

Natomiast twierdzenia § 170-go nie są wystarczające, ażeby odpowiedzieć na każde pytanie typu następującego: *czy w przypadku, kiedy usuniemy z układu (U) pewien taki kompleks twierdzeń (U'), żeby żadne z twierdzeń pozostałych znaczenia nie utraciło, wszystkie lub niektóre z twierdzeń układu (U') należeć będą do następstw logicznych twierdzeń pozostałych?*

Nie możemy myśleć o tem, żeby odpowiedzieć na wszystkie pytania tego rodzaju i poprzestaniemy na podaniu zajmujących wyników, uzyskanych przez Hilberta na tem polu.

Hilbert nazywa liczbami Desarguesa liczby każdego takiego zbioru liczb, który, z ewentualnym wyjątkiem twierdzenia $(16, G_7)$, sprawdza ¹⁾ wszystkie inne twierdzenia podane w § 169-tym, w grupach I, II, III i IV.

Jeżeli pewien zbiór liczb jest takim zbiorem liczb Desarguesa, który sprawdza i twierdzenie $(16, G_7)$ grupy II-giej, to Hilbert nazywa ten zbiór liczb zbiorem liczb Pascala.

Nareszcie każdemu takiemu zbiorowi liczb Desarguesa, który sprawdza tw. $(28, G_{12})$, Hilbert daje miano zbioru liczb Archimedes a.

Po przyjęciu powyższej terminologii, twierdzenia Hilberta opiewają jak następuje:

I. *Istnieją takie zbiory liczb Pascala, które nie są zbiorami liczb Archimedes a.*

II. *Każdy zbiór liczb Archimedes a jest zarazem zbiorem liczb Pascala.*

III. *Istnieją zbiory liczb Desarguesa, które jednak nie należą ani do klasy zbiorów liczb Pascala, ani Archimedes a.*

Pierwsze z tych twierdzeń uzasadniliśmy już w paragrafie poprzedzającym, gdyż zbiór liczb, któreśmy oznaczyli w rzeczonym paragrafie przez (NA) jest właśnie przykładem takiego zbioru liczb Pascala, który nie jest zbiorem liczb Archimedes a. Co się zaś tyczy tw. II i III, to uzasadnimy je w paragrafach następujących.

§ 173. Zamiast tw. II-go paragrafu poprzedzającego, uzasadnimy twierdzenie nieco ogólniejsze, które opiewa jak następuje:

¹⁾ Dla skrócenia omówimy tu, że oznaczony zbiór liczb (L) „sprawdza” takie a takie twierdzenia § 169-go, żeby wyrazić, iż rzeczone twierdzenie zachodzi, jeżeli pod wyrazem „liczba” rozumiemy element zbioru (L) .

I. Jeżeli jest pewność, iż oznaczony zbiór liczb (A) sprawdza¹⁾ wszystkie twierdzenia wyszczególnione w § 169-tym, prócz może twierdzeń $(12, G_9)$ i $(16, G_7)$, to rzeczony zbiór liczb sprawdza w rzeczywistości zawsze i te dwa twierdzenia.

Żeby twierdzenie to uzasadnić założymy, że pewien zbiór liczb (A) rzeczywiście sprawdza założenia rzeczzonego twierdzenia i podamy najpierw w postaci twierdzeń pomocniczych szereg następstw tego założenia. Rzeczzone twierdzenia pomocnicze są w ścisłej analogii do pewnych twierdzeń § 97-go, ponieważ jednak nie zakładamy z góry, żeby dodawanie i mnożenie liczb zbioru (A) posiadały własność przemienności, przeto nie możemy opierać się na twierdzeniach § 97-go.

1°. Jeżeli w iloczynie dwóch liczb zbioru (A) mnożna albo mnożnik równa się modułowi dodawania ξ_0 ²⁾, to bez względu na wartość drugiego czynnika, sam iloczyn równa się także modułowi dodawania.

Ponieważ twierdzenie to nie różni się w rzeczywistości od twierdzenia pomocniczego, podanego pod A (str. 819) w § 170 tym i tamże uzasadnionego, przeto rozwijanie dowodu rzeczzonego twierdzenia na tem miejscu byłoby zbyteczne.

2°. Jeżeli dwie liczby l i l' zbioru (A) sprawdzają jedno z równań

$$(1) \quad l + l' = \xi_0$$

lub

$$(2) \quad l' + l = \xi_0,$$

gdzie ξ_0 oznacza, jak wyżej, moduł dodawania, to liczby te sprawdzają i drugie z tych równań.

Istotnie ze względu na tw. $(17, G_8)$ istnieć będzie niezawodnie w zbiorze (A) liczba l' , sprawdzająca równanie (1) i liczba l'' , sprawdzająca równanie

$$(3) \quad l'' + l = \xi_0.$$

Z tego ostatniego wyniku równanie

$$\text{skąd} \quad (l'' + l) + l' = \xi_0 + l',$$

$$(4) \quad l'' + (l + l') = \xi_0 + l',$$

¹⁾ Zob. uwagę w odsyłaczu na str. 829.

²⁾ Ze względu na dalsze rozważania symbol ξ_0 na moduł dodawania dogodniejszy będzie od symbolu μ , którym posługiwaliśmy się poprzednio.

a ponieważ

$$l'' + (l + l') = l'' + \xi_0 = l'',$$

oraz

$$\xi_0 + l' = l'$$

przeto, ze względu na (4), mamy

$$l'' = l'. \quad (4)$$

Równość ta wyraża, że twierdzenie, o które chodziło, jest uzasadnione.

Żeby wyrazić, że dwie liczby l i l' zbioru (A) sprawdzają jedno, a więc i drugie z równań (1) i (2) orzekamy, że liczby te są symetryczne pomiędzy sobą.

3°. Jeżeli dwie liczby zbioru (A) są symetryczne pomiędzy sobą, to zachodzi jedno z dwojga: albo obie są równe modułowi dodawania, albo jedna jest od modułu dodawania mniejsza, a druga — większa.

Istotnie, oznaczmy przez l i l' dwie symetryczne pomiędzy sobą liczby zbioru (A) . Mamy tedy

$$l + l' = \xi_0. \quad (1)$$

Gdyby jedna z liczb l i l' równała się modułowi dodawania ξ_0 , to suma

$$l + l'$$

równałaby się drugiej z nich, a zatem na podstawie równania (1), ta ostatnia, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, także równałaby się modułowi dodawania. Z drugiej strony, ze względu na tw. (26, G_{11}) równość (1) nie mogłaby zachodzić ani w przypadku, kiedy zachodziłyby jednocześnie nierówności

$$l < \xi_0 \quad \text{ i } \quad l' < \xi_0,$$

ani w przypadku, w którym mielibyśmy jednocześnie

$$l > \xi_0 \quad \text{ i } \quad l' > \xi_0.$$

Zatem jeżeli obie liczby l i l' są od modułu dodawania odmienne, to jedna z nich jest od tego modułu mniejsza, a druga — większa, a to tylko pozostawało jeszcze do udowodnienia.

4°. Jeżeli w iloczynie dwóch liczb zbioru (A) zastąpimy jeden z czynników przez liczbę temu czynnikowi symetryczną, to nowy iloczyn równać się będzie liczbie symetrycznej iloczynowi poprzedniemu.

Istotnie, oznaczmy przez a i b dwie jakiekolwiek liczby zbioru (A) , a przez a' i b' liczby odpowiednio symetryczne liczbom a i b . Na podstawie twierdzeń $(13, G_6)$ i $(14, G_6)$ mamy

$$\begin{aligned} ab + ab' &= a(b + b') = a\xi_0 \\ ab + a'b &= (a + a')b = \xi_0 b, \end{aligned}$$

a ze względu na tw. 1^o z równości powyższych otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} ab + ab' &= \xi_0, \\ ab + a'b &= \xi_0, \end{aligned}$$

które właśnie wyrażają twierdzenie, o uzasadnienie którego chodziło.

5^o. Jeżeli trzy liczby a , b i x zbioru (A) sprawdzają albo równanie

$$(1) \quad b + x = a,$$

albo równanie

$$(2) \quad x + b = a,$$

to nierówność

$$(3) \quad x > \xi_0,$$

gdzie ξ_0 oznacza, jak wyżej, moduł dodawania, równoważna jest nierówności

$$(4) \quad b < a.$$

Istotnie, na podstawie tw. $(26, G_{11})$ § 169-go nierówność (3) i związek

$$b \geq a$$

doprowadziłyby do następstwa niezgodnego z żadnym z równań (1) i (2), zatem związek (3) w razie istnienia jednego ze związków (1) lub (2) pociąga za sobą nierówność (4). Odwrotnie, jeżeli zachodzi nierówność (4) i jedno z równań (1) i (2), to zachodzi nierówność (3), gdyż hipoteza przeciwna przywiodłaby znowu na podstawie twierdzenia $(26, G_{11})$ do następstwa niezgodnego z żadnym z równań (1) i (2). Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

6^o. Jeżeli trzy liczby a , b i b' zbioru (A) sprawdzają nierówności

$$(1) \quad a > \xi_0$$

i

$$(2) \quad b < b',$$

to w takim razie zachodzą nierówności

$$(3) \quad \begin{cases} ab < ab', \\ ba < b'a. \end{cases}$$

Istotnie, oznaczmy przez x liczbę określoną równaniem

$$b' = b + x. \quad (4)$$

Ze względu na (2) i na tw. 5^o, mamy

$$x > \xi_0.$$

a z tej nierówności i nierówności (1) wynikają, na podstawie tw. (27, G_{11}), nierówności następujące:

$$\left. \begin{aligned} ax &> \xi_0, \\ xa &> \xi_0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Z drugiej strony na podstawie tw. (13, G_6) i (14, G_6) wynikają z równości (4) wzory następujące:

$$\begin{aligned} ab' &= ab + ax, \\ b'a &= ba + xa. \end{aligned}$$

Powołując się ponownie na tw. 5^o, wyprowadzamy z tych wzorów i nierówności (5), nierówności (3), o uzasadnienie których właśnie chodziło.

7^o. W zbiorze (A) istnieje pewien podzbiór (Cb) izomorficzny w znaczeniu ściślejszem zbiorowi liczb całkowitych bezwzględnych.

Na podstawie tw. (20, G_9) § 169-go istnieje w zbiorze (A) moduł mnożenia. Moduł ten oznaczmy przez symbol ξ_1 , lepiej odpowiadający obecnie naszym celom, aniżeli symbol m , którym posługiwaliśmy się przy wysłowieniu tw. (20, G_9).

Na podstawie umów już przyjętych, znaczenie symbolu ξ_n jest określne dla wartości 0 i 1 wskaźnika n . Obecnie określamy znaczenie tego symbolu i dla wszystkich od jedności większych wartości całkowitych wskaźnika n , oświadczając, że znaczenie rzezonego symbolu jest takie, iż równość

$$\xi_n = \xi_{n-1} + \xi_1, \quad (1)$$

zachodzi nie tylko przy $n = 1$, ale i przy wszystkich od jedności większych wartościach całkowitych wskaźnika n . Na podstawie zasady indukcji matematycznej definicya ta w połączeniu z definicyami symbolów ξ_0 i ξ_1 , podanymi wyżej, określa rzeczywiście wartości liczb ξ_n dla wszystkich od zera nie mniejszych wartości całkowitych wskaźnika n . Oznaczmy przez (Cb) zbiór wszystkich tych liczb zbioru (A), z których każda równa się jednej z liczb ξ_n ,

przyjmując na n stosownie dobraną od zera nie mniejszą wartość całkowitą i uważajmy za odpowiadające sobie wzajemnie elementy zbioru (Cb) i zbioru liczb całkowitych bezwzględnych liczbę ζ_n zbioru (Cb) i liczbę n zbioru liczb całkowitych bezwzględnych. Powiadam, że ta odpowiedniość wzajemna elementów obu zbiorów czyni zadość (§ 95) wszystkim warunkom izomorfizmu.

Żeby przekonać się o tem, upewnijmy się najpierw, że mamy

$$(2) \quad \zeta_1 > \zeta_0.$$

W tym celu oznaczmy przez ζ'_1 liczbę symetryczną liczbie ζ_1 ; mamy tedy

$$(3) \quad \zeta_1 + \zeta'_1 = \zeta_0.$$

Liczba ζ_1 liczbie ζ_0 równać się nie może, gdyż w takim razie, przy dowolnie przyjętej liczbie a zbioru (A) nie mielibyśmy

$$a \cdot \zeta_1 = a,$$

lecz ze względu na tw. 1^o zachodziłaby równość

$$a\zeta_1 = \zeta_0$$

bez względu na wartość liczby a . Skoro zaś liczba ζ_1 jest od liczby ζ_0 odmienna, to ze względu na tw. 3^o jedna z liczb ζ_1 i ζ'_1 jest od liczby ζ_0 mniejsza, a druga — większa.

Z drugiej znów strony, na podstawie własności rozdzielnosci mnożenia liczb zbioru (A) w stosunku do dodawania, z równości (3) mamy

$$\zeta_1\zeta'_1 + \zeta_1'^2 = \zeta_0\zeta'_1,$$

a ponieważ

$$\zeta_1\zeta'_1 = \zeta_1'$$

na podstawie definicyi modułu mnożenia, ponieważ nadto, ze względu na twierdzenie 1^o zachodzi równość

$$\zeta'_1\zeta_0 = \zeta_0,$$

przeto mamy

$$(4) \quad \zeta'_1 + \zeta_1'^2 = \zeta_0.$$

Gdybyśmy mieli

$$\zeta'_1 > \zeta_0,$$

to na podstawie tw. (27, G_{11}) mielibyśmy

$$\zeta_1'^2 > \zeta_0,$$

a zatem ze względu na $(26, G_{11})$ równość (4) nie mogłaby zachodzić. Ponieważ więc nie jest

$$\xi'_1 > \xi_0.$$

przeto (tw. 3^o) mamy

$$\xi_1 > \xi_0.$$

Zatem nierówność (2) rzeczywiście zachodzi.

Oznaczmy teraz przez n i p dwie jakiekolwiek, byle od zera nie mniejsze liczby całkowite i uważajmy liczby ξ_n i ξ_p zbioru (Cb) .

W przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$n = p + 1,$$

nierówność

$$n > p \tag{5}$$

pociąga za sobą nierówność

$$\xi_n > \xi_p \tag{6}$$

na podstawie twierdzenia 5^o oraz związków (1) i (2). Gdyby zaś przy pewnej wartości różnicy

$$n - p$$

nierówność (5) pociągała za sobą (6), to okoliczność ta zachodziłaby jeszcze i przy wartości liczby n większej o jedność, gdyż mielibyśmy

$$\xi_n > \xi_p$$

oraz

$$\xi_{n+1} > \xi_n,$$

skąd wynikałoby rzeczywiście nierówność (6). Zatem w rzeczywistości nierówność (5) pociąga za sobą w każdym razie nierówność (6). Ponieważ zaś z definicyi symbolów ξ_n i ξ_p wynika bezpośrednio, że równość

$$n = p \tag{7}$$

pociąga za sobą równość

$$\xi_n = \xi_p, \tag{8}$$

przeto stwierdzamy ostatecznie, że nierówność (5) równoważna jest nierówności (6), a równość (7) — równości (8).

Ponieważ ze względu na równość (1), mamy

$$\xi_p + \xi_n = \xi_p + (\xi_{n-1} + \xi_1) = (\xi_p + \xi_{n-1}) + \xi_1,$$

przeto drogą indukcji matematycznej łatwo upewnimy się, że mamy

$$(9) \quad \zeta_p + \zeta_n = \zeta_{p+n},$$

jakiegokolwiek, byle od zera nie mniejsze wartości całkowite miałyby wskaźniki p i n .

Uwzględniając równość

$$\zeta_p \cdot \zeta_1 = \zeta_p,$$

która wynika bezpośrednio z tego, że symbol ζ_1 przedstawia moduł mnożenia, wyprowadzamy z równości (1) równości następujące:

$$\zeta_p \cdot \zeta_n = \zeta_p \cdot (\zeta_{n-1} + \zeta_1) = \zeta_p \cdot \zeta_{n-1} + \zeta_p,$$

skąd opierając się na twierdzeniu polegającym na równości (9), łatwo wywnioskować można, że mamy

$$\zeta_p \cdot \zeta_n = \zeta_{p \cdot n}$$

przy wszystkich od zera nie mniejszych wartościach całkowitych wskaźników p i n .

Na podstawie uzyskanych wyników, wyżej określona odpowiedniość wzajemna liczb zbioru (Cb) i liczb całkowitych bezwzględnych spełnia rzeczywiście wszystkie warunki ścisłego izomorfizmu. Okoliczność ta stanowi oczywiście dowód na to, że twierdzenie, o które chodziło, jest uzasadnione.

U w a g a. Z dowiedzionego twierdzenia wynika oczywiście, że dodawanie i mnożenie liczb zbioru (Cb) posiadają własność przemienności.

8°. W zbiorze (A) istnieje pewien podzbiór (Wb) izomorficzny w znaczeniu ściślejszem zbiorowi liczb wymiernych bezwzględnych.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, przyjmiemy za punkt wyjścia uwagę następującą: Jeżeli oznaczymy przez n i p dwie liczby całkowite, sprawdzające związki

$$n \geq 0, \quad p \geq 1,$$

to na podstawie tw. (19, G_9) istnieć będą dwie, oznaczonej wartości liczby u i v zbioru (A), sprawdzające równania

$$(1) \quad \zeta_p \cdot u = \zeta_n$$

$$(2) \quad v \cdot \zeta_p = \zeta_n.$$

Z równania (1) mamy

$$(\zeta_p \cdot u) \cdot \zeta_p = \zeta_n \cdot \zeta_p,$$

zatem, ze względu na $(15, G_6)$, mamy

$$\zeta_p \cdot (u \cdot \zeta_p) = \zeta_n \cdot \zeta_p,$$

a ponieważ, na podstawie uwagi przy twierdzeniu 7^o, mamy

$$\zeta_n \cdot \zeta_p = \zeta_p \cdot \zeta_n,$$

przeto zachodzi i równość

$$\zeta_p \cdot (u \cdot \zeta_p) = \zeta_p \cdot \zeta_n.$$

Na podstawie tej równości możemy uczynić zadość równaniu

$$\zeta_p \cdot x = \zeta_p \cdot \zeta_n,$$

przyjmując wedle upodobania

$$x = \zeta_n \quad \text{lub} \quad x = u \cdot \zeta_p,$$

a ponieważ ze względu na nierówność

$$\zeta_p \neq \zeta_0,$$

i na tw. $(19, G_9)$ istnieje jedna tylko wartość na x , sprawdzająca powyższe równanie, przeto mamy

$$u \cdot \zeta_p = \zeta_n.$$

Zestawiając tę równość z równością (2) i powołując się ponownie na tw. $(19, G_9)$, stwierdzamy, że zachodzi równość

$$u = v.$$

Z tego wynika okoliczność następująca: każdej liczbie ułamkowej bezwzględnej

$$\frac{n}{p}$$

odpowiada oznaczonej wartości liczba $w_{n,p}$ zbioru (A) , którą określić możemy przez to, że ona sprawdza którekolwiek z równań

$$w_{n,p} \cdot \zeta_p = \zeta_n$$

i

$$\zeta_p \cdot w_{n,p} = \zeta_n.$$

Oznaczmy przez (Wb) zbiór wszystkich liczb $w_{n,p}$ i umówmy się, że liczbę $w_{n,p}$ i liczbę ułamkową

$$\frac{n}{p}$$

uważać będziemy za odpowiadające pomiędzy sobą wzajemnie elementy zbioru (Wb) i zbioru liczb ułamkowych bezwzględnych. Powiadam, że ta odpowiedniość wzajemna liczb obu zbiorów czyni zadość wszystkim warunkom ścisłego izomorfizmu. Istotnie, uważajmy dwie liczby

$$w_{n,p} \quad \text{ i } \quad w_{n',p'}$$

zbioru (Wb) . Mamy

$$\begin{aligned} w_{n,p} \cdot \zeta_p &= \zeta_n \\ w_{n',p'} \cdot \zeta_{p'} &= \zeta_{n'}, \end{aligned}$$

skąd

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} w_{n,p} \cdot \zeta_{p \cdot p'} &= \zeta_{n \cdot p'}, \\ w_{n',p'} \cdot \zeta_{p \cdot p'} &= \zeta_{n' \cdot p}, \end{aligned} \right.$$

na podstawie związków

$$\begin{aligned} \zeta_p \cdot \zeta_{p'} &= \zeta_{p'} \cdot \zeta_p = \zeta_{p \cdot p'} \\ \zeta_n \cdot \zeta_{p'} &= \zeta_{n \cdot p'} \\ \zeta_{n'} \cdot \zeta_p &= \zeta_{n' \cdot p}. \end{aligned}$$

Ponieważ równość

$$(4) \quad n \cdot p' = n' \cdot p$$

równoważna jest równości

$$\zeta_{n \cdot p'} = \zeta_{n' \cdot p},$$

przeto ze względu na (3), oraz na nierówność

$$\zeta_{p \cdot p'} > \zeta_0$$

i na $(19, G_9)$, równość (4) równoważna jest równości

$$(5) \quad w_{n,p} = w_{n',p'},$$

a ponieważ równość (4) jest równoważna równości

$$(6) \quad \frac{n}{p} = \frac{n'}{p'},$$

przeto równości (5) i (6) są równoważne pomiędzy sobą.

Opierając się na tw. 6° i na równoważności związków (5) i (6), stwierdzamy łatwo, że nierówność

$$w_{n,p} < w_{n',p'} \quad (7)$$

równoważna jest nierówności

$$\frac{n}{p} < \frac{n'}{p'}. \quad (8)$$

Z równości (3) mamy

$$(w_{n,p} + w_{n',p'}) \cdot \zeta_{p \cdot p'} = \zeta_{n \cdot p'} + \zeta_{n' \cdot p} = \zeta_{n \cdot p' + n' \cdot p},$$

mamy więc

$$w_{n,p} + w_{n',p'} = w_{n \cdot p' + n' \cdot p, p \cdot p'}.$$

Równość ta wyraża, że sumie dwóch liczb zbioru (Wb) odpowiada liczba ułamkowa równa sumie liczb ułamkowych, odpowiadających odpowiednio rozważanym liczbom zbioru (Wb).

Zwróćmy się teraz do równości

$$w_{n,p} \cdot \zeta_p = \zeta_n, \quad (9)$$

$$w_{n',p'} \cdot \zeta_{p'} = \zeta_{n'}, \quad (10)$$

określających liczby $w_{n,p}$ i $w_{n',p'}$.

Z równości (10) mamy:

$$w_{n,p} \cdot (w_{n',p'} \cdot \zeta_{p'}) = \zeta_{n'} \cdot w_{n,p},$$

skąd

$$\{w_{n,p} \cdot (w_{n',p'} \cdot \zeta_{p'})\} \zeta_p = (\zeta_{n'} \cdot w_{n,p}) \cdot \zeta_p.$$

Na podstawie własności łączności mnożenia liczb zbioru (A) i uwag przy tw. 7°, z równości poprzedzającej wynika równość następująca:

$$(w_{n,p} \cdot w_{n',p'}) \cdot (\zeta_p \cdot \zeta_{p'}) = \zeta_{n'} \cdot (w_{n,p} \cdot \zeta_p). \quad (11)$$

Ze względu na równość

$$\zeta_p \cdot \zeta_{p'} = \zeta_{p \cdot p'},$$

oraz na równanie (9) i na równości

$$\zeta_{n'} \cdot \zeta_n = \zeta_n \cdot \zeta_{n'} = \zeta_{n \cdot n'},$$

z równości (11) wynika równość

$$(w_{n,p} \cdot w_{n',p'}) \cdot \zeta_{p \cdot p'} = \zeta_{n \cdot n'},$$

skąd

$$w_{n,p} \cdot w_{n',p'} = w_{n \cdot n', p \cdot p'}.$$

Równość ta wyraża, że iloczynowi dwóch liczb zbioru (Wb) odpowiada liczba ułamkowa równa iloczynowi liczb ułamkowych, odpowiadających odpowiednio rozważanym liczbom zbioru (Wb).

Z ogółu uzyskanych wyników wypływa, że zbiór (Wb) jest izomorficzny zbiorowi liczb ułamkowych bezwzględnych. Ponieważ zaś zbiór liczb całkowitych bezwzględnych jest izomorficzny w znaczeniu ściślejszem pewnemu podzbiorowi liczb ułamkowych bezwzględnych, przeto, jak to czytelnik z łatwością sam szczegółowo wykaże, zbiór liczb (Wb) jest izomorficzny zbiorowi wszystkich liczb wymiernych bezwzględnych. Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie pomocnicze 8^o.

U w a g a I. Zbiór liczb, któryśmy oznaczyli przez (Cb) przy rozwijaniu dowodu twierdzenia pomocniczego 7^o jest podzbiorem zbioru (Wb).

U w a g a II. W następstwie dowiedzionego twierdzenia, dodawanie i mnożenie liczb zbioru (Wb) posiadają własność przemienności.

9^o. *W zbiorze (A) istnieje pewien podzbiór (W) izomorficzny w znaczeniu ściślejszem zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych wymiernych.*

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zwrócimy się najpierw do twierdzenia (17, G_8) § 169-go. Na podstawie tego twierdzenia zachodzi okoliczność następująca: jakiekolwiek liczby u i v zbioru (Wb) rozważalibyśmy, zawsze istnieje będzie w zbiorze (A) oznaczonej wartości liczba x , sprawdzająca równanie

$$(1) \quad v + x = u$$

i oznaczonej wartości liczba y , sprawdzająca równanie

$$(2) \quad y + v = u.$$

Z równania (2) mamy

$$(3) \quad v + (y + v) = v + u.$$

Ponieważ zaś na podstawie uwagi II-giej przy twierdzeniu poprzedzającym dodawanie liczb zbioru (Wb) posiada własność przemienności, przeto równanie (3) równoważne jest równaniu następującemu:

$$v + (y + v) = u + v.$$

Na podstawie tw. (11, G_6) to równanie jest znowu równoważne następującemu:

$$(v + y) + v = u + v, \quad (4)$$

z którego wynika, że

$$v + y = u, \quad (5)$$

albowiem, ze względu na (4), uczynimy zadość równaniu

$$z + v = u + v,$$

przyjmując na z wartość równą którejkolwiek z liczb

$$v + y \text{ lub } u,$$

a z drugiej strony powyższe równanie {tw. (17, G_8)} określa jednoznacznie wartość liczby z .

Opierając się ponownie na tw. (17, G_8), wnosimy z równości (1) i (5), że mamy

$$x = y.$$

Z równości tej wynika, co następuje: każdym dwom liczbom u i v zbioru (Wb) odpowiada jednej wartości liczba w , która sprawdza każde z równań

$$\left. \begin{aligned} v + w &= u, \\ w + v &= u. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Oznaczmy przez (W) zbiór wszystkich tych liczb zbioru (A), z których każda w ma wartość, mogącą być określoną równaniami postaci (6).

Oznaczmy przez α i β liczby wymierne bezwzględne homologiczne odpowiednio w zbiorze liczb wymiernych bezwzględnych liczbom u i v zbioru (Wb) i umówmy się, że liczbę w zbioru (W) i tę liczbę γ zbioru liczb rzeczywistych wymiernych, której wartość określona jest wzorem

$$\gamma = \beta - \alpha$$

uważać będziemy za odpowiadające sobie wzajemnie elementy zbioru (W) i zbioru liczb rzeczywistych wymiernych. Czytelnik sam udowodni z łatwością, że powyższa odpowiedniość wzajemna liczb zbioru (W) i liczb rzeczywistych wymiernych sprawdza w zupełności wszystkie warunki izomorfizmu (§ 95). Zatem uważamy twierdzenie 9° za uzasadnione.

U w a g a. Ze względu na izomorfizm zbioru (W) i zbioru liczb rzeczywistych wymiernych, dodawanie i mnożenie liczb zbioru (W) posiadają własność przemienności, a z tego wynika, że istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania i jeden tylko rodzaj dzielenia dla liczb zbioru (W).

10°. Jeżeli tylko oznaczona liczba l zbioru (A) sprawdza nierówność

$$(1) \quad l > \xi_0,$$

gdzie ξ_0 oznacza, jak wyżej, moduł dodawania liczb zbioru (A), to zawsze istnieje będzie taka liczba w zbioru (W), która sprawdzać będzie nierówności następujące:

$$(2) \quad \xi_0 < w < l.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zwrócimy się do tw. (28, G_{12}). Na podstawie twierdzenia tego zawsze istnieje będzie taka liczba całkowita bezwzględna n , żeby suma n składników równych liczbie l większa była od liczby ξ_1 zbioru, któreśmy oznaczyli wyżej przez (Cb). Na podstawie definicji podanej przy rozwijaniu dowodu twierdzenia pomocniczego 7°, symbol ξ_n przedstawiać będzie oznaczoną liczbę zbioru (Cb). Oznaczmy przez w taką liczbę zbioru (A), która sprawdza równanie

$$(3) \quad \xi_n \cdot w = \xi_1.$$

Ze względu na tw. (19, G_9) wartość liczby w oznaczona będzie w zupełności, a na podstawie definicji wprowadzonych przy rozwijaniu dowodu twierdzenia pomocniczego 8° liczba w należec będzie do zbioru (Wb). Ponieważ zbiór (Wb) jest podzbiorem zbioru (W), przeto liczba w jest liczbą zbioru (W).

Na podstawie umów wprowadzonych przy rozwijaniu dowodu twierdzenia 8°, liczba w jest liczbą homologiczną (§ 95) liczbie ułamkowej

$$\frac{1}{n},$$

a liczba ξ_0 — liczbie 0. Mamy więc

$$(4) \quad w > \xi_0.$$

Jakąkolwiek liczbę a zbioru (A) rozważalibyśmy, każdy z iloczynów

$$(5) \quad a \cdot \xi_n \text{ i } \xi_n \cdot a \quad (n > 0)$$

równa się sumie tylu składników równych liczbie a , ile wynosi liczba całkowita n , albowiem twierdzenie to zachodzi w razie równości

$$n = 1,$$

a gdyby ono zachodziło przy

$$n = k,$$

to ze względu na związek

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \xi_1.$$

zachodziłoby ono i przy

$$n = k + 1.$$

Na podstawie tej uwagi, równości (3) i definicyi liczby n , suma n składników równych liczbie w jest mniejsza od sumy tylu składników równych liczbie l . Opierając się na tw. (26, G_{11}) wnosiśmy stąd, że mamy

$$w < l. \quad (6)$$

Z nierówności (4) i (6) wynika, że równaniem (3) określona liczba w zbioru (W) sprawdza nierówności (2).

Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

11°. *Jakąkolwiek liczbę zbioru (A) oznaczylibyśmy przez l , zawsze znajdują się w zbiorze (W) takie dwie liczby w_1 i w_2 , żebyśmy mieli*

$$w_1 < l < w_2. \quad (1)$$

Istotnie, na podstawie tw. (28, G_{12}) § 169-go, zawsze znajdzie się w zbiorze, któryśmy poprzednio oznaczyli (Cb), pewna liczba ξ_n , sprawdzająca nierówność

$$l < \xi_n. \quad (2)$$

Oznaczmy przez l' liczbę symetryczną liczbie l . Liczba l' sprawdzać będzie równania

$$l + l' = l' + l = \xi_0. \quad (3)$$

Opierając się znowu na twierdzeniu (28, G_{12}) stwierdzamy istnienie takiej liczby ξ_p zbioru (Cb), która sprawdzać będzie nierówność

$$l' < \xi_p.$$

Z tego związku i ze związków (3) wynikają związki

$$\xi_0 = l' + l < \xi_p + l,$$

skąd

$$\xi_0 < \xi_p + l.$$

Oznaczywszy przez ζ'_p liczbę symetryczną liczbie ζ_p , wyprowadzamy z tej nierówności związek

$$\zeta'_p + \zeta_0 < \zeta'_p + (\zeta_p + l),$$

skąd ze względu na równości

$$\begin{aligned} \zeta'_p + \zeta_0 &= \zeta'_p \\ \zeta'_p + (\zeta_p + l) &= (\zeta'_p + \zeta_p) + l = \zeta_0 + l = l, \end{aligned}$$

wynika nierówność

$$(4) \quad \zeta'_p < l.$$

Ponieważ każda z liczb ζ_n i ζ'_p należy do zbioru (W) , ponieważ nadto rzeczone liczby sprawdzają nierówności (2) i (4), przeto dostatecznem jest wyznaczyć liczby w_1 i w_2 z równości

$$w_1 = \zeta'_p, \quad w_2 = \zeta_n,$$

żeby liczby te czyniły zadość wszystkim warunkom twierdzenia. Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

12°. Jeżeli z dwóch jakichkolwiek liczb zbioru (A) jedna l mniejsza jest od drugiej l_1 , to w zbiorze (W) zawsze znajdzie się taka liczba w , żebyśmy mieli

$$(1) \quad l < w < l_1.$$

Istotnie, ze względu na twierdzenie poprzedzające znajdzie się w zbiorze (W) pewna liczba w_0 , która sprawdzać będzie nierówność

$$(2) \quad w_0 < l.$$

Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez x liczbę określoną równaniem

$$(3) \quad l + x = l_1,$$

to na podstawie tw. 5° zachodzić będzie nierówność

$$x > \zeta_0.$$

Zatem, na podstawie tw. 10° istnieć będzie w zbiorze (W) pewna liczba u , która sprawdzać będzie nierówności

$$(4) \quad \zeta_0 < u < x.$$

Uważajmy teraz liczbę y , określoną równaniem

$$(5) \quad w_0 + y = l.$$

Ze względu na związek (2) i na tw. 5° mamy

$$(6) \quad y > \zeta_0.$$

Oznaczmy ogólnie przez s_k sumę tylu liczb równych liczbie u , ile wynosi dowolnie przyjęta, byle od jedności nie mniejsza liczba całkowita k . Na podstawie tw. (28, G_{12}) znajdzie się pewna taka całkowita i od zera większa liczba n , żebyśmy mieli

$$s_n > y.$$

Jeżeli więc przyjmiemy

$$s_0 = \zeta_0,$$

to, ze względu na (6), zawsze istnieć będzie pewna jedna taka liczba całkowita p ($p > 0$), żebyśmy mieli

$$s_{p-1} \leq y < s_p. \quad (7)$$

Przyjmijmy

$$w = w_0 + s_p. \quad (8)$$

Ze związków (5), (7) i (8) wynika nierówność

$$l < w. \quad (9)$$

Z drugiej strony te same związki pociągają za sobą związek

$$w_0 + s_{p-1} < l,$$

skąd, na podstawie jednej z nierówności (4), wyprowadzamy nierówność

$$(w_0 + s_{p-1}) + u < l + x$$

czyli

$$w_0 + (s_{p-1} + u) < l + x. \quad (10)$$

Uwzględniając z jednej strony równość

$$s_{p-1} + u = s_p$$

i równość (8), a z drugiej równość (3), wyprowadzamy z nierówności (10) nierówność

$$w < l_1. \quad (11)$$

Ponieważ liczba w , określona wzorem (8) oczywiście należy do zbioru (W) i sprawdza nierówności (9) i (11), przeto liczba ta czyni zadość w zupełności warunkom twierdzenia. Zatem uzasadniłyśmy twierdzenie, o które właśnie chodziło.

13°. Każdej liczbie zbioru (A) odpowiada jeden przynajmniej taki przekrój¹⁾ zbioru (W), na którym ona jest położona.

¹⁾ Na str. 314—315 podaliśmy ogólną definicję przekroju oznaczonego zbioru wielkości w znaczeniu ścisłym.

Istotnie, jakkolwiek liczbę zbioru (A) oznaczylibyśmy przez l zawsze istnieć będzie, na podstawie tw. 11^o nieskończenie wiele liczb zbioru (W) mniejszych od liczby l i nieskończenie wiele liczb większych od tejże liczby. Jeżeli więc oświadczymy, że oznaczamy przez (L_1) zbiór wszystkich od liczby l mniejszych liczb zbioru (W), a przez (L_2) zbiór wszystkich innych liczb zbioru (W), to uzyskamy właśnie taki przekrój zbioru (W), na którym liczba l będzie położona. Uzasadniliśmy więc twierdzenie, o które chodziło.

14^o. Oznaczmy przez (Z_1) i (Z_2) dwa takie podzbiory zbioru (A), żeby żadna liczba zbioru (Z_1) nie była większa od jakiegokolwiek liczby zbioru (Z_2) i żeby nadto każdej, byle od modułu dodawania ξ_0 większej, liczbie ε zbioru (W) odpowiadały dwie liczby w_1 i w_2 , należące odpowiednio do zbiorów (Z_1) i (Z_2), a sprawdzające przytem nierówność¹⁾

$$(1) \quad w_2 - w_1 < \varepsilon.$$

W takim razie z dwóch nierównych pomiędzy sobą liczb zbioru (A) co najwyżej jedna tylko może nie być ani mniejszą od żadnej liczby zbioru (Z_1), ani większą od żadnej liczby zbioru (Z_2).

Istotnie, założmy chwilowo, że wbrew brzmieniu twierdzenia, istnieją w zbiorze (A) dwie nierówne pomiędzy sobą liczby a i b ($a < b$), z których każda ma tę własność, iż nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (Z_1), ani większa od żadnej liczby zbioru (Z_2). Ponieważ liczby a i b sprawdzają nierówność

$$a < b,$$

przeto (tw. 12^o) znajdzie się w zbiorze (W) pewna liczba w' sprawdzająca nierówności

$$(2) \quad a < w' < b.$$

Z powodów analogicznych znajdzie się następnie w zbiorze (W) taka liczba w'' , żebyśmy mieli

$$(3) \quad w' < w'' < b.$$

Ponieważ, ze względu na chwilowo przyjęte założenie, każda liczba w_1 zbioru (Z_1) sprawdza nierówność

$$(4) \quad w_1 \leq a,$$

a każda liczba w_2 zbioru (Z_2) — nierówność

$$(5) \quad b \leq w_2,$$

¹⁾ Zob uwagę przy tw. 10^o.

przeto ze związków (2), (3), (4) i (5) wynikają związki

$$w_1 < w' < w'' < w_2,$$

skąd, uwzględniając izomorfizm zbioru (W) i zbioru liczb wymiernych, łatwo wyprowadzamy nierówność

$$w_2 - w_1 > w'' - w'.$$

Zatem gdybyśmy na ε przyjęli taką wartość, żebyśmy mieli

$$\xi_0 < \varepsilon \leq w'' - w',$$

to, wbrew założeniu twierdzenia, tej wartości na ε nie odpowiadałby żaden, nierówność (1) sprawdzający układ liczb w_1 i w_2 , należących odpowiednio do zbiorów (Z_1) i (Z_2). Wnosimy stąd, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Obecnie możemy już łatwo uzasadnić tw. I-sze str. 830, o które nam właściwie chodzi. W tym celu oznaczmy przez a i b dwie dowolnie przyjęte liczby ze zbioru (A). Na podstawie tw. 13^o liczbom a i b odpowiadać będą dwa przekroje (P) i (Q) zbioru (W), na których liczby te będą odpowiednio położone.

Oznaczmy przez (P_1) i (P_2) odpowiednio liczby pierwszej i drugiej kategorii zbioru (W) w stosunku do przekroju (P), a przez (Q_1) i (Q_2) elementy analogiczne w stosunku do przekroju (Q). Oznaczmy przez α_1 , α_2 , β_1 i β_2 cztery liczby, należące odpowiednio do zbiorów (P_1), (P_2), (Q_1) i (Q_2).

Na podstawie tw. (26, G_{11}) § 169 go mamy

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\leq a + b \leq \alpha_2 + \beta_2 \\ \beta_1 + \alpha_1 &\leq b + a \leq \beta_2 + \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

a ponieważ mamy

$$\beta_1 + \alpha_1 = \alpha_1 + \beta_1; \quad \beta_2 + \alpha_2 = \alpha_2 + \beta_2,$$

przeto mamy

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq b + a \leq \alpha_2 + \beta_2, \quad (7)$$

Oznaczmy przez (Z_1) zbiór wszystkich liczb, z których każda równa się sumie jednej liczby zbioru (P_1) i jednej liczby zbioru (Q_1), a przez (Z_2) zbiór wszystkich liczb, z których każda równa się sumie jednej liczby zbioru (P_2) i jednej liczby zbioru (Q_2). Opierając się na ścisłym izomorfizmie zbioru (W) i zbioru liczb rzeczy-

wistych wymiernych, stwierdzamy natychmiast, że zbiory (Z_1) i (Z_2) spełniają wszystkie założenia tw. 14°. Ponieważ zaś związki (6) i (7) wyrażają, że liczby równe odpowiednio sumom

$$a + b \quad \text{ i } \quad b + a,$$

posiadają tę wspólną własność, iż żadna z nich nie jest, ani mniejsza od jednej z liczb zbioru (Z_1) , ani większa od jednej z liczb zbioru (Z_2) , przeto na podstawie tw. 14°, mamy

$$a + b = b + a,$$

czyli dla zbioru (A) tw. $(12, G_6)$ zachodzi. Pozostaje więc tylko do udowodnienia, że tw. $(16, G_7)$ zachodzi także dla zbioru (A) . W tym celu uważajmy znowu dwie jakiegokolwiek liczby a i b zbioru (A) . Gdyby jedna przynajmniej z tych liczb równała się modułowi dodawania ξ_0 , to na podstawie twierdzenia 1° równość

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

o której uzasadnienie właśnie chodzi byłaby rzeczywiście spełniona. Zakładamy tedy, że żadna z rozważanych liczb modułowi dodawania równa nie jest. W następstwie tego założenia i twierdzenia 3° istnieje pewna liczba a' równa albo symetryczna liczbie a , ale sprawdzająca w każdym razie nierówność

$$a' > \xi_0.$$

Z tegoż powodu istnieje także pewna liczba b' równa lub symetryczna liczbie b , lecz sprawdzająca w każdym razie równość

$$b' > \xi_0.$$

Opierając się na twierdzeniu 4° i definicyi liczb a' i b' , stwierdzamy, że zachodzi jedno z dwojga: albo iloczyn

$$ab, \quad a'b', \quad ba \quad \text{ i } \quad b'a',$$

sprawdzają równości

$$ab = a'b',$$

$$ba = b'a',$$

albo równości

$$ab + a'b' = \xi_0,$$

$$ba + b'a' = \xi_0.$$

W obu przypadkach równość

$$a'b' = b'a'$$

pociągałaby za sobą równość

$$ab = ba. \quad (8)$$

Wnosimy stąd, że twierdzenie, o które nam chodzi, zostanie uzasadnione w zupełności, jeżeli tylko stwierdzimy, że równość (8) jest spełniona w przypadku szczególnym, kiedy zachodzą nierówności

$$\left. \begin{array}{l} a > \xi_0 \\ b > \xi_0. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Założmy więc, że te nierówności rzeczywiście zachodzą i uważamy zbiory liczb, któreśmy wyżej oznaczyli przez (P_1) , (P_2) , (Q_1) i (Q_2) . Opierając się na nierównościach (4) i na tw. 12^o, stwierdzimy z łatwością, że każdy ze zbiorów (P_1) i (Q_1) obejmuje nieskończenie wiele liczb większych od modułu dodawania ξ_0 . Oznaczmy przez (P'_1) i (Q'_1) te zbiory liczb, w które przechodzą odpowiednio zbiory (P_1) i (Q_1) po usunięciu z nich wszystkich liczb mniejszych od modułu dodawania.

Jeżeli oznaczmy przez α'_1 , α_2 , β'_1 i β_2 jakiegokolwiek, byle do zbiorów (P'_1) , (P_2) , (Q'_1) i (Q_2) należące odpowiednio liczby, to opierając się na tw. 6^o, z łatwością upewnimy się, że mamy

$$\alpha'_1 \beta'_1 \leq ab \leq \alpha_2 \beta_2 \quad (10)$$

oraz

$$\beta'_1 \alpha'_1 \leq ba \leq \beta_2 \alpha_2,$$

a ponieważ

$$\beta'_1 \alpha'_1 = \alpha'_1 \beta'_1; \quad \beta_2 \alpha_2 = \alpha_2 \beta_2,$$

przeto mamy jeszcze

$$\alpha'_1 \beta'_1 \leq ba \leq \alpha_2 \beta_2. \quad (11)$$

Oznaczmy teraz przez (Z_1) zbiór wszystkich liczb, z których każda równa się iloczynowi jednej liczby zbioru (P'_1) i jednej liczby zbioru (Q'_1) , a przez (Z_2) zbiór wszystkich liczb, z których każda równa się iloczynowi jednej liczby zbioru (P_2) i jednej liczby zbioru (Q_2) . Opierając się na ścisłym izomorfizmie zbioru liczb (W) i zbioru liczb rzeczywistych wymiernych stwierdzamy bez trudności, że zbiory (Z_1) i (Z_2) spełniają w zupełności założenia tw. 14^o. Stąd

zaś wnosimy, uwzględnając właściwą treść związków (10) i (11), że równość

$$ab = ba,$$

o którą jedynie jeszcze chodziło jest rzeczywiście spełniona.

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie podane na czele niniejszego paragrafu, a tem samem uzasadniliśmy i przypadek szczególny tego twierdzenia, polegający na tw. II-giem paragrafu poprzedzającego.

Z tw. I-go niniejszego paragrafu wynika bezpośrednio twierdzenie następujące.

II. *Gdybyśmy z układu twierdzeń wyszczególnionych w § 169-tym usunęli twierdzenia (12, G_6) i (16, G_7), to rzeczony układ i po tej zmianie nie przestałby stanowić układu własności charakterystycznych typu liczb rzeczywistych.*

§ 174. Paragraf ten poświęcimy udowodnieniu tw. III-go. Żeby rzeczzone twierdzenie uzasadnić, należy tylko podać przykład takiego zbioru liczb (N, AP) Desarguesa, dla którego nie zachodziłyby ani postulat Archimedes'a, ani twierdzenie, wyrażające własność przemienności mnożenia. Przykład, który zamierzamy podać, nie różni się zasadniczo od przykładu podanego przez samego Hilberta w dziele cytowanym wyżej kilkakrotnie, ale żeby uzyskać większą jasność, przedstawimy definicje zasadnicze, określające zbiór liczb, o które chodzi, w postaci odmiennej od tej, którą przyjął był Hilbert.

Oznaczmy przez (D) układ umów, na podstawie których każde dwójce liczb całkowitych rzeczywistych odpowiada, w razie, kiedy oznaczymy, która mianowicie z liczb całkowitych, stanowiących razem jedną taką dwójkę, uważana ma być za pierwszą, a która za drugą, oznaczona liczba rzeczywista i załóżmy, że układ umów (D) czyni zadość warunkom następującym.

Jeżeli oznaczymy przez a_{ik} liczbę rzeczywistą, która na podstawie układu umów (D) odpowiada układowi liczb całkowitych

$$i \quad i \quad k$$

w przypadku, kiedy liczbę i uważamy za pierwszą, a liczbę k za drugą, to w takim razie:

1^o Istnieje pewna taka liczba całkowita p , iż nierówność

$$(1) \quad i < p$$