

kiedy rozważamy liczbę rzeczywistą o wartości bezwzględnej, równej zeru, wszelki znak gatunkowy w symbolu specyficznym takiej liczby jest zbyteczny, gdyż liczba taka może być uważana wedle upodobania za liczbę znaku (+), albo (—) i równa się w każdym razie zeru. Żeby uzupełnić te wskazówki o sposobie posługiwania się znakami (+) i (—) w znaczeniu znaków gatunkowych, nadmieniamy jeszcze, co następuje: jeżeli pewna liczba rzeczywista w przedstawia wartość pewnego wyrażenia arytmetycznego S , to tworzymy symbol równoważny symbolowi uzyskanemu, kładąc po lewej stronie symbolu w znak gatunkowy (+) lub (—) przez to, że kładziemy ten znak gatunkowy przed symbolem S , zamkniętym w nawiasie; jeżeli jednak symbol S przedstawia iloczyn lub iloraz i nie jest już zaopatrzony w pewien znak gatunkowy, to nawias opuszczamy.

§ 88. Paragraf obecny poświęcamy ustawieniu reguł do wykonywania porównania ilościowego dwóch liczb rzeczywistych i działań zasadniczych na dwóch liczbach rzeczywistych w przypadku, kiedy te liczby przedstawione są przez ich symbole specyficzne.

Uważajmy tedy dwie liczby rzeczywiste jakiegokolwiek r i r' , dobierając oznaczenia tak, żeby w przypadku, kiedy rozważane liczby nie mają tego samego znaku, symbol r oznaczał liczbę znaku (+). Jeżeli jeszcze oznaczmy przez d wartość bezwzględną liczby r , a przez d' wartość bezwzględną liczby r' , to w takim razie mieć będziemy na liczby r i r' albo wzory

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = + d \\ r' = + d', \end{array} \right.$$

albo

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = + d \\ r' = - d', \end{array} \right.$$

albo nareszcie

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = - d \\ r' = - d'. \end{array} \right.$$

Przy zachowaniu tych symbolów na liczby względne, które wprowadziliśmy w § 79-tym, wzory (1) równoważne są wzorom:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = (d, 0), \\ r' = (d', 0); \end{array} \right.$$

wzory (2) — wzorom:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = (d, 0), \\ r' = (0, d'); \end{array} \right.$$

a wzory (3) — wzorom:

$$\left. \begin{aligned} r &= (0, d) \\ r' &= (0, d'). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Opierając się na tej uwadze oraz na tych regułach porównywania ilościowego liczb względnych, które ustawiliśmy w § 79-tym, spostrzegamy z łatwością, iż zachodzi twierdzenie następujące:

I. Żeby dwie liczby rzeczywiste były równe pomiędzy sobą, koniecznem jest, żeby ich wartości bezwzględne równały się sobie; warunek ten jest wystarczający tylko w przypadku, kiedy wartość bezwzględna jednej przynajmniej z rozważanych liczb równa się zeru, jeżeli zaś okoliczność ta nie zachodzi, to dwie liczby rzeczywiste o równych sobie wartościach bezwzględnych są sobie równe w razie, ale tylko w razie, kiedy i znaki ich nie różnią się od siebie. Jeżeli liczby rzeczywiste nie są sobie równe, to żeby zdecydować, która z nich jest mniejsza, należy rozróżnić trzy przypadki:

1°. Rozważane liczby mają znak (+).

2°. Liczby te mają znak (—).

3°. Jedna z rozważanych liczb ma znak (—), a druga znak (+).

W pierwszym przypadku wartości bezwzględne rozważanych liczb są od siebie odmienne, (gdyż w razie przeciwnym liczby te byłyby sobie równe), a ta z rzeczonych liczb, której wartość bezwzględna jest mniejsza, jest sama mniejsza od drugiej.

W drugim przypadku także wartości bezwzględne porównywanych ze sobą liczb rzeczywistych są od siebie odmienne z tejże przyczyny, co w przypadku pierwszym, ale mniejsza z rozważanych liczb rzeczywistych jest ta, która ma większą wartość bezwzględną.

W trzecim przypadku mniejsza z dwóch rozważanych liczb jest zawsze ta, która ma znak (—).

Na sumę liczb r i r' zachodzić będzie wzór

$$r + r' = r' + r = (d + d', 0),$$

albo wzór

$$r + r' = r' + r = (d, d'),$$

albo wzór

$$r + r' = r' + r = (0, d + d'),$$

zależnie od tego, czy zachodzą wzory (4), (5), czy (6).

Wnosimy stąd natychmiast, iż mamy twierdzenie następujące:

II. Wartość bezwzględna sumy dwóch liczb rzeczywistych równa się sumie lub różnicy bezwzględnej ich wartości bezwzględnych zależnie

od tego, czy rozważane liczby są tego samego znaku czy też znaków przeciwnych. Jeżeli liczby, o których sumę chodzi, są tego samego znaku a sama suma nie jest równa zeru, to znak sumy nie różni się od wspólnego znaku składników; jeżeli zaś rzeczzone liczby są znaków przeciwnych, jeżeli nadto ich wartości bezwzględne nie są sobie równe, jeżeli więc ich suma nie równa się zeru, to znakiem sumy jest znak tego składnika, którego wartość bezwzględna jest większa.

Już w paragrafie poprzedzającym mieliśmy sposobność zaznaczyć, że na podstawie tw. II-go z § 82-go, przy odejmowaniu liczb rzeczywistych reszta równa się sumie odjemnej i liczby symetrycznej odjemnikowi. Z tego zaś wynika, że w razie, kiedy wartości bezwzględne i znaki odjemnej i odjemnika są dane, reszta równa się sumie dwóch liczb rzeczywistych, których wartości bezwzględne i znaki są znane, gdyż każdą liczbę rzeczywistą przemieniamy na liczbę jej symetryczną drogą prostej przemiany jej znaku na znak przeciwny.

Zatem wszelka reguła szczególna do wykonywania odejmowania w przypadku, kiedy wartości bezwzględne i znaki odjemnej i odjemnika są dane, jest zbyteczna, gdyż to zagadnienie sprowadza się bezpośrednio do dodawania, które może być wykonane na podstawie tw. II-go.

Oznaczmy przez p liczbę bezwzględną, stanowiącą iloczyn liczb bezwzględnych d i d' ; w takim razie na iloczyn liczb r i r' mamy zależnie od tego, czy zachodzą wzory (4), (5) lub (6), wzór

$$r \cdot r' = r' \cdot r = (d \cdot d', 0) = +p,$$

wzór

$$r \cdot r' = r' \cdot r = (0, d \cdot d') = -p,$$

lub wzór

$$r \cdot r' = r' \cdot r = (d \cdot d', 0) = +p.$$

Mamy więc twierdzenie następujące:

III. Wartość bezwzględna iloczynu dwóch liczb rzeczywistych od zera odmiennych równa się iloczynowi wartości bezwzględnych czynników, a sam iloczyn równa się liczbie dodatniej lub ujemnej, zależnie od tego, czy czynniki są tego samego znaku, czy znaków przeciwnych; jeżeli zaś jeden przynajmniej z czynników równa się zeru, to iloczyn równa się także zeru.

Przechodząc do dzielenia liczb rzeczywistych, wnosimy natychmiast z twierdzenia poprzedzającego, co łatwo byłoby także

wyprowadzić i z tw. I-go z § 85-go, że zachodzi twierdzenie, które opiewa, jak następuje:

IV. Jeżeli przy dzieleniu liczb rzeczywistych dzielnik równa się zeru, to dzielenie jest wykonalne tylko w przypadku, kiedy i dzielna równa się zeru, a w takim razie iloraz jest całkiem nieokreślony, gdyż każda liczba rzeczywista uważana być może za iloraz. Jeżeli zaś dzielnik jest od zera odmienny, to dzielenie jest działaniem jednoznaczem i zawsze wykonalnem; w tym przypadku wartość bezwzględna ilorazu równa się ilorazowi podziału wartości bezwzględnej dzielnej przez wartość bezwzględną dzielnika, a sam iloraz, gdy jest od zera odmienny, jest dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy dzielna i dzielnik tego samego są znaku, czy też znaków przeciwnych.

§ 89. Jeżeli uwzględnimy tę okoliczność, że możemy dobrać do każdej liczby rzeczywistej liczbę względną tej liczbie równą (a nawet i nieskończenie wiele takich liczb), to natychmiast spostrzeżemy, że można uzyskać twierdzenia, wyrażające własności podstawowe działań zasadniczych na liczbach rzeczywistych drogą prostego podstawienia wyrażenia „liczba rzeczywista” zamiast wyrażenia „liczba względna” w twierdzeniach, które wyrażają własności podstawowe działań zasadniczych na liczbach względnych.

Zwracając się najpierw do § 81-go, uzyskujemy na tej drodze twierdzenie następujące:

I. Dodawanie liczb rzeczywistych posiada własności łączności i przemienności, a nadto nierówność

$$b < b',$$

równoważna jest nierówności

$$a + b < a + b',$$

jakąkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez a .

Zestawiając to twierdzenie z tw. II-giem z paragrafu poprzedzającego, łatwo stwierdzamy, co następuje: jeżeli wszystkie składniki jakiegokolwiek sumy liczb rzeczywistych są tego samego znaku, to wartość bezwzględna samej sumy równa się sumie wartości bezwzględnych składników, a znak sumy, jeżeli suma nie jest równa zeru, nie różni się od wspólnego znaku składników; jeżeli zaś nie wszystkie składniki rozważanej sumy są tego samego znaku, to wartość bezwzględna sumy równa się różnicy bezwzględnej sumy d wartości bezwzględnych składników dodatnich i sumy u wartości bezwzględnych składników ujemnych, a znak jej, w razie nierówności

$$d \neq u$$

jest dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy mamy

$$d > u,$$

czy

$$d < u;$$

w przypadku szczególnym, kiedy zachodzi równość

$$d = u,$$

rozważana suma liczb rzeczywistych równa się zeru. W tem twierdzeniu należy oczywiście przez wyrażenie „suma pewnych liczb“ rozumieć, w razie kiedy układ tych liczb obejmuje jedną tylko liczbę l , samą liczbę l .

Opierając się na twierdzeniach, uzasadnionych w § 82-gim, spostrzegamy natychmiast, że zachodzą twierdzenia następujące:

II. Odejmowanie liczb rzeczywistych jest działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń, a wynik działania tego równa się sumie odjemnej i liczby symetrycznej odjemnikowi.

III. W zbiorze liczb rzeczywistych istnieje moduł dodawania i posiada wartość równą zeru.

Z twierdzenia tego i definicyi modułu dodawania wynika bezpośrednio, że równości

$$a - b = 0$$

i

$$a = b,$$

gdzie oznaczyliśmy przez a i b dwie liczby rzeczywiste, są pomiędzy sobą równoważne. Z tych samych przyczyn zachodzą równości

$$a + 0 = a - 0 = a,$$

jakakolwiek liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez a .

Pojęcie sumy algebraicznej liczb względnych, wprowadzone w § 83-cim, rozszerzamy do liczb rzeczywistych jakichkolwiek, podstawiając w definicyi wysłowionej na czele § 83-go, wyrażenie „liczba rzeczywista“ na miejsce wyrażenia „liczba względna“; wogóle, jeżeli w pewnym zbiorze wielkości (W), którego elementy mogą ulegać dodawaniu, istnieje moduł dodawania, to w takim razie uważamy za sumę algebraiczną skończonej liczby elementów, należących do zbioru (W), rzecz, której definicyę używamy, podstawiając we wspomnianej przed chwilą definicyi

§ 83-go, wyrażenie „element zbioru (W)“ na miejsce wyrażenia „liczba względna“.

Sposób symbolizowania sum algebraicznych, któryśmy wysnuli ostatecznie w § 83-cim, zachowujemy bez zmiany i w tym przypadku, kiedy chodzi o utworzenie symbolu sumy algebraicznej jakiegokolwiek liczb rzeczywistych, zatem, żeby przedstawić sumę algebraiczną liczb rzeczywistych, piszemy składniki kolejno w jednym wierszu, kładąc po lewej stronie każdego składnika 1-szej kategorii znak $(+)$, a znak $(-)$ po lewej stronie każdego składnika 2-giej kategorii; przytem zastrzegamy sobie prawo opuszczania znaku gatunkowego przy pierwszym składniku w razie, kiedy składnik ten należy do 1-szej kategorii.

Suma algebraiczna s liczb rzeczywistych może (na podstawie tw. I-go z § 83-go) być uważana za sumę zwykłą s' tylu składników, ile wynosi liczba składników n rozważanej sumy algebraicznej s , jeżeli tylko określimy każdy składnik sumy s' jako liczbę rzeczywistą równą lub symetryczną równorzędnemu składnikowi sumy algebraicznej s , zależnie od tego, czy składnik ten należy do 1-szej kategorii czy do 2-giej. Z tego wynika najpierw (co moglibyśmy także wywnioskować i z tw. II-go z § 83-go), że dowolna przemiana porządku składników sumy algebraicznej liczb rzeczywistych pozostaje bez wpływu na jej wartość, jeżeli tylko żaden składnik nie zostaje przeniesiony z jednej kategorii do drugiej. Nadto, spostrzegamy jeszcze, uwzględniając tw. II-gie obecnego paragrafu, że w symbolu sumy algebraicznej liczb rzeczywistych, utworzonym w sposób określony wyżej, znak $(+)$ lub $(-)$, znajdujący się po lewej stronie jakiegokolwiek składnika a , byle nie pierwszego, uważany być może według upodobania albo za znak działania, którem liczba a skombinowana ma być ze składnikami niższych rzędów, albo za znak jakościowy, określający, która z liczb

$$+a \text{ lub } -a$$

ma być skombinowana drogą dodawania ze składnikami niższych rzędów.

Na podstawie tw. III-go z § 83-go zyskujemy ważne ze stanowiska techniki rachunkowej twierdzenie następujące: jeżeli w symbolu S sumy algebraicznej oznaczonych liczb rzeczywistych przemienimy znak jakościowy każdego składnika na znak jakościowy przeciwny, to wartość sumy algebraicznej, którą przedstawiać będzie symbol S' ,

uzyskany w taki sposób, równać się będzie liczbie symetrycznej wartości sumy S .

Na podstawie trzech pierwszych twierdzeń z § 84-go zachodzi twierdzenie następujące:

IV. *Mnożenie liczb rzeczywistych posiada własność łączności i przemienności oraz własność rozdzielności w stosunku do dodawania i odejmowania.*

Uwzględniając tę okoliczność, że moduł dodawania liczb rzeczywistych równa się zero, wyprowadzamy natychmiast z tw. IV-go i V-go z § 84-go twierdzenia następujące:

V. *Żeby iloczyn liczb rzeczywistych równał się zero, koniecznem jest i wystarczającym, żeby jeden czynnik przynajmniej równał się zero.*

VI. *Jeżeli oznaczymy przez r , r' i λ trzy liczby rzeczywiste, to warunek konieczny i wystarczający, żeby związek*

$$r \neq r'$$

i związek

$$\lambda \cdot r \neq \lambda \cdot r'$$

były pomiędzy sobą równoważne, polega na nierówności

$$\lambda \neq 0.$$

Z tw. VII-go § 84-go wynika twierdzenie następujące:

VII. *Jakiegokolwiek liczby rzeczywiste oznaczylibyśmy przez r i r' to po oznaczeniu ich iloczynu przez p , zachodzić będą równości następujące:*

$$(+r) \cdot (+r') = +p$$

$$(-r) \cdot (+r') = (+r) \cdot (-r') = -p$$

$$(-r) \cdot (-r') = +p.$$

Twierdzenie to obejmuje w sobie oczywiście jako przypadek szczególny tw. III-cie z § 88-go, gdyż staje się ono równobrzmiącym z tem twierdzeniem w przypadku szczególnym, kiedy symbole r i r' oznaczają liczby bezwzględne; pomimo to jednak powyższe twierdzenie stanowi następstwo logiczne wspomnianego twierdzenia z § 88-go. Istotnie, z tw. III-go § 88-go z łatwością wyprowadzić możemy, że zmiana znaku jednego czynnika w iloczynie dwóch liczb rzeczywistych, od zera odmiennych, pociąga za sobą zmianę znaku iloczynu bez zmiany jego wartości bezwzględnej; otóż, opierając się na tem i zważywszy, iż związek

$$(+r)(+r') = +p$$

jest bezpośrednio oczywisty, z łatwością uzyskujemy równości, które wyrażają razem to twierdzenie obecnego paragrafu, o które chodzi.

Znaczenie tw. VII-go jest natury techniczno-rachunkowej. Zestawiając to twierdzenie z tw. IV-tem i uwzględniając tę okoliczność, iż w sposób omówiony poprzednio suma algebraiczna uważana być może za sumę zwykłą, uzyskujemy nowe, w technice rachunkowej ważne twierdzenie następujące:

VIII. *Iloczyn jakiegokolwiek sumy algebraicznej S liczb rzeczywistych przez jakąkolwiek liczbę rzeczywistą r równa się takiej sumie algebraicznej iloczynów składników sumy S przez liczbę r , w której każdy z tych iloczynów uważany jest za składnik 1-szej lub 2-giej kategorii, zależnie od tego, czy składnik ten jest iloczynem liczby r przez składnik 1-szej czy też przez składnik 2-giej kategorii sumy S .*

Na podstawie tw. I-go z § 85-go mamy, w tw. IV-tem § 88-go już zawarte twierdzenie następujące:

IX. *Jeżeli przy dzieleniu liczb rzeczywistych dzielnik równy jest zeru, to dzielenie jest wykonalne tylko pod warunkiem, żeby i dzielnik równał się zeru, a w takim razie wartość ilorazu pozostaje całkiem nieoznaczona. Jeżeli zaś dzielnik jest od zera odmienny, to dzielenie jest zawsze wykonalne, a wartość ilorazu oznaczona jest w zupełności.*

Na podstawie tw. III-go z § 85-go mamy twierdzenie następujące:

X. *W zbiorze liczb rzeczywistych istnieje moduł mnożenia, a moduł ten równa się jedności.*

Na zakończenie zaznaczamy, że bezpośredni następstwem tw. VII-go i tw. IX-go jest następujące, w technice rachunkowej ważne twierdzenie:

XI. *Jeżeli oznaczmy przez r i r' dwie liczby rzeczywiste jakiegokolwiek, byle zachodziła nierówność*

$$r' \neq 0,$$

jeżeli więc wartość q ilorazu

$$r : r'$$

oznaczona jest w zupełności, to w takim razie zachodzą związki następujące:

$$\begin{aligned} (+r) : (+r') &= +q \\ (+r) : (-r') &= (-r) : (+r) = -q \\ (-r) : (-r') &= +q. \end{aligned}$$

§ 90. Żeby opracować w zupełności pojęcie liczby rzeczywistej, winniśmy jeszcze obeznać się z pewnemi ogólnemi własnościami zbioru wszystkich liczb wymiernych. Przedmiotowi temu poświęcamy niniejszy paragraf.

I. *W zbiorze liczb rzeczywistych nie istnieje ani liczba najmniejsza, ani liczba największa.*

Żeby uzasadnić to twierdzenie, należy tylko zważyć, co następuje: jeżeli oznaczymy przez d jakąkolwiek liczbę rzeczywistą większą od zera, a przez r liczbę rzeczywistą, przyjętą całkiem dowolnie, to wyrażenie

$$r - d$$

przedstawiać będzie liczbę rzeczywistą mniejszą od liczby r , a wyrażenie

$$r + d$$

liczbę rzeczywistą od tej liczby większą.

Liczyby rzeczywiste, których wartości bezwzględne są liczbami wymiernymi, zowią się liczbami rzeczywistymi wymiernymi; liczby rzeczywiste wymierne, których wartości bezwzględne są liczbami całkowitemi, zowią się liczbami rzeczywistymi całkowitemi, a liczby rzeczywiste, których wartości bezwzględne są niewymierne, zowią się liczbami rzeczywistymi niewymiernymi.

II. *Pomiędzy dwiema liczbami rzeczywistymi nierównymi istnieje nieskończenie wiele liczb pośrednich wymiernych i liczb pośrednich niewymiernych pomiędzy sobą nierównych. Innemi słowy, jeżeli dwie liczby rzeczywiste nie są pomiędzy sobą równe, to istnieje nieskończenie wiele pomiędzy sobą nierównych liczb wymiernych i nieskończenie wiele pomiędzy sobą nierównych liczb niewymiernych, z których każda większa jest od mniejszej z rozważanych liczb, ale mniejsza od większej z nich.*

Istotnie, uważajmy dwie liczby rzeczywiste jakiegokolwiek a i b ($a < b$). Jeżeli liczba zero nie jest położona pomiędzy liczbami a i b , jeżeli więc liczby te (choćby jedna z nich równą była zeru) uważane być mogą albo za dwie liczby znaku (+), albo za dwie liczby znaku (—), to wszelka liczba rzeczywista l , dodatnia, jeżeli liczby a i b nie są ujemne, ujemna, jeżeli liczby a i b nie są dodatnie, a przytem taka, żeby jej wartość bezwzględna $|l|$ pośrednią była pomiędzy wartościami bezwzględnymi $|a|$ i $|b|$ liczb a i b , sama będzie liczbą pośrednią pomiędzy liczbami a i b , a ponieważ pomiędzy

liczbami bezwzględnie $|a|$ i $|b|$ istnieje (§ 74, tw. IX i X) nieskończenie wiele pośrednich, pomiędzy sobą nierównych liczb bezwzględnych wymiernych i liczb bezwzględnych niewymiernych, przeto w rozważanym przypadku istnieje pomiędzy liczbami a i b nieskończenie wiele i liczb wymiernych i liczb niewymiernych.

Pozostaje jeszcze do uwzględnienia przypadek, kiedy liczba 0 położona jest pomiędzy liczbami a i b .

Mamy tedy

$$a < 0 < b.$$

Ponieważ liczba zero uważana być może według upodobania za liczbę znaku $(+)$ lub $(-)$, przeto liczby a i 0 uważane być mogą za dwie liczby znaku $(-)$, a liczby 0 i b — za dwie liczby znaku $(+)$. Na podstawie tego, co już zostało udowodnione, liczba liczb wymiernych i liczby liczb niewymiernych, położonych pomiędzy liczbami a i 0 lub pomiędzy liczbami 0 i b , jest nieskończonością, a ponieważ każda liczba położona pomiędzy liczbami a i 0 i każda liczba położona pomiędzy liczbami 0 i b , a nadto i sama liczba 0, są liczbami położonemi pomiędzy liczbami a i b , przeto pomiędzy liczbami a i b istnieje i w przypadku obecnym nieskończenie wiele liczb pośrednich niewymiernych. Udowodniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

III. *Jakiegokolwiek nierówne pomiędzy sobą liczby rzeczywiste oznaczylibyśmy przez a i b ($a < b$) i jakiegokolwiek od zera większą, ale choćby jak małą liczbę dodatnią ε przyjąlibyśmy, zawsze możemy wyznaczyć taki ciąg skończony*

$$x_1 < x_2 < x_3, \dots < x_n \quad (1)$$

liczb rzeczywistych, położonych pomiędzy liczbami a i b , żeby w ciągu

$$a, x_1, x_2, \dots, x_n, b, \quad (2)$$

różnica wszelkich dwóch sąsiednich wyrazów była co do wartości bezwzględnej mniejsza od ε ; możemy nawet ciąg (1) tak ułożyć, żeby stosownie do żądania, z góry wyrażonego, wyrazy ciągu (1) były liczbami wymiernymi albo niewymiernymi.

Istotnie, przyjąwszy dowolnie jakiegokolwiek liczbę ε' , większą od zera, ale mniejszą od ε , wyznaczajmy kolejno liczby

$$x_1, x_2, x_3 \dots$$

w sposób następujący: na x_1 przyjmijmy jakąkolwiek liczbę, byle sprawdzającą nierówność

$$a + \varepsilon' < x_1 < a + \varepsilon,$$

a wyznaczwszy x_k ($k \geq 1$), przyjmijmy na x_{k+1} jakąkolwiek wartość, byle czyniącą zadość nierównościom

$$x_k + \varepsilon' < x_{k+1} < x_k + \varepsilon.$$

Mamy tedy

$$0 < \varepsilon' < x_1 - a < \varepsilon$$

oraz

$$0 < \varepsilon' < x_{i+1} - x_i < \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3 \dots).$$

Mamy więc

$$x_{i+1} - a > (i + 1) \varepsilon'.$$

Oczywiście istnieć będzie pewna najmniejsza taka wartość p na i , żebyśmy mieli

$$(p + 1) \varepsilon' \geq b - a.$$

W takim razie zachodzić będzie nierówność

$$x_{p+1} - a > b - a.$$

Z tego wynika, że istnieć będzie pewna najmniejsza, od liczby p nie większa, taka liczba całkowita n , żebyśmy mieli

$$x_{n+1} \geq b.$$

Przy takim oznaczeniu wartości wyrazów ciągu (1) wszystkie wyrazy ciągu tego położone będą pomiędzy liczbami a i b , a różnica wszelkich dwóch wyrazów sąsiednich w ciągu (2) będzie, co do wartości bezwzględnej, mniejsza od liczby ε . Ponieważ na podstawie twierdzenia II-go możemy oczywiście przy tworzeniu w powyższy sposób wyrazów ciągu (1) przyjąć według upodobania, przy oznaczeniu wartości jakiegokolwiek wyrazu wspomnianego ciągu wartość wymierną lub niewymierną na ten wyraz, przeto stwierdzamy ostatecznie, że ciąg (1) możemy rzeczywiście tak utworzyć, ażeby zadość uczynić wszystkim żądaniom, wymienionym w twierdzeniu.

Rozszerzając znane już nam z dwóch rozdziałów poprzedzających pojęcie przekroju zbioru liczb wymiernych bezwzględnych podajemy definicyę następującą:

Przekrojem jakiegokolwiek zbioru wielkości w ściślejszem znaczeniu nazywamy taki jego podział na dwa zbiory, żeby każdy

element jednego z tych dwóch zbiorów, zbioru (A_1) , zwanego zbiorem elementów pierwszej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju, mniejszy był od każdego elementu drugiego zbioru, zbioru (A_2) , który zwie się zbiorem elementów drugiej kategorii w stosunku do rzeczzonego przekroju.

Jeżeli pewien element e oznaczonego zbioru wielkości (Z) nie jest ani mniejszy od żadnego elementu 1-szej kategorii w stosunku do oznaczonego przekroju (P) zbioru (Z) , ani większy od żadnego elementu 2-giej kategorii w stosunku do przekroju (P) , to w takim razie orzekamy, że element e położony jest na przekroju (P) .

Jeżeli istnieje pewien element w , który jest albo największym elementem zbioru (A_1) , albo najmniejszym elementem zbioru (A_2) , to odnośny przekrój zbioru (Z) zowie się przekrojem pierwszego gatunku, a w razie przeciwnym — drugiego gatunku. Jeżeli rozważany przekrój jest przekrojem zbioru liczb rzeczywistych wymiernych, to przypadek, w którymby istniały jednocześnie liczba największa w zbiorze (A_1) i liczba najmniejsza w zbiorze (A_2) zachodzić nie może, jeżeli bowiem pewna liczba wymierna w jest największą liczbą zbioru (A_1) , to jakkolwiek liczbę zbioru (A_2) oznaczylibyśmy przez a_2 , zawsze istnieć będą w zbiorze (A_2) liczby od liczby a_2 mniejsze; temi liczbami byłyby na podstawie tw. II-go, nieskończenie liczne liczby wymierne położone pomiędzy liczbami w i a_2 ; gdyby zaś pewna liczba wymierna w najmniejszą była liczbą zbioru (A_2) , to w zbiorze (A_1) liczba największa nie istniałaby, ponieważ jakkolwiek liczbę zbioru (A_1) oznaczylibyśmy przez a_1 , istniałyby w tym zbiorze liczby od liczby a_1 większe; liczbami temi byłyby na podstawie tw. II-go, nieskończenie liczne liczby wymierne, położone pomiędzy liczbami a_1 i w .

Wszelka liczba rzeczywista, która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby wymiernej rzeczywistej, należącej w stosunku do oznaczonego przekroju do pierwszej kategorii, ani większa od żadnej liczby rzeczywistej wymiernej drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju, jest na podstawie ogólnej definicyi. podanej wyżej, liczbą na rozważanym przekroju położoną.

IV. *Oznaczonemu przekrojowi (P) zbioru liczb rzeczywistych wymiernych odpowiada zawsze jedna i tylko¹⁾ jedna liczba rzeczy-*

¹⁾ Korzystamy tu z prawa, któreśmy sobie zastrzegli wyrażnie str. 52 i 53 do takiego wysławiania się, jak gdyby równe pomiędzy sobą elementy nie były odmiennymi pomiędzy sobą przedmiotami.

wista a na tym przekroju położona. Liczba a będzie wymierna lub niewymierna, zależnie od tego, czy przekrój (P) będzie przekrojem pierwszego czy drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych rzeczywistych.

Upewnijmy się najpierw o istnieniu liczby a . Jeżeli przekrój (P) jest pierwszego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiernych rzeczywistych, to istnieje pewna liczba wymierna w , która jest albo największa z liczb rzeczywistych wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (P) , albo najmniejsza z tych, które należą, w stosunku do rozważanego przekroju, do liczb rzeczywistych wymiernych drugiej kategorii. Liczba w leży oczywiście w każdym razie na przekroju (P) .

Założmy obecnie, że przekrój (P) jest drugiego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiernych rzeczywistych i oznaczmy przez (A_1) zbiór liczb wymiernych pierwszej, a przez (A_2) — zbiór liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do przekroju (P) . W takim razie nie istnieje ani liczba największa pośród liczb zbioru (A_1) , ani liczba najmniejsza pośród liczb zbioru (A_2) . Dwa przypadki są tedy możliwe:

1°. Liczba zero należy do zbioru (A_1) .

2°. Liczba zero należy do zbioru (A_2) .

W pierwszym przypadku możemy oczywiście podzielić zbiór liczb wymiernych bezwzględnych na dwa nieskończone liczne zbiory (A'_1) i (A'_2) , zaliczając do zbioru (A'_1) każdą liczbę wymierną bezwzględną, która należy do zbioru (A_1) , a do zbioru (A'_2) — wszystkie liczby wymierne bezwzględne, należące do zbioru (A_2) .

Ten podział zbioru liczb wymiernych bezwzględnych na zbiory (A'_1) i (A'_2) stanowi oczywiście pewien przekrój drugiego gatunku zbioru liczb bezwzględnych, a liczba bezwzględna niewymierna, na tym przekroju położona, oczywiście położona jest także na rozważanym przekroju zbioru liczb wymiernych rzeczywistych.

W drugim przypadku możemy oczywiście podzielić zbiór liczb wymiernych na dwa zbiory (A'_1) i (A'_2) w sposób następujący: do zbioru (A'_1) zaliczamy wartość bezwzględną każdej od zera nie większej liczby zbioru (A_2) , a do zbioru (A'_2) — wartość bezwzględną każdej liczby zbioru (A_1) . Spostrzegamy natychmiast, że ten podział zbioru liczb wymiernych bezwzględnych stanowi pewien przekrój drugiego gatunku zbioru tych liczb. Oznaczmy przez L liczbę bez-

względna niewymierna, na tym przekroju położoną. Stwierdzamy z łatwością, że liczba ujemna

$$-L$$

leży na rozważanym przekroju zbioru liczb wymiernych rzeczywistych.

Ostatecznie, na każdym przekroju pierwszego gatunku zbioru liczb wymiernych rzeczywistych leży przynajmniej jedna liczba rzeczywista wymierna, a na każdym przekroju drugiego gatunku — przynajmniej jedna liczba rzeczywista niewymierna. Pozostaje więc do udowodnienia, że dwie liczby rzeczywiste a i a' , położone na tym samym przekroju (P) zbioru liczb wymiernych rzeczywistych, są pomiędzy sobą równe.

W tym celu przyjmijmy pewną liczbę wymierną a_1 ze zbioru (A_1) i pewną liczbę wymierną a_2 ze zbioru (A_2), oznaczmy nadto przez ε liczbę od zera większą, ale poza tem dowolnie przyjętą. Na podstawie tw. III-go możemy wyznaczyć taki ciąg skończony

$$x_1 < x_2, \dots < x_n$$

liczb rzeczywistych wymiernych, żeby wszystkie te liczby położone były pomiędzy liczbami a_1 i a_2 , i żeby nadto w ciągu

$$a_1, x_1, x_2, \dots, x_n, a_2$$

różnica dwóch wyrazów sąsiednich stale mniejsza była od liczby ε . Pierwszy wyraz ciągu tego jest liczbą ze zbioru (A_1), a ostatni — ze zbioru (A_2). Zatem w ciągu powyższym znajdują się pewne dwa wyrazy sąsiednie a'_1 i a'_2 , z których pierwszy należy do zbioru (A_1), a drugi do zbioru (A_2). Mamy tedy

$$a'_2 - a'_1 < \varepsilon$$

oraz

$$\begin{aligned} a'_1 &\leq a \leq a'_2 \\ a'_1 &\leq a' \leq a'_2. \end{aligned}$$

Ze związków poprzedzających wnosimy z łatwością, że

$$|a - a'| < \varepsilon.$$

Dowiedliśmy więc, że wartość bezwzględna różnicy

$$a - a'$$

mniejsza jest od każdej, byle od zera większej liczby. Mamy więc

$$a - a' = 0,$$

skąd

$$a = a'.$$

Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

V. Każdej liczbie rzeczywistej r odpowiada przynajmniej jeden przekrój zbioru liczb rzeczywistych wymiernych, na którym ona jest położona. Jeżeli liczba r jest liczbą niewymierną, to istnieje jeden tylko taki przekrój, a przekrój ten jest drugiego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiernych. Jeżeli zaś liczba r jest liczbą wymierną, to istnieją dokładnie dwa takie przekroje zbioru liczb wymiernych, że na każdym z nich położona jest liczba r ; każdy z tych dwóch przekrojów jest pierwszego gatunku przekrojem zbioru liczb wymiernych, a liczba r jest w stosunku do jednego z nich największą liczbą pierwszej kategorii, a w stosunku do drugiego — najmniejszą liczbą kategorii drugiej.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, załóżmy najpierw, że liczba r jest liczbą niewymierną. Jeżeli wogóle istnieje taki przekrój (P) zbioru liczb wymiernych, żeby liczba r na przekroju tym była położona, to każda liczba rzeczywista wymierna 1-szej kategorii w stosunku do przekroju (P) mniejsza być musi od liczby r , a każda liczba wymierna 2-giej kategorii w stosunku do tegoż przekroju musi być większa od liczby r . Z jednej strony warunki te oczywiście określają przekrój (P) w zupełności, a z drugiej, jeżeli przekrój (P) zbioru liczb rzeczywistych wymiernych warunki te spełnia, to liczba r oczywiście na przekroju tym jest położona. Zatem, o ile chodzi o przypadek, w którym liczba r jest liczbą niewymierną, uzasadniliśmy twierdzenie.

Załóżmy obecnie, że liczba r jest liczbą rzeczywistą wymierną. Jeżeli wogóle istnieje taki przekrój (P) zbioru liczb rzeczywistych wymiernych, żeby liczba r na przekroju tym była położona, to każda liczba wymierna mniejsza od liczby r należeć będzie do 1-szej, a każda liczba wymierna większa od liczby r należeć będzie do 2-giej kategorii liczb wymiernych w stosunku do tego przekroju; co się zaś tyczy samej liczby r , to ona będzie mogła należeć do którejkolwiek z powyższych dwóch kategorii liczb wymiernych i będzie mogła być zatem albo największą liczbą 1-szej kategorii, albo najmniejszą 2-giej. Ponieważ zaś liczba r oczywiście położona będzie na przekroju (P), jeżeli przekrój ten spełnia wy-

mienione warunki, przeto twierdzenie zachodzi i w razie wymierności liczby r , a o to tylko jeszcze chodziło.

Określiliśmy wyżej pojęcie przekroju jakiegokolwiek zbioru wielkości w znaczeniu ścisłym. Zatem, przystępując do rozważania przekrojów zbioru liczb rzeczywistych, zwolnieni jesteśmy od podawania osobnej definicji takich przekrojów.

Uważajmy jakikolwiek przekrój (P) zbioru liczb rzeczywistych. Jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista x , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby rzeczywistej 1-szej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju (P) , ani większa od żadnej liczby rzeczywistej 2-giej kategorii w stosunku do tegoż przekroju, to na podstawie jednej z definicji, podanych wyżej, możemy wyrazić wzajemny związek liczby x i przekroju (P) , orzekając, że liczba x położona jest na przekroju (P) .

VI. *Każdemu przekrojowi (P) zbioru liczb rzeczywistych odpowiada dokładnie jedna taka wartość na liczbę rzeczywistą, żeby liczba rzeczywista x tej wartości położona była na tymże przekroju.*

Oznaczmy przez (A_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda należy do zbioru (K_1) liczb rzeczywistych 1-szej kategorii w stosunku do przekroju (P) , a przez (A_2) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda należy do zbioru (K_2) liczb rzeczywistych 2-giej kategorii w stosunku do tegoż przekroju. Zbiór liczb (A_1) oczywiście uważany być może za zbiór liczb wymiernych 1-szej kategorii, a zbiór liczb (A_2) — za zbiór liczb wymiernych 2-giej kategorii w stosunku do oznaczonego przekroju (P') zbioru liczb wymiernych.

Na podstawie tw. IV-go istnieć będzie pewna liczba rzeczywista a , położona na przekroju (P') , a wartość liczby tej oznaczona będzie w zupełności przez to jedno, że ma być położona na tym przekroju.

Z drugiej strony spostrzegamy natychmiast, że wszelka liczba rzeczywista, położona na przekroju (P) zbioru liczb rzeczywistych, o ile istnieje, położona być musi i na przekroju (P') zbioru liczb wymiernych.

Zatem, żeby pewna liczba rzeczywista x położona była na przekroju (P) zbioru liczb rzeczywistych, koniecznem jest, żebyśmy mieli

$$x = a. \quad (1)$$

Warunek ten jest wystarczający. Istotnie, założmy, że jest spełniony, i oznaczmy przez l_1 jakąkolwiek liczbę rzeczywistą

1-szej kategorii w stosunku do przekroju (P). Gdyby zachodziła nierówność

$$(2) \quad x < l_1,$$

to wszelka liczba wymierna w_1 , pośrednia pomiędzy liczbami x i l_1 (a takich liczb wymiernych istnieje na podstawie tw. II-go nieskończenie wiele), jako sprawdzająca nierówność

$$w_1 < l_1,$$

należałaby do zbioru (K_1), a więc i do zbioru (A_1), a ponieważ mamy

$$x < w_1,$$

przeto w razie równości (1) zachodziłaby nierówność

$$a < w_1$$

wbrew definicji liczby a . Zatem związki (1) i (2) jednocześnie zachodzić nie mogą. Z tego wynika, że w razie równości (1) mamy związek

$$x \geq l_1,$$

który wyraża, że liczba x nie jest mniejsza od żadnej liczby rzeczywistej 1-szej kategorii w stosunku do przekroju (P). Uważajmy teraz jakąkolwiek liczbę rzeczywistą l_2 2-giej kategorii w stosunku do przekroju (P). Gdyby zachodziła nierówność

$$(3) \quad x > l_2,$$

to (tw. II) istniałoby nieskończenie wiele liczb wymiernych mniejszych od x , ale większych od l_2 . Oznaczywszy jedną z tych liczb wymiernych przez w_2 , mielibyśmy

$$(4) \quad w_2 < x,$$

$$(5) \quad w_2 > l_2.$$

Na podstawie nierówności (5) liczba wymierna w_2 należałaby do zbioru liczb rzeczywistych 2-giej kategorii w stosunku do przekroju (P) i z tego powodu należałaby ona także i do zbioru (A_2) liczb wymiernych 2-giej kategorii w stosunku do przekroju (P') zbioru liczb wymiernych. Ale z drugiej strony związki (5), (4) i (1) pociągałyby za sobą związek

$$a > l_2,$$

sprzeczny z definicją liczby a . Zatem związki (1) i (3) zostają ze sobą w sprzeczności.

Jeżeli więc zachodzi równość (1), to zachodzić musi związek

$$x \leq l_2,$$

który wyraża, że liczba x nie jest większa od żadnej liczby rzeczywistej 2-giej kategorii w stosunku do przekroju (P). Zatem równość (1) jest rzeczywiście warunkiem wystarczającym, ażeby liczba x położona była na przekroju (P) zbioru liczb rzeczywistych. Ponieważ zaś, jakśmy już spostrzegli wyżej, warunek ten jest konieczny, ponieważ nadto warunek ten określa w zupełności wartość liczby x , przeto twierdzenie, które mieliśmy uzasadnić, zachodzi w podanem brzmieniu.

VII. *Jakikolwiek przekrój zbioru liczb rzeczywistych oznaczylibyśmy przez (P), zawsze zachodzi jedna z ewentualności następujących:*

1°. *W zbiorze liczb rzeczywistych pierwszej kategorii w stosunku do tego przekroju istnieje pewna liczba największa r' , albo*

2°. *w zbiorze liczb rzeczywistych drugiej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju istnieje pewna liczba najmniejsza r'' .*

Każda z tych ewentualności wyklucza drugą, a liczba położona na przekroju (P) równa się w pierwszym przypadku liczbie r' , a w drugim — liczbie r'' .

Twierdzenie to wysławiamy krócej w sposób następujący: *Wszelki przekrój zbioru liczb rzeczywistych jest przekrojem pierwszego gatunku.*

Twierdzenie to wynika z tw. VI-go.

Istotnie, na podstawie tw. VI-go istnieje w każdym razie pewna liczba rzeczywista r , położona na przekroju (P) zbioru liczb rzeczywistych. Oczywiście dwie tylko alternatywy są możliwe:

1°. *Liczba r jest liczbą rzeczywistą 1-szej kategorii w stosunku do przekroju (P), albo*

2°. *liczba r jest liczbą rzeczywistą 2-giej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju.*

W pierwszym przypadku liczba r jest z konieczności największą liczbą rzeczywistą 1-szej kategorii w stosunku do przekroju (P), a ponieważ w tym przypadku zbiór liczb rzeczywistych 2-giej kategorii w stosunku do tegoż przekroju zlewa się ze zbiorem liczb większych od liczby r , ponieważ nadto w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, większych od oznaczonej liczby rzeczywistej, ze względu na tw. II-gie liczba najmniejsza istnieć nie może, przeto

w rozważanym przypadku w zbiorze liczb rzeczywistych 2-giej kategorii w stosunku do przekroju (P) liczba najmniejsza istnieć nie może.

Zwróćmy się teraz do drugiego przypadku. W tym razie liczba r oczywiście może być tylko najmniejszą liczbą w 2-giej kategorii liczb rzeczywistych w stosunku do przekroju (P), a zbiór liczb rzeczywistych 1-szej kategorii w stosunku do tego przekroju oczywiście może być określony jako zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, mniejszych od liczby r . Ponieważ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, mniejszych od oznaczonej liczby rzeczywistej, liczba największa na podstawie tw. II-go istnieć nie może, przeto w obecnym przypadku w zbiorze liczb rzeczywistych 1-szej kategorii w stosunku do przekroju (P) nie może istnieć liczba największa.

Uzyskane wyniki oczywiście wyrażają łącznie twierdzenie, o które właśnie chodziło.

§ 91. Ze względu na różne rozważania, oparte na pojęciu liczby rzeczywistej, koniecznem jest, żebyśmy dokładnie określili treść zdania postaci następującej: „taka a taka liczba rzeczywista jest znana lub dana“.

W pierwszej chwili mogłoby się wydawać, że treść zdania, o które chodzi, mogłaby być określona w sposób następujący: liczba rzeczywista uważana być winna za daną lub znaną, skoro znak jej jest dany, a wartość bezwzględna jest w znaczeniu, określonym w § 68-ym str. 217, liczbą bezwzględną znaną. W rzeczywistości jednak przyjmujemy inną definicyę, która, jak się przekonamy, jest bardziej szeroka.

Przedewszystkiem uzasadnimy twierdzenie następujące:

I. Oznaczmy przez (Ω_1) i (Ω_2) takie dwa zbiory liczb wymiernych rzeczywistych, żeby zbiory te spełniały warunki następujące:

1°. Żadna liczba zbioru (Ω_1) nie jest większa od żadnej liczby zbioru (Ω_2) .

2°. Jakkolwiek, byle od zera większą, liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez ε , zawsze istnieć będą dwie liczby wymierne w_1 i w_2 , należące odpowiednio do zbiorów (Ω_1) i (Ω_2) , a przytem takie, żeby zachodziła nierówność

$$w_2 - w_1 < \varepsilon.$$

W takim razie istnieje jedna i tylko jedna liczba rzeczywista ¹⁾ x ,

¹⁾ Zgodnie z prawem, któreśmy sobie zastrzegli, zakładamy milcząco, że równe pomiędzy sobą liczby nie są uważane za różne od siebie przedmioty.