na podstawie własności łączności, którą ze względu na przyjęte założenie działanie (D) posiada.

Z drugiej znów strony mamy

$$F(a_i, a_{i+1}) = F(a_{i+1}, a_i),$$

albowiem zakładamy, że, w razie wykonywania działania (D) na dwóch elementach, działanie to posiada własność przemienności. Mamy więc:

$$F(\dots, F(a_i, a_{i+1}), \dots) = F(\dots, F(a_{i+1}, a_i), \dots)$$

skąd

$$F(\dots, a_i, a_{i+1}, \dots) = F(\dots, a_{i+1}, a_i, \dots) \quad (3)$$

na podstawie równości (1) i (2). Równość (3) wyraża, że transpozycja dwóch elementów sąsiednich ciągu

$$a_1, a_2 \dots a_n \quad (4)$$

w symbolu

$$F(a_1, a_2 \dots a_n) \quad (5)$$

nie pociąga za sobą zmiany elementu, który w zbiorze (Z) temu symbolowi odpowiada.

Zatem na podstawie ogólnego twierdzenia, uzasadnionego w § 26-tym, twierdzenie, które pragnęliśmy udowodnić, zachodzi w podanem brzmieniu.

III. *Jeżeli pewne działanie (D) typu (T) posiada własność przemienności w przypadkach szczególnych, kiedy liczba elementów, podlegających działaniu, równa się liczbie 2 lub liczbie 3, to działanie (D) posiada obie własności, łączności i przemienności, jakkolwiek wartość miałyby liczba elementów, podlegających działaniu.*

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważmy, iż, zachowując w dalszym ciągu symbolistykę, którą posługiwaliśmy się poprzednio, mamy

$$F(a_1, a_2, a_3) = F(a_2, a_3, a_1)$$

oraz

$$F(F(a_2, a_3), a_1) = F(a_1, F(a_2, a_3))$$

na podstawie założenia twierdzenia. Ponieważ zaś na podstawie definicji działania typu T mamy

$$F(a_2, a_3, a_1) = F(F(a_2, a_3), a_1),$$

przeto mamy

$$F(a_1, a_2, a_3) = F(a_1, F(a_2, a_3))$$

Równość ta wyraża, iż działanie (D) posiada własność łączności w razie, kiedy 3 elementy działaniu podlegają. Zatem (tw. I) rozważane działanie posiada własność łączności w przypadku najogólniejszym. Ponieważ zaś na podstawie założenia twierdzenia dzia-

łanie (D) posiada własność przemienności w razie, kiedy dwa elementy działaniu podlegają, przeto działanie to (tw. II) posiada własność przemienności w przypadku najogólniejszym.

Ostatecznie więc, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, działanie (D) posiada własności łączności i przemienności bez względu na liczbę elementów, podlegających działaniu.

U w a g a. W razie przemienności pewnego działania (D) typu (T) własność łączności zachodzi w szerszem znaczeniu, aniżeliśmy wyraz ten określili wyżej, mianowicie: w razie przemienności działania (D) możemy zastąpić, nie sprowadzając zmiany w wyniku, którekolwiek z elementów, działaniu podlegających, przez wynik wykonanego działania (D) na tych elementach. Dodajemy, iż stąd wypływa, że którykolwiek z elementów a , podlegających działaniu (D), możemy bez wywoływania zmiany w wyniku zastąpić przez dowolną liczbę elementów zbioru (Z) tak dobranych, żeby wynik wykonania działania (D) na tych elementach równał się elementowi a .

§ 29. Oznaczając w dalszym ciągu przez (D) pewne działanie typu (T), a przez $F(a, b)$ wynik wykonania tego działania na dwóch elementach a i b odpowiedniego zbioru (Z) uważając przytem element a za pierwszy, a element b za drugi, przyjmijmy

$$c = F(a, b).$$

Możemy tedy rozważać zagadnienia, z których jedno polegałoby na wyznaczeniu elementu a , gdy znane są elementy b i c , a drugie — na tem, żeby wyznaczyć element b , kiedy znane są elementy a i c . Oczywiście, przy pewnych przynajmniej zastrzeżeniach, każde z tych zagadnień posiada jedno przynajmniej rozwiązanie. Zatem związek (1) prowadzi do określenia dwóch działań: jedno z nich δ_1 jest działaniem, którego wykonanie na elementach c i b dostarcza jako wynik element a , a drugie δ_2 określamy przez to, że wynik jego wykonania na elementach c i a jest element b .

Żeby definicya poprzedzająca była całkiem zgodna z ogólnem pojęciem działania, określonem na początku tego rozdziału, oczywiście koniecznem jest i wystarczajacem, ażeby w razie równości.

$$c = c' \text{ i } b = b'$$