

XII. Problem mierzenia.

§ 101. Ze stanowiska arytmetyki problem mierzenia polega na tem, żeby dla danego zbioru rzeczy (E), które liczbami nie są, ustawić, zastosowując się do pewnych ogólnych zasad, które omówimy niżej, taki układ umów, żeby na podstawie tych umów, po oznaczeniu pewnego, mniej lub więcej dowolnie przyjętego, elementu u zbioru (E) jako takiego, któremu odpowiadać ma liczba 1, każdemu innemu elementowi e rozważanego zbioru odpowiadała oznaczona liczba l pewnego zbioru liczb (L), obejmującego oczywiście w każdym razie liczbę 1. Element u zowie się tedy jednostką miary, a liczba l zbioru (L), odpowiadająca jakiegokolwiek oznaczonemu elementowi e zbioru (E), — miarą elementu e . Na podstawie definicji tej miara jednostki miary u równa się jedności.

Po rozwiązaniu problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru (E) ze stanowiska arytmetyki, powstaje problem mierzenia elementów tegoż zbioru ze stanowiska przyrodoznawstwa; problem ten polega na tem, żeby po dokonaniu wyboru jednostki miary wyznaczyć na podstawie pewnego układu danych miarę oznaczonego elementu rozważanego zbioru. Problemy tego rodzaju przybierają najróżnorodniejsze postaci i należą wyłącznie do poszczególnych gałęzi przyrodoznawstwa, a nie do arytmetyki teoretycznej. Wobec tego omówimy problem mierzenia tylko ze stanowiska arytmetyki, uwzględniając przytem przypadki szczególne o tyle tylko, o ile to jest konieczne do należytego wyjaśnienia ogólnej teorii, o którą jedynie w arytmetyce teoretycznej chodzi.

Rozwiązanie problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru (E) ze stanowiska arytmetyki nie tylko stanowi pierwszy krok do rozwiązania tegoż problemu z jakiegokolwiek innego punktu

widzenia, ale jest także koniecznym warunkiem do poprawnego postawienia odnośnych pytań.

Możemy powiedzieć bez przesady, że całe znaczenie pojęcia liczby dla przyrodoznawstwa polega na tem, iż istnieją klasy rzeczy, mogących ulegać mierzeniu.

§ 102. Nawet ze stanowiska arytmetyki problem mierzenia elementów oznaczonego zbioru przybiera różne postaci zależnie od natury tego zbioru i rodzaju liczb, któremi pragniemy posługiwać się przy mierzeniu elementów rozważanego zbioru.

Przypadki, w których posługujemy się przy mierzeniu elementów pewnego zbioru liczbami, które liczbami rzeczywistymi nie są, tak są nieliczne, że nie mamy powodu do bliższego ich omawiania w ogólnej teorii; powiemy tylko, że w takich razach zastosowujemy się do warunków możliwie zbliżonych do tych, którymi kierujemy się przy stosowaniu liczb rzeczywistych do rozwiązywania problemu mierzenia.

Liczby rzeczywiste, które mają być miarami elementów oznaczonego zbioru (E), określamy w każdym razie tak, żeby zachodziły dwa twierdzenia następujące:

I. Jeżeli przy oznaczonej jednostce pewna liczba l jest miarą oznaczonego elementu e zbioru (E), to każda liczba równa liczbie l , i tylko liczba, sprawdzająca tę równość, jest także miarą elementu e .

II. Oznaczmy przez u i u' którekolwiek dwa z tych elementów zbioru (E), z których każdy przyjęty być może za jednostkę, a przez e całkiem dowolnie obrany element rozważanego zbioru. Jeżeli tedy oznaczmy przez l miarę elementu e , przyjmując element u za jednostkę, a przez l' miarę tegoż elementu e w razie przyjęcia elementu u' za jednostkę, przez q miarę elementu u' , wreszcie przyjmując element u za jednostkę, to liczby l , l' i q sprawdzają równość następującą:

$$l = l' \cdot q.$$

Pierwsze z powyższych twierdzeń przywodzi nas do przyjęcia umowy następującej: orzeczenie, że dwa rozwiązania problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru (E) nie różnią się pomiędzy sobą, wyraża, iż zachodzą okoliczności następujące:

1°. Zbiór wszystkich tych elementów zbioru (E), z których każdy przyjęty być może za jednostkę, nie ulega zmianie przy przejściu od jednego rozwiązania problemu mierzenia elementów zbioru (E) do drugiego.

2°. Po ustaleniu jednostki miary obydwa rozwiązania dają równe pomiędzy sobą liczby na miarę każdego elementu zbioru (E).

Jeżeli zbiór (E), którego elementy mają ulegać mierzeniu, jest zbiorem wielkości, to wymagamy jeszcze, żeby zachodziło twierdzenie następujące:

III. *Przy oznaczonej jednostce miary, miary równych pomiędzy sobą elementów zbioru (E) równają się równym pomiędzy sobą liczbom, ale wykluczonem przytem nie jest, żeby w przypadku, kiedy zbiór (E) jest zbiorem wielkości w szerszem tylko znaczeniu, miary nierównych pomiędzy sobą elementów rozważanego zbioru były pomiędzy sobą równe.*

W następstwie tego twierdzenia miara każdego, jednostce miary u równego, elementu zbioru (E) równa się jedności, gdyż miara elementu u równa się liczbie jeden.

Jeżeli zbiór (E) jest zbiorem wielkości, dla których działanie dodawania zostało określone, to prócz wymagań poprzedzających, stawiamy jeszcze warunek, żeby zachodziło i twierdzenie następujące:

IV. *Przy oznaczonej jednostce miary, miara sumy dwóch (a więc i jakiegokolwiek skończonej liczby) elementów zbioru (E) równa się sumie miar tych elementów.*

Jeżeli nareszcie zbiór (E) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem, to wymagamy, żeby prócz poprzedzających zachodziło jeszcze i twierdzenie następujące:

V. *Przy oznaczonej jednostce miary, miara jakiegokolwiek elementu e , położonego pomiędzy dwoma innemi elementami e_1 i e_2 , równa się liczbie, położonej pomiędzy liczbami, stanowiącemi miary elementów e_1 i e_2 .*

W przypadkach, kiedy przy wyłącznem posługiwaniu się liczbami od zera nie mniejszemi rozwiązanie problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru według powyższych wymagań jest możliwe, posługujemy się zawsze tylko temi właśnie liczbami.

Czytelnik zapyta może, dlaczego układu warunków, wymaganych przy rozwiązywaniu problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru, nie uzupełniamy jeszcze żądaniem, żeby w przypadku, kiedy działanie mnożenia dla elementów odnośnego zbioru jest określone, miara iloczynu dwóch elementów zbioru równała się iloczynowi miar tych elementów?

Na to oświadczamy, że przypadki, w których moglibyśmy określić mnożenie dla elementów oznaczonego zbioru, zbiorem liczb oczywiście nie będącego, nie rozwiązując poprzednio problemu mierzenia tych elementów, należą do przypadków, w których żądania, wysłowione wyżej, określają w zupełności rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru, o który chodzi; stąd zaś wynika, że omawiane dodatkowe żądanie mogłoby być albo zbyteczne, albo uniemożliwiłoby problem mierzenia. Wobec tego nie należy oczywiście żądania tego stawiać. Żeby jednak już z góry uniemożliwić przypadek, w którymby iloczyn miar dwóch elementów nie był równy miarze elementu przedstawiającego iloczyn rozważanych elementów, określamy iloczyn dwóch elementów zbioru, dla elementów którego problem mierzenia został rozwiązany, jako ten element rozważanego zbioru, którego miara równa się iloczynowi miar czynników. Istota powyższej definicji wymaga koniecznie, żeby jednostka miary była poprzednio oznaczona; ale skoro warunek ten jest spełniony, to rzeczona definicja oczywiście czyni zadość wszystkim warunkom rozdziału V-go.

Żeby wyjaśnić kwestję w zupełności, dodamy, że dawniej, kiedy pojęcie liczby nie było należycie rozwinięte, określano niekiedy działanie mnożenia dla elementów oznaczonego zbioru niezależnie od rozwiązania problemu mierzenia elementów tego zbioru; ale właśnie na tem polega jedna z najważniejszych korzyści wyrobienia współczesnego pojęcia liczby, iż obecnie rozwiązanie problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru zwalnia nas od ustanawiania podobnego rodzaju definicji.

Z rozważań poprzedzających wynika natychmiast, że w stosunku do problemu mierzenia dwa izomorficzne zbiory liczb mogą w zupełności zastępować siebie wzajemnie. Zatem izomorficzne pomiędzy sobą zbiory liczb stanowią zgodnie z tem, cośmy zapowiedzieli w rozdziale poprzedzającym, całkiem równorzędne narzędzia do badania przyrody.

Naturalnie nie mamy pewności *a priori*, że problem mierzenia zawsze może być rozwiązany zgodnie z powyższymi zasadami. Zatem podając rozwiązanie problemu tego w jakimkolwiek przypadku szczególnym, winniśmy zarazem podać dowód na to, że uzyskane rozwiązanie czyni zadość warunkom, do których postanowiliśmy zasadniczo zastosowywać się.

§ 103. Obecnie pragniemy omówić znaczenie twierdzeń paragrafu poprzedzającego, ich wzajemne stosunki i ważniejsze następstwa.

Znaczenie pierwszego z rzeczonych twierdzeń polega na tem, że twierdzenie to stanowi warunek konieczny, ażeby cztery dalsze twierdzenia nie były treści pozbawione. Przekonamy się na podstawie dalszych rozważań, że z tych znów twierdzeń tw. II-gie winno być wyróżnione od innych ze względu na swoje szczególne znaczenie.

I. *Jeżeli na podstawie jakichkolwiek umów każdemu elementowi pewnego zbioru (E) odpowiada oznaczona liczba, która dla pewnych przynajmniej elementów zbioru (E) jest od zera odmienna, a której dla łatwiejszego wystawiania się nadamy chwilowo nazwę wartości odnośnego elementu, to uczynimy zadość dwom pierwszym twierdzeniom paragrafu poprzedzającego, przyjmując definicję następującą:*

Miara jakiegokolwiek elementu e rozważanego zbioru, jeżeli przyjmujemy za jednostkę oznaczony element u tegoż zbioru, równa się ilorazowi podziału wartości elementu e przez wartość elementu u .

Przystępując do dowodu twierdzenia tego, spostrzegamy najpierw, że w razie przyjęcia powyższej definicji każdy element zbioru (E), którego wartość jest od zera odmienna, i tylko element, warunek ten sprawdzający, może być przyjęty za jednostkę miary. Następnie spostrzegamy łatwo, że jeżeli tylko zastosujemy się do uwagi poprzedzającej przy oznaczeniu jednostki miary, to rodzaj odpowiedniości, wynikającej z omawianej definicji, pomiędzy elementami zbioru (E) a miarami tych elementów czyni zadość tw. I-sze z paragrafu poprzedzającego. Należy więc jeszcze okazać, że wspomniana odpowiedniość czyni także zadość tw. II-mu. Uważajmy w tym celu dwa jakiegokolwiek takie elementy u i u' zbioru (E), z których każdy mógłby być przyjęty za jednostkę miary, i oznaczmy przez e jakikolwiek trzeci element zbioru (E), a przez a , a' i b wartości elementów u , u' i e . Ze względu na uczynioną wyżej uwagę, mamy

$$a \neq 0, \quad a' \neq 0.$$

Na podstawie definicji, która stanowi przedmiot obecnych rozważań, mamy wzory następujące:

$$l = \frac{b}{a}, \quad l' = \frac{b}{a'}, \quad \lambda = \frac{a}{a'},$$

oznaczając przez l miarę elementu e , w razie przyjęcia za jednostkę elementu u , przez l' miarę tegoż elementu, gdy przyjmiemy za jednostkę element u' , a przez λ miarę elementu u , gdy przyjmiemy za jednostkę element u' . Na podstawie powyższych wzorów mamy

$$l' = \lambda \cdot l.$$

Równość ta wyraża, że w razie przyjęcia omawianej definicji tw. II-gie paragrafu poprzedzającego rzeczywiście zachodzi, co właśnie pozostawało jeszcze do udowodnienia.

II. Jeżeli problem mierzenia elementów pewnego zbioru (E) został rozwiązany w sposób zgodny z zasadami paragrafu poprzedzającego, to zbiór (E_1) wszystkich tych elementów zbioru (E), z których każdy przyjęty być może za jednostkę miary, zlewa się ze zbiorem (E') wszystkich tych elementów zbioru (E), z których każdy po przyjęciu za jednostkę dowolnie wybranego elementu zbioru (E_1) ma miarę od zera odmienną.

Oznaczmy przez λ' miarę jakiegokolwiek elementu u' zbioru (E_1), przyjmując za jednostkę element u , a przez λ miarę elementu u , gdy przyjmujemy za jednostkę element u' . Jeżeli tedy zastosujemy twierdzenie II-gie paragrafu poprzedzającego do przypadku szczególnego, kiedy element e równa się elementowi u , to uzyskamy oczywiście równość następującą:

$$(1) \quad \lambda \cdot \lambda' = 1.$$

Z równości tej wynika, że mamy

$$(2) \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda' \neq 0.$$

Nierówności te wyrażają, że miara jakiegokolwiek elementu zbioru (E_1), gdy przyjmujemy za jednostkę element tegoż zbioru, równa się liczbie od zera odmienniej, zatem każdy element zbioru (E_1) należy do zbioru (E').

Obecnie możemy z łatwością dowieść, że zbiór (E') niezależny jest od wyboru jednostki miary. Istotnie, zachowując oznaczenia poprzedzające, uważajmy jakikolwiek element e zbioru (E) i oznaczmy przez l miarę tego elementu, przyjmując element u za jednostkę, a przez l' miarę tegoż elementu w tym przypadku, kiedy przyjmujemy za jednostkę miary element u' . Mamy tedy

$$(3) \quad l' = \lambda \cdot l,$$

na podstawie tw. II-go paragrafu poprzedzającego.

Z równości poprzedzającej i pierwszej z nierówności (2) wynika, że liczby l i l' tylko jednocześnie w zero obrócić się mogą. Zatem rozstrzygnięcie, czy pewien element e zbioru (E) należy czy nie należy do zbioru (E') , jest niezależne od wyboru jednostki miary. Przeto, zgodnie z zapowiedzią zbiór (E') od wykazu jednostki miary nie zależy.

Stwierdziliśmy wyżej, że każdy element zbioru (E_1) należy do zbioru (E') . Pozostaje więc tylko do udowodnienia, że odwrotnie, każdy element zbioru (E') należy do zbioru (E_1) . Oznaczmy, jak wyżej, przez u którykolwiek z elementów zbioru (E_1) , przez v jeden z elementów zbioru (E') , a przez μ miarę elementu v , przyjmując za jednostkę element u . Gdyby element v należał do zbioru (E_1) , gdyby innemi słowy, element v przyjęty być mógł za jednostkę miary, to na podstawie tw. II-go paragrafu poprzedzającego miara x jakiegokolwiek elementu e zbioru (E) , w razie przyjęcia elementu v za jednostkę, sprawdzałaby równanie następujące:

$$\mu x = l, \quad (4)$$

gdzie l oznacza miarę elementu e , w razie przyjęcia elementu u za jednostkę. Ponieważ na podstawie definicji zbioru (E') mamy

$$\mu \neq 0, \quad (5)$$

przeto z równania (4) mielibyśmy

$$x = \frac{l}{\mu}. \quad (6)$$

Chodzi więc tylko o upewnienie się, że nie wykroczymy przeciwko żadnemu z warunków, wyszczególnionych w paragrafie poprzedzającym, jeżeli w razie przyjęcia za jednostkę oznaczonego elementu v zbioru (E') , za miarę jakiegokolwiek elementu e zbioru (E) uważać będziemy liczbę x , określoną wzorem (6).

Na podstawie tw. I-go paragrafu obecnego mamy pewność, że tw. I-sze i II-gie paragrafu poprzedzającego zachodzić nie przestaną, jeżeli wzór (6) uważać będziemy za ogólny wzór na miarę x elementu e w razie przyjęcia elementu v za jednostkę miary.

Zatem winniśmy tylko sprawdzić, że przy wspomnianym warunku żadne z trzech pozostałych twierdzeń nie przestanie być ważne, o ile to rozwiązanie (R) problemu mierzenia elementów

zbioru (E) , którego istnienie założyliśmy, każdemu z twierdzeń tych czyni zadość.

W tym celu oznaczmy przez l_1 i l_2 odpowiednio miary dwóch elementów e_1 i e_2 zbioru (E) , przyjmując za jednostkę pewien element u zbioru (E) . Gdybyśmy przyjęli za jednostkę element v zbioru (E') , to na podstawie wzoru (6) mielibyśmy na miary x_1 i x_2 elementów e_1 i e_2 wzory następujące:

$$(7) \quad x_1 = \frac{l_1}{\mu}, \quad x_2 = \frac{l_2}{\mu}.$$

Na podstawie tw. III-go paragrafu poprzedzającego równość

$$(8) \quad e_1 = e_2$$

pociąga za sobą równość

$$l_1 = l_2,$$

a ponieważ ze względu na (7), ostatnia równość pociąga za sobą równość

$$(9) \quad x_1 = x_2,$$

przeto równość (8) pociąga za sobą równość (9).

Zatem, jeżeli rozwiązanie (R) problemu mierzenia elementów zbioru (E) czyni zadość tw. III-mu paragrafu poprzedzającego, to w razie przyjęcia za jednostkę elementu v , a wzoru (6) na miarę x elementu e , twierdzenie to nie przestanie być ważne.

Zachowując oznaczenia poprzedzające, oznaczmy przez e element zbioru (E) określony równaniem

$$(10) \quad e = e_1 + e_2.$$

Na podstawie tw. IV-go paragrafu poprzedzającego równość ta pociąga za sobą równość następującą:

$$l = l_1 + l_2,$$

gdzie l oznacza miarę elementu e , jeżeli przyjmiemy za jednostkę element u .

Gdybyśmy przyjęli ogólnie wzór (6) na miarę elementu e zbioru (E) , przyjąwszy element v za jednostkę, to równość poprzedzająca pociągałaby za sobą równość

$$x = x_1 + x_2,$$

a to na podstawie wzorów (6) i (7), zatem równość (10) także tę równość pociągałaby za sobą. Przeto, gdyby rozwiązanie (R) problemu mierzenia elementów zbioru (E) czyniło zadość tw. IV-mu paragrafu poprzedzającego, to rzeczzone twierdzenie nie przestałoby zachodzić, gdybyśmy element v zaliczyli do tych, z których każdy przyjęty być może za jednostkę.

Zachowując oznaczenia powyższe, załóżmy, że rozwiązanie (R) problemu mierzenia elementów zbioru (E) czyni zadość tw. V-mu paragrafu poprzedzającego. W takim razie, gdybyśmy mieli

$$e < e_1 < e_2, \quad (11)$$

to mielibyśmy albo

$$l < l_1 < l_2, \quad (12)$$

albo

$$l > l_1 > l_2. \quad (13)$$

W razie nierówności

$$\mu > 0$$

mielibyśmy na podstawie wzorów (6) i (7)

$$x < x_1 < x_2, \quad (14)$$

lub

$$x > x_1 > x_2, \quad (15)$$

zależnie od tego, czy zachodziłyby nierówności (12) czy też nierówności (13). Gdyby zaś zachodziła nierówność

$$\mu < 0,$$

to w przypadku nierówności (12) zachodziłyby nierówności (15), a w przypadku nierówności (13) — nierówności (14). Ostatecznie, nierówności (11) pociągałyby za sobą w każdym razie albo nierówności (14), albo nierówności (15). Zatem te wartości miar elementów zbioru (E), które wynikają ze wzoru (6), czyniłyby zadość tw. V-mu paragrafu poprzedzającego, gdyby tylko rozwiązanie (R) problemu mierzenia elementów (E_1) czyniło zadość wspomnianemu twierdzeniu.

Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Z twierdzenia poprzedzającego wynika, że własność charakterystyczna elementów zbioru, który oznaczyliśmy przez (E_1) w rzeczonym twierdzeniu, polega na tem, że jakąkolwiek możliwą jednostkę miary przyjęlibyśmy, miara każdego elementu zbioru (E_1) zawsze równałaby się liczbie od zera odmiennej. Z tego samego twierdzenia

wynika również bezpośrednio, że jeżeli zbiór (E) obejmuje między innymi elementy, z których żaden za jednostkę przyjęty być nie może, to każdy taki element będzie miał miarę równą zeru, jakkolwiek element zbioru (E_1) przyjęlibyśmy za jednostkę.

Zatem elementy zbioru (E) możemy podzielić na dwa zbiory: zbiór (E_1) , obejmujący elementy, których miary zawsze są od zera odmienne, i zbiór (E_2) elementów, których miary zawsze równe są zeru. Elementom zbioru (E_2) , o ile takie elementy istnieją, nadajemy nazwę elementów zerowych. Możemy tedy orzec, że *warunek konieczny i wystarczający, ażeby pewien element zbioru (E) mógł być przyjęty za jednostkę miary, polega na tem, żeby element ten zerowym elementem nie był.*

III. Jeżeli dodawanie elementów oznaczonego zbioru wielkości (E) zostało tak określone, żeby działanie to posiadało własności łączności i przemienności, jeżeli nadto moduł dodawania elementów zbioru (E) istnieje, to w razie rozwiązalności problemu mierzenia elementów zbioru (E) w sposób zgodny z zasadami paragrafu poprzedzającego, każdy, modułowi dodawania równy element zbioru (E) jest niezawodnie elementem zerowym czyli takim, którego miara równa się zeru.

Istotnie, jeżeli oznaczymy przez e , e' i e'' trzy elementy zbioru (E) , a przez l , l' i l'' ich miary, to na podstawie tw. IV-go paragrafu poprzedzającego równość

$$(1) \quad e = e' + e''$$

pociąga za sobą równość

$$(2) \quad l = l' + l''.$$

Otóż, gdyby element e'' równał się modułowi dodawania, to równość (1) równoważna byłaby równości

$$e = e',$$

która na podstawie twierdzenia paragrafu poprzedzającego pociąga za sobą równość

$$(3) \quad l = l'.$$

Z równości (2) i (3) wynika równość

$$l'' = 0,$$

która właśnie wyraża powyższe twierdzenie.

Winniśmy zaznaczyć, że twierdzenie odwrotne nie zawsze zachodzi: może się wydarzyć, że element zerowy oznaczonego zbioru wielkości nie jest równy modułowi dodawania elementów rzeczownego zbioru¹⁾.

Rozwijając dowód tw. II-go paragrafu niniejszego mieliśmy sposobność stwierdzić, że do natychmiastowych następstw tw. II-go paragrafu poprzedzającego należą między innymi fakta, z których jeden polega na równości $\lambda \cdot \lambda' = 1$, a drugi na tem, że jeżeli pewien element v zbioru (E') przyjęty być może za jednostkę miary, to w takim razie, przyjmując rzeczywiście za jednostkę miary ten element, mamy na miarę x jakiegokolwiek elementu e zbioru (E) wzór (6). Fakta te możemy oczywiście wysłowić w postaci bardzo ważnych twierdzeń następujących.

IV. Jeżeli każdy z dwóch elementów pewnego zbioru przyjęty być może przy oznaczonym rozwiązaniu problemu mierzenia elementów rozważanego zbioru za jednostkę miary, to miara jednego z tych elementów, gdy przyjmiemy drugi za jednostkę, równa się odwrotności miary pierwszego (czyli ilorazowi podziału jednościci przez miarę pierwszego), gdy przyjmujemy drugi element za jednostkę.

V. Jeżeli przy oznaczonym rozwiązaniu problemu mierzenia elementów pewnego zbioru (E) pewien element v zbioru tego przyjęty być może za jednostkę miary, to miara jakiegokolwiek elementu e zbioru (E) , w razie przyjęcia elementu v za jednostkę, równa się ilorazowi

$$\frac{l}{\mu},$$

gdzie l i μ oznaczają miary elementów e i v w razie przyjęcia za jednostkę u któregośkolwiek z tych elementów zbioru (E) , z których każdy za jednostkę miary wogóle przyjęty być może.

Twierdzenie IV-te oczywiście może być uważane za przypadek szczególny tw. V-go; jeżeli bowiem zastosujemy twierdzenie to do przypadku, kiedy element e zlewa się z elementem u , to uzyskamy właśnie tw. IV-te.

Na podstawie jednej z definicyi, ustawionych w rozdziale poprzedzającym, iloraz

$$\frac{l}{\mu}$$

¹⁾ Przykłady tego rodzaju znajdujemy w problemie mierzenia zbiorów punktów zob.: Labesgue. Intégrale, aire, surface, Annali di Matematica 1902.

nazwać możemy stosunkiem liczby l do liczby μ , nadając w takim razie nazwę licznika liczbie l , a nazwę mianownika liczbie μ . Ze względu na to wprowadzamy definicję następującą:

Stosunkiem jakiegokolwiek elementu e oznaczonego zbioru (E) do innego elementu e' tegoż zbioru nazywamy miarę elementu e , gdy przyjmiemy za jednostkę element e ; element e zowie się tedy licznikiem, a element e' mianownikiem rozważanego stosunku. Na stosunek ten przyjmujemy symbol

$$\frac{e}{e'} \text{ albo } e:e'.$$

Mianownikiem stosunku dwóch elementów oznaczonego zbioru (E) , dla elementów którego problem mierzenia został rozwiązany, oczywiście może być jakikolwiek element zbioru i tylko element zbioru wszystkich tych elementów zbioru (E) , z których żaden elementem zerowym nie jest.

Z rozważań poprzedzających wynika, że pojęcie stosunku oznaczonego elementu e pewnego zbioru do oznaczonego elementu u tegoż zbioru nie różni się co do istoty swojej od pojęcia miary elementu e , gdy przyjmiemy element u za jednostkę. W rzeczywistości posługujemy się wyrażeniem „miara elementu e , gdy przyjmujemy element u za jednostkę” przeważnie w tych przypadkach, kiedy uważamy element u za znany, i posługujemy się nim do oznaczania innych elementów przez wartości stosunków ich do elementu u .

Obecnie możemy oczywiście wysłowić tw. V-te w sposób następujący:

VI. Jeżeli dla elementów oznaczonego zbioru (E) problem mierzenia został rozwiązany, to stosunek jakiegokolwiek elementu e do drugiego elementu e' , o ile naturalnie element e' za mianownik stosunku dwóch elementów zbioru (E) przyjęty być może, równa się przy jakiegokolwiek oznaczonej jednostce miary stosunkowi miary licznika e stosunku

$$\frac{e}{e'}$$

do miary mianownika e' .

§ 104. Załóżmy, że problem mierzenia elementów pewnego zbioru (E) , który charakteru zbioru wielkości nie posiadał, został rozwiązany zapomocą liczb rzeczywistych, przy przestrzeganiu zasad § 102-go. W takim razie, przyjąwszy za jednostkę miary który-

kolwiek element nie zerowy u zbioru (E) , możemy, nie wykraczając przeciwko zasadom rozdziału II-go, jak to czytelnik łatwo sam stwierdzi, nadać elementom zbioru (E) charakter wielkości w szerszym znaczeniu, a to na podstawie definicyi następującej:

A) Orzeczenie, że dwa elementy zbioru (E) są pomiędzy sobą równe wyraża, że miary ich równają się pomiędzy sobą.

Równie łatwo spostrzegamy, że możemy, nie wykraczając przeciwko zasadom rozdziału V-go, określić dodawanie dla elementów zbioru (E) , wprowadzając jednocześnie z definicyą powyższą jeszcze definicyę następującą:

B) Sumą dwóch elementów zbioru (E) nazywamy każdy jakikolwiek element tegoż zbioru, którego miara przy oznaczonej jednostce równa się sumie miar rozważanych elementów.

Wprawdzie możnaby zarzucić, że element, który według definicyi poprzedzającej miałby przedstawiać sumę pewnych danych elementów, może nie istnieć. Oczywiście nie możemy odeprzeć, że przypadek ten jest niemożliwy, ale możemy zastrzedz, co też czynimy rzeczywiście, że rozważać będziemy tylko te przypadki, w których wspomniana okoliczność nie zachodzi.

Podstawowe znaczenie ma ta okoliczność, że w razie przyjęcia powyższych definicyi rozstrzyganie o równości dwóch elementów zbioru (E) i o tem, czy pewien element zbioru tego jest sumą pewnych dwóch innych, bynajmniej nie zależy od wyboru jednostki miary. Istotnie, jeżeli przy pewnej jednostce u miary l_1 i l_2 dwóch elementów e i e' zbioru (E) sprawdzają równość

$$l_1 = l_2, \quad (16)$$

to w razie przyjęcia innej jednostki u' , miary l'_1 i l'_2 tychże elementów związane będą (tw. II, § 102) z liczbami l_1 i l_2 równościami postaci

$$\begin{aligned} l'_1 &= \lambda l_1 \\ l'_2 &= \lambda l_2, \end{aligned}$$

gdzie λ oznacza pewien od zera odmienny czynnik, i równość (16) równoważna będzie równości

$$l'_1 = l'_2.$$

Na podstawie tegoż samego twierdzenia § 102 równości

$$\begin{aligned} l &= l_1 + l_2 \\ l' &= l'_1 + l'_2, \end{aligned}$$

gdzie oznaczyliśmy przez l, l_1 i l_2 miary trzech elementów zbioru (E) w razie przyjęcia pewnego elementu za jednostkę, a przez l', l'_1 i l'_2 miary tychże elementów w razie przyjęcia za jednostkę jakiegokolwiek innego niezerowego elementu zbioru (E), będą pomiędzy sobą równoważne. Uzasadniliśmy zatem w zupełności uwagę, o którą chodziło.

Z natury rzeczy nasuwa się myśl dołączenia do definicyi A i B jeszcze definicyi następującej:

C) Orzeczenie, że pewien element e zbioru (E) mniejszy jest od pewnego elementu e_1 , wyraża, że przy oznaczonej jednostce miary u miary l_1 i l_2 elementów e_1 i e_2 sprawdzają nierówność

$$(17) \quad l_1 < l_2.$$

Definicja poprzedzająca, przy zachowywaniu pewnej oznaczonej jednostki, oczywiście czyni zadość warunkom rozdziału II-go; ale możemy zadać sobie pytanie, czy w razie przyjęcia definicyi tej wynik porównywania ilościowego nierównych pomiędzy sobą elementów zbioru (E) nie będzie zależał od wyboru jednostki miary? W razie przyjęcia za jednostkę miary zamiast elementu u innego niezerowego elementu u' zbioru będziemy mieli na miary l'_1 i l'_2 elementów e_1 i e_2 wzory

$$(18) \quad \begin{cases} l'_1 = \lambda l_1 \\ l'_2 = \lambda l_2, \end{cases}$$

oznaczając przez λ miarę elementu u przyjmując element u' za jednostkę.

W razie nierówności

$$(19) \quad \lambda > 0$$

nierówność (17) oczywiście równoważna będzie nierówności

$$(20) \quad l'_1 < l'_2.$$

Jeżeli więc miara każdego elementu niezerowego zbioru (E) równa się liczbie dodatniej, jakiegokolwiek inny byle niezerowy element przyjęlibyśmy za jednostkę, jeżeli innemi słowy, stosunek dwóch elementów niezerowych zbioru (E) równa się zawsze liczbie dodatniej, to wówczas wynik porównywania ilościowego dwóch nierównych pomiędzy sobą elementów zbioru (E) na podstawie powyższej definicyi od wyboru jednostki miary zależny nie będzie. Zbadajmy bliżej, jaki jest stan rzeczy w przypadku, kiedy oko-

liczność poprzedzająca nie zachodzi. W tym celu wybierzmy dowolnie w zbiorze (E_1) wszystkich niezerowych elementów zbioru (E) pewien element u i przyjmijmy element ten za jednostkę miary. Gdyby tedy miara każdego elementu zbioru (E_1) równała się liczbie dodatniej, to stosunek (§ 103, tw. V) dwóch elementów zbioru (E_1) równałby się zawsze liczbie dodatniej, co właśnie wykluczamy. Zakładamy tedy, że w zbiorze (E_1) są elementy, których miary równają się liczbom ujemnym, i dzielimy elementy zbioru (E_1) na dwie kategorie (E'_1) i (E''_1) , zaliczając do kategorii (E'_1) wszystkie te elementy zbioru (E_1) , których miary przy rozważanej jednostce u równają się liczbom dodatnim, a do kategorii (E''_1) — wszystkie inne elementy zbioru (E_1) , a więc te, których miary równają się liczbom ujemnym. Spostrzegamy natychmiast, że stosunek dwóch elementów tej samej kategorii równać się będzie zawsze liczbie dodatniej, a stosunek dwóch elementów, z których jeden należałby do kategorii (E'_1) , a drugi do kategorii (E''_1) — liczbie ujemnej; zatem rozważany podział elementów zbioru (E_1) na dwie kategorie (E'_1) i (E''_1) nie zależy od wyboru jednostki miary i może być określony jako taki podział zbioru (E_1) na dwa podzbiory, żeby stosunek dwóch elementów tego samego podzbioru zawsze był dodatni, a stosunek dwóch elementów, nie należących do tego samego podzbioru — ujemny. Obecnie możemy odpowiedzieć na pytanie, które postawiliśmy sobie w sposób następujący: jeżeli stosunek każdego dwóch niezerowych elementów zbioru (E) dodatni nie jest, to wynik porównywania ilościowego dwóch nierównych pomiędzy sobą elementów zbioru (E) na podstawie definicji C nie jest całkiem niezależny od wyboru jednostki miary, ale wszelka dwuznaczność w tym względzie zostanie usunięta, jeżeli tylko oznaczymy tę z dwóch wyżej określonych kategorii elementów niezerowych zbioru (E) , do której należeć ma jednostka miary w razie wykonywania porównania ilościowego dwóch nierównych pomiędzy sobą elementów zbioru (E) na podstawie definicji C . Nadto z łatwością spostrzegamy, że pomimo dopiero co omówionej dwuznaczności, wszystkie twierdzenia z § 102, nie wyłączając i tw. V-go, zachodzić będą w razie przyjęcia definicji A , B i C .

W rzeczywistości, po rozwiązaniu problemu mierzenia zapomocą liczb rzeczywistych dla elementów takiego zbioru, który przed rozwiązaniem tego problemu charakteru zbioru wielkości nie po-

siadał i dla elementów którego zatem żadne działanie określone nie było, przyjmujemy zawsze definicję A , B i C .

§ 105. Jeżeli pewien zbiór (E) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem, a problem mierzenia elementów zbioru tego został rozwiązany w myśl zasad § 102-go, jeżeli nadto przed rozwiązaniem problemu mierzenia elementów zbioru (E) dodawanie tychże określone nie było, to wprowadzając definicję B paragrafu poprzedzającego, co oczywiście możemy uczynić, nie wykraczając przeciwko zasadom rozdziału V-go, urzeczywistniamy znowu to, żeby wszystkie twierdzenia § 102-go dla rozważanego zbioru zachodziły. Mogłoby się wprawdzie zdawać, że w przypadku, kiedy problem mierzenia został rozwiązany dla pewnego zbioru (E), który przedtem posiadał charakter zbioru wielkości tylko w szerszym znaczeniu, moglibyśmy, przyjmując definicję B i C paragrafu poprzedzającego, albo tylko definicję C , gdyby dodawanie elementów rozważanego zbioru określone już było poprzednio, znowu to osiągnąć, żeby wszystkie twierdzenia § 102 dla zbioru (E) zachodziły. W rzeczywistości jednak nastroczyć się tu może pewna trudność, którą należy bliżej omówić. Z wprowadzeniem definicji B żadna trudność połączona być nie mogła, ale inny jest stan rzeczy, kiedy chodzi o definicję C . Istotnie, tw. III-cie § 102-go nie wyklucza przypadku, w którymby miary nierównych pomiędzy sobą elementów zbioru (E) były pomiędzy sobą równe. Załóżmy, że ta okoliczność właśnie zachodzi. W takim razie przyjęcie definicji C doprowadziłoby do niezgodnego z zasadami rozdziału II-go wyniku następującego: w zbiorze (E) można byłoby znaleźć dwa nierówne pomiędzy sobą elementy, z których żaden nie byłby mniejszy od drugiego; takimi elementami byłyby każde dwa nierówne pomiędzy sobą elementy, których miarami byłyby równe pomiędzy sobą liczby. Czytelnik odeprze może, że jest to trudność, którą sami bez potrzeby stworzyliśmy, stawiając wymaganie, żeby zachodziło tw. III-cie § 101-go wówczas, gdy niewielka zmiana tego wymagania całą trudność mogłaby usunąć: należałoby tylko tw. III-cie zastąpić przez następujące:

Przy oznaczonej jednostce, miary równych pomiędzy sobą i tylko równych elementów zbioru (E) są pomiędzy sobą równe.

W rzeczywistości jednak mamy poważną przyczynę do zachowania pierwotnej postaci omawianego wymagania. Albowiem, gdybyśmy wymaganie to zmienili w myśl uwagi powyższej, to

usunęlibyśmy wprawdzie trudność, która nas zastanawia, ale jednocześnie uniemożliwilibyśmy sobie rozwiązanie problemu mierzenia w pewnych ważnych przypadkach¹⁾.

Nie poprzestaniemy jednak na tym ujemnym wyniku i zbadamy bliżej przypadek, w którym powyższa trudność zachodzi. Zakładamy tedy, że po rozwiązaniu problemu mierzenia elementów pewnego zbioru (E), który jest zbiorem wielkości w szerszym znaczeniu, okazało się, że istnieją nierówne pomiędzy sobą takie elementy zbioru (E), których miary są pomiędzy sobą równe. Celem uproszczenia przyjmujemy chwilowo definicyę następującą: jednolitymi elementami zbioru (E) nazywamy takie elementy tego zbioru, których miary są pomiędzy sobą równe. Własność jednolitości oznaczonych elementów zbioru (E) niezależna jest od wyboru jednostki miary, albowiem zmiana jednostki miary na podstawie tw. II-go § 102-go powoduje tylko podstawienie na miejsca liczb, stanowiących miary elementów zbioru (E), iloczynów tych liczb przez pewien ten sam czynnik, wskutek czego zachodząca przy oznaczonej jednostce równość miar dwóch elementów po wprowadzeniu nowej jednostki istnieć nie przestaje. Zatem obejmujący oznaczony element e zbiór (Z) wszystkich jednolitych pomiędzy sobą elementów zbioru (E) jest zbiorem wszystkich takich elementów rozważanego zbioru, które posiadają pewną, od wyboru jednostki miary niezależną wspólną własność w . Możemy tedy uważać własność w za element pewnego zbioru rzeczy (W), przyjmując za miarę elementu w zbioru (W) wspólną miarę odnośnych elementów zbioru (E) i wprowadzić definicyę A , B i C paragrafu poprzedzającego. Przez to urzeczywistnilibyśmy ważność wszystkich twierdzeń § 101-go.

Z rozważań poprzedzających wynika, że w przypadkach, w których po rozwiązaniu problemu mierzenia elementów oznaczonego zbioru (E) wielkości w szerszym znaczeniu zachodzi omówiona przeszkoda do wprowadzenia definicyi C paragrafu poprzedzającego, możemy wprowadzić taki zbiór (W) nowego rodzaju rzeczy, żeby rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru (E) mogło być uważane *a posteriori* za rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru (W), żeby przyjęcie definicyi A , B i C paragrafu poprzedzającego dla zbioru (W) nie ulegało żadnej przeszkodzie,

¹⁾ Labesgue. Intégrale, aire, surface. Annali di Matematica 1902.

żeby zatem wszystkie twierdzenia § 102-go w zastosowaniu do zbioru (W) były uzasadnione. W rzeczywistości postępujemy zawsze w sposób poprzedzający.

Na tej właśnie drodze wytwarzamy sobie precyzyjne pojęcie o coraz to nowych rodzajach wielkości, do których, jak się przekonywamy na podstawie nowszych badań, należą pojęcia pola figury płaskiej i pojęcie objętości figury przestrzennej ¹⁾.

Ostatecznie, drogą ustawiania odpowiednich umów i definicji, zawsze dopinamy tego, żeby w każdym przypadku szczególnym po zupełnem opracowaniu problemu mierzenia zachodziły wszystkie twierdzenia z § 102-go.

§ 106. Obecnie pragniemy omówić najprostsze trzy przypadki, w których warunki § 102-go określają bez żadnej dwuznaczności wynik rozwiązania problemu mierzenia.

Przypadek A). Zbiór (E), dla elementów którego problem mierzenia ma być rozwiązany, posiada własności następujące:

1°. Zbiór (E) jest zbiorem wielkości w znaczeniu szerszem.

2°. Działanie dodawania elementów zbioru (E) zostało określone zgodnie z zasadami rozdziału II-go.

3°. Każdy element zbioru (E), jeżeli nie jest ani elementem równym modułowi dodawania ²⁾, ani elementem równym pewnemu szczególnemu elementowi e_1 rozważanego zbioru, równa się sumie skończonej liczby elementów równych elementowi e_1 .

Załóżmy chwilowo, że problem mierzenia elementów zbioru (E) jest rozwiązalny, i oznaczmy ogólnie przez e_i taki element zbioru (E), który uważany być może za sumę i elementów równych elementowi e_1 .

Ze względu na tw. II-gie i III-cie § 103-go możemy na próbę przyjąć za jednostkę miary tylko jeden z elementów e_i . Oznaczmy tedy przez n dowolnie dobraną, byle od zera większą liczbę całkowitą i spróbujmy przyjąć za jednostkę miary element e_n .

Na podstawie tw. IV-go § 102-go mamy tedy równania

$$\begin{aligned} n \cdot x &= 1 \\ y &= ix, \end{aligned}$$

¹⁾ Lebesgue. Intégrale, aire, surface. Annali di matematica 1092.

²⁾ Moduł dodawania elementów zbioru (E) może nie istnieć. W takim razie zastrzeżenie to staje się zbytecznem.