

Liczba

$$(4) \quad \frac{m^2 + 1}{p^2}$$

nie jest zupełnym kwadratem (§ 61), ponieważ, gdybyśmy mieli

$$\frac{m^2 + 1}{p^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

oznaczając przez

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

pewną liczbę ułamkową, mielibyśmy

$$m^2 + 1 = \left(\frac{\alpha p}{\beta} \right)^2,$$

co mogłoby zachodzić tylko w razie, gdyby istniała (§ 61) liczba całkowita, której kwadrat równałby się liczbie $m^2 + 1$, a taka liczba całkowita nie istnieje, gdyż kwadrat liczby całkowitej, nie większej od m , mniejszy jest od $m^2 + 1$, a kwadrat każdej liczby całkowitej, większej od m , większy jest od $m^2 + 1$. Zatem liczba (4) rzeczywiście nie jest kwadratem zupełnym. Możemy tedy oznaczyć (§ 61) pewien drugiego gatunku przekrój (P) zbioru liczb wymiernych, oświadczając, że każda liczba wymierna, której kwadrat jest inny od liczby

$$\frac{m^2 + 1}{p^2},$$

leży przed przekrojem (P), a każda liczba wymierna, której kwadrat większy jest od tej liczby, leży poza tym przekrojem. Na przekroju (P) położona jest pewna liczba niewymierna x , która na podstawie związków (1) i (2) sprawdza nierówności

$$a < x < b.$$

Dowiedliśmy więc istnienie liczby niewymiernej pośredniej pomiędzy liczbami a i b , a o to tylko chodziło.

§ 75. W § 68-ym zastanawialiśmy się już nad sprawą oznaczania liczb bezwzględnych. Ponieważ wszystkie pojęcia i twierdzenia, którymiśmy się tam posługiwali, zostały już w rozdziale obecnym ugruntowane na podstawach czysto arytmetycznych, przeto odsyłamy czytelnika do § 68-go, nadmienając, że zachowujemy

nadal, bez żadnej zmiany, wszystkie definicje i umowy tam wprowadzone i przechodzimy wprost do teorii działań zasadniczych na liczbach bezwzględnych.

Żeby rozszerzyć pojęcie dodawania do przypadku dwóch składników równych jakimkolwiek liczbom bezwzględnym, oznaczmy najpierw przez a i b dwie liczby wymierne.

Suma

$$a + b$$

nie będzie ani mniejsza od sumy żadnych dwóch liczb wymiernych, z których jedna byłaby nie większa od liczby a , a druga od liczby b , ani większa od sumy dwóch liczb wymiernych, z których jedna byłaby nie mniejsza od liczby a , a druga — od liczby b . Żadna liczba, sumie liczb wymiernych a i b nierówna, nie posiada własności poprzedzających, jeżeli bowiem pewna liczba wymierna w sumie $a + b$ równa nie jest, to zachodzi albo nierówność

$$w < a + b,$$

albo nierówność

$$w > a + b.$$

Otóż w pierwszym przypadku oczywiście istnieje nieskończenie wiele takich par liczb wymiernych a' i b' , które sprawdzają związki

$$w < a' + b', \quad a' \leq a, \quad b' \leq b,$$

a w drugim oczywiście istnieje nieskończenie wiele takich par liczb wymiernych a'' i b'' , które sprawdzają związki

$$w > a'' + b'', \quad a'' \geq a, \quad b'' \geq b.$$

Zatem, jeśli tylko pewna liczba wymierna w sumie liczb wymiernych a i b równa nie jest, to liczba ta rzeczywiście nie może posiadać wymienionych wyżej dwóch własności. Uwaga ta prowadzi nas do przyjęcia definicji następującej:

Wynikiem dodawania jakiegokolwiek liczby bezwzględnej b do jakiegokolwiek drugiej liczby bezwzględnej a nazywamy każdą taką liczbę x , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby równej sumie dwóch liczb wymiernych odpowiednio nie większych od liczb a i b , ani większa od żadnej liczby równej sumie dwóch liczb wymiernych odpowiednio nie mniejszych od tych liczb.

Ze względu na drogę, która przywiodła nas do definicji poprzedzającej, mamy pewność, że definicja ta nie jest w sprzeczności z definicją dodawania liczb wymiernych, nadto, z samego brzmienia rozważanej definicji wynika bezpośrednio, że definicja ta czyni zadość temu podstawowemu warunkowi (§ 25), aby wynik działania oznaczony był tylko co do wartości i wyłącznie zależał od wartości liczb ulegających działaniu.

I. Dodawanie liczb bezwzględnych jest zgodnie z zasadami rozdziału V-go, działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Istotnie, oznaczmy przez a i b dwie jakiekolwiek liczby bezwzględne i uważajmy zbiór (K_1) wszystkich liczb, z których każda uważana być może za sumę pewnej liczby wymiernej nie większej od liczby a i pewnej liczby wymiernej nie większej od liczby b ; uważajmy nadto zbiór (K_2) wszystkich liczb, z których każda uważana być może za sumę pewnej liczby wymiernej nie mniejszej od liczby a i pewnej liczby wymiernej nie mniejszej od liczby b . Zbiory (K_1) i (K_2) są oczywiście zbiorami liczb wymiernych, nadto spostrzegamy natychmiast, że żadna liczba zbioru (K_1) nie jest większa od żadnej liczby zbioru (K_2) .

Z tego wynika (§ 68, tw. II), że istnieje przynajmniej jedna wartość na taką liczbę x , która nie byłaby ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (K_1) , ani większa od żadnej liczby zbioru (K_2) .

W rzeczywistości istnieje tylko jedna taka wartość na x , która sprawdza warunki poprzedzające. Istotnie, oznaczmy przez (A_1) pierwszą część, a przez (A_2) drugą część jednego z określników liczby a , a przez (B_1) i (B_2) analogiczne elementy w stosunku do liczby b . Oznaczmy nadto przez (X_1) zbiór liczb, z których każda równa się sumie jednej liczby zbioru (A_1) i jednej liczby zbioru (B_1) , a przez (X_2) zbiór liczb, z których każda równa się sumie jednej liczby zbioru (A_2) i jednej liczby zbioru (B_2) . W § 69-tym dowiedliśmy, opierając się na podstawach czysto arytmetycznych, że zbiór (X_1) stanowi pierwszą część, a zbiór (X_2) drugą — określnika oznaczonej liczby; liczbie tej równa się niezawodnie liczba x rozważana wyżej, gdyż wszystkie liczby zbioru (X_1) należą oczywiście do zbioru (K_1) , a wszystkie liczby zbioru (X_2) — do zbioru (K_2) , skąd wynika, że liczba x nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (X_1) , ani większa od żadnej liczby zbioru (X_2) .

Ostatecznie dowiedliśmy, że istnieje jedna i tylko jedna wartość na taką liczbę x , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby

zbioru (K_1) , ani większa od żadnej liczby zbioru (K_1) . Ponieważ zaś, na podstawie definicji dodawania liczb bezwzględnych, powyższa wartość liczby x przedstawia właśnie wynik dodawania liczby b do liczby a , przeto uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Rozumowanie poprzedzające nie tylko stanowi dowód jednoznaczności i bezwarunkowej wykonalności dodawania liczb bezwzględnych, ale nadto *dostarcza nam oczywiście środek do wyznaczenia sumy*

$$a + b,$$

skoro liczby a i b są dane, gdyż w takim razie możemy przyjąć za określniki $\{(A_1), (A_2)\}$ i $\{(B_1), (B_2)\}$ liczb a i b dane określniki (§ 68) tych liczb, a wówczas określnik $\{(X_1), (X_2)\}$ sumy $a + b$ będzie określnikiem znanym.

II. *Suma jakiegokolwiek liczby ¹⁾ liczb bezwzględnych posiada własność łączności.*

Ze względu na tw. I-sze z § 28-go, winniśmy tylko dowieść, iż mamy

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

jakiegokolwiek liczby bezwzględne oznaczylibyśmy przez a , b i c .

Oznaczmy przez (K_1) i (K'_1) odpowiednio zbiory wszystkich liczb wymiernych postaci

$$a_1 + (b_1 + c_1) \quad \text{i} \quad (a_1 + b_1) + c_1,$$

gdzie oznaczyliśmy ogólnie przez a_1 , b_1 i c_1 liczby wymierne, sprawdzające związki

$$a_1 \leq a, \quad b_1 \leq b \quad \text{i} \quad c_1 \leq c.$$

Oznaczmy nadto przez (K_2) i (K'_2) odpowiednio zbiory wszystkich liczb wymiernych postaci

$$a_2 + (b_2 + c_2) \quad \text{i} \quad (a_2 + b_2) + c_2,$$

gdzie oznaczyliśmy ogólnie przez a_2 , b_2 i c_2 liczby wymierne, sprawdzające związki

$$a_2 \geq a, \quad b_2 \geq b \quad \text{i} \quad c_2 \geq c.$$

¹⁾ Czytelnik przypomina sobie, że, na podstawie ogólnych zasad, omówionych w rozdziale V-tym, działanie dodawania winno być uważane za określone w razie jakiegokolwiek skończonej liczby składników, jeżeli tylko zostało określone w razie, kiedy liczba ich równa się liczbie dwa.

Zbiory (K_1) i (K_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika sumy

$$a + (b + c),$$

a zbiory (K'_1) i (K'_2) — pierwszą i drugą część pewnego określnika sumy

$$(a + b) + c.$$

Ponieważ zaś w rzeczywistości zbiór (K_1) zlewa się ze zbiorem (K'_1) , a zbiór (K_2) ze zbiorem (K'_2) , na podstawie, z teorii liczb wymiernych wynikających, równości

$$\begin{aligned} a_1 + (b_1 + c_1) &= (a_1 + b_1) + c_1, \\ a_2 + (b_2 + c_2) &= (a_2 + b_2) + c_2, \end{aligned}$$

przeto określnik $\{(K_1), (K_2)\}$ zlewa się z określnikiem $\{(K'_1), (K'_2)\}$. skąd znów wypływa równość, którą pragnęliśmy udowodnić.

III. *Dodawanie liczb bezwzględnych posiada własność przemienności.*

Twierdzenie to zachodzi w razie dwóch składników, gdyż, przy zachowaniu oznaczeń, któremi posługiwaliśmy się przy dowodzie tw. I-szego, każda z sum

$$a + b \quad \text{i} \quad b + a$$

przedstawia liczbę równą takiej liczbie x , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (K_1) , ani większa od żadnej liczby zbioru (K_1) . Ponieważ zaś dodawanie liczb bezwzględnych posiada własność łączności na podstawie twierdzenia poprzedzającego, przeto na podstawie tw. II-go z § 28-go, dodawanie liczb bezwzględnych posiada rzeczywiście własność przemienności, jakakolwiek byłaby liczba składników.

IV. *Jakąkolwiek liczbę bezwzględną oznaczylibyśmy przez a , mamy w każdym razie*

$$a + 0 = a.$$

Istotnie, jeżeli przyjmiemy za pierwszą i drugą część określnika liczby zero dwa zbiory, z których każdy obejmowałby jedyną liczbę zero, to na podstawie wyników uzyskanych wyżej, stwierdzimy, że pomiędzy określnikami sumy

$$a + 0$$

znajdują się wszystkie określniki samej liczby a , skąd bezpośrednio wynika równość, którą pragnęliśmy uzasadnić.

V. Jeżeli oznaczymy przez b i b' dwie liczby bezwzględne, sprawdzające nierówność

$$b < b' \quad (1)$$

to, jakkolwiek liczbę bezwzględną oznaczylibyśmy przez a , zachodzić będzie nierówność

$$a + b < a + b'. \quad (2)$$

Twierdzenie to jest oczywiste w przypadku szczególnym, kiedy liczba a równa się zeru. albowiem (tw. IV) w takim razie mamy

$$a + b = b \quad \text{i} \quad a + b' = b'.$$

Założmy więc, że liczba a jest od zera większa i oznaczmy przez w i w' ($w < w'$) dwie liczby wymierne, położone pomiędzy liczbami b i b' . Liczba a , jako od zera odmienna, uważana być może za liczbę, położoną na pewnym przekroju (P) zbioru liczb wymiernych, a na podstawie znanego twierdzenia (tw. III, § 72), istnieją dwie liczby a_1 i a_2 , położone odpowiednio przed przekrojem (P) i poza nim, sprawdzające nierówność

$$a_2 - a_1 < w' - w.$$

skąd

$$a_2 + w < a_1 + w'.$$

Ponieważ zaś na podstawie definicyi dodawania mamy

$$\begin{aligned} a + b &\leq a_2 + w \\ a + b' &\leq a_1 + w', \end{aligned}$$

przeto nierówność (2), o uzasadnienie której chodziło, rzeczywiście będzie zachodzić.

§ 76. Przystępując do teoryi odejmowania spostrzegamy najpierw, że ze względu na własność przemienności dodawania liczb bezwzględnych istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania tych liczb. Następnie czynimy uwagi następujące:

1°. Odejmowanie liczb bezwzględnych, o ile jest wykonalne, jest działaniem jednoznaczem na podstawie tw. V-go z paragrafu poprzedzającego i ogólnych tw. I i II z § 29-go.

2°. Jakikolwiek liczby bezwzględne oznaczylibyśmy przez a , b i c , mamy (§ 32, tw. I) równości następujące:

$$\left. \begin{aligned} a + (b - c) &= (a + b) - c \\ a - (b - c) &= (a + c) - b \\ (b - c) - a &= b - (a + c). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

byleby tylko odejmowania, zaznaczone w powyższych wzorach były wykonalne.

Zatem, żeby uzyskać teorię odejmowania liczb bezwzględnych w postaci zupełnej, winniśmy tylko zbadać warunki wykonalności tego działania i podać regułę do wyznaczania reszty, gdy odjemna i odjemnik są dane, a działanie jest wykonalne. Zwracamy się więc do sprawy wyznaczenia takiej liczby x , która sprawdzałaby równanie

$$(2) \quad b + x = a.$$

Ponieważ, o ile liczba x istnieje, mamy w każdym razie

$$x \geq 0,$$

przeto, na podstawie twierdzenia V-go z paragrafu poprzedzającego, mamy

$$b + x \geq b + 0.$$

a ponieważ (tw. IV-te z paragrafu poprzedzającego)

$$b + 0 = b,$$

przeto

$$b + x \geq b,$$

a więc

$$x \geq 0,$$

na podstawie równości (2). Zatem, *odejmowanie liczb bezwzględnych może być wykonalne tylko w razie, kiedy odjemna nie jest od odjemnika mniejsza.*

Powiadam, że *warunek ten jest wystarczający.*

W przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$b = a$$

wartość

$$x = 0$$

liczby x oczywiście sprawdza równanie (2) na podstawie twierdzenia IV-go z paragrafu poprzedzającego. Zatem w razie równości odjemnej i odjemnika odejmowanie liczb bezwzględnych jest wykonalne, a reszta równa się zeru. (Spostrzegamy nadto, że odwrotnie, jeżeli reszta przy odejmowaniu liczb bezwzględnych równa się zeru, to odjemna i odjemnik są sobie równe).

Przejdźmy do przypadku ogólnego. Załóżmy, że mamy

$$a > b$$

i uważajmy pewien określnik $\{(A_1), (A_2)\}$ liczby a i pewien określnik $\{(B_1), (B_2)\}$ liczby b . Oznaczywszy przez w jedną z liczb wymiernych, pośrednich pomiędzy liczbami b i a , możemy założyć, że każda liczba zbioru (A_1) większa jest od liczby w , a każda liczba zbioru (B_2) jest mniejsza od tejże liczby w , albowiem gdyby okoliczności te nie zachodziły, to, usuwając (§ 68, tw. VII) ze zbioru (A_1) liczby mniejsze od liczby w albo tej liczbie równe (o ileby takie liczby istniały), a ze zbioru (B_2) liczby większe od liczby w albo jej równe, moglibyśmy zawsze urzeczywistnić warunki, o których zakładamy, że są spełnione.

Oznaczając ogólnie przez a_1, a_2, b_1 i b_2 liczby należące odpowiednio do zbiorów $(A_1), (A_2), (B_1)$ i (B_2) , mamy

$$a_2 > b_1 \quad \text{ i } \quad a_1 > b_2.$$

Możemy zatem rozważać zbiór (C_1) wszystkich liczb wymiernych postaci $a_1 - b_2$ i zbiór (C_2) wszystkich liczb wymiernych postaci $a_2 - b_1$. Ze względu na związki

$$a_1 \leq a_2 \quad \text{ i } \quad b_1 \leq b_2,$$

żadna liczba zbioru (C_1) nie jest większa od żadnej liczby zbioru (C_2) , z drugiej zaś strony mamy

$$(a_2 - b_1) - (a_1 - b_2) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1). \quad (3)$$

Ale, jakkolwiek od zera odmienną, choćby jak małą liczbę wymierną oznaczylibyśmy przez ε , zawsze istnieć będą takie układy wartości na a_1, a_2, b_2 i b_1 , żebyśmy mieli

$$a_2 - a_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ i } \quad b_2 - b_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

W takim razie na podstawie równości (3) zachodzić będzie nierówność

$$(a_2 - b_1) - (a_1 - b_2) < \varepsilon.$$

Natychmiastowem następstwem uzyskanych wyników jest to, że zbiór (C_1) uważany być może za pierwszą część, a zbiór (C_2) za drugą część określnika pewnej liczby c . Powiadam, że mamy

$$b + c = a. \quad (4)$$

Istotnie, na podstawie teorii dodawania, możemy uważać za pierwszą część (D_1) pewnego określnika sumy $b + c$ zbiór wszystkich liczb, z których każda d_1 jest sumą pewnej liczby zbioru (B_1) i pewnej liczby zbioru (C_1) , a za drugą część (D_2) tego samego określnika — zbiór wszystkich liczb d_2 , z których każda jest sumą jednej liczby ze zbioru (B_2) i jednej liczby ze zbioru (C_2) . Załączając tedy wszystkie poprzednie oznaczenia i oznaczając jeszcze przez b'_1 i b'_2 dwie nowe liczby, należące odpowiednio do zbiorów (B_1) i (B_2) , mamy na liczby d_1 i d_2 , należące odpowiednio do zbiorów (D_1) i (D_2) ogólne wzory następujące:

$$\begin{aligned} d_1 &= b'_1 + (a_1 - b_2) \\ d_2 &= b'_2 + (a_2 - b_1) \end{aligned}$$

skąd

$$(5) \quad \begin{cases} d_1 = a_1 - (b_2 - b'_1) \\ d_2 = a_2 - (b'_2 - b_1), \end{cases}$$

gdyż, ze względu na nierówności

$$\begin{aligned} b'_1 &\leq b_2 \\ b_1 &\leq b'_2, \end{aligned}$$

które znów zachodzą z tej przyczyny, iż każda z liczb b_1 i b'_1 należy do zbioru (B_1) , a każda z liczb b_2 i b'_2 — do zbioru (B_2) , odejmowania zaznaczone we wzorach powyższych są wykonalne. Ponieważ mamy w każdym razie

$$a_1 \leq a \leq a_2,$$

przeto wnosimy ze wzorów (5), że którąkolwiek z liczb zbioru (D_1) oznaczałby symbol d_1 , a którąkolwiek z liczb zbioru (D_2) — symbol d_2 , w każdym razie mamy

$$d_1 \leq a \leq d_2.$$

Zatem określnik $\{(D_1), (D_2)\}$ sumy $b + c$ jest także jednym z określników liczby a , a stąd wynika, że równość (4) rzeczywiście zachodzi.

Zatem liczba x , sprawdzająca równanie (2), istnieje także w razie nierówności $a > b$, a na wartość liczby x mamy wzór

$$x = c.$$

Ostatecznie dowiedliśmy, że *warunek konieczny i wystarczający wykonalności odejmowania liczb bezwzględnych polega na tem, iżby odjemnik nie był większy od odjemnej*; nadto uzyskaliśmy metodę do wyznaczenia reszty w przypadku, kiedy odjemna i odjemnik są dane, a warunki wykonalności działania są spełnione: jeżeli odjemna równa się odjemnikowi, to w takim razie, ale też tylko w takim razie reszta równa się zeru, jeżeli zaś odjemna większa jest od odjemnika, to w sposób omówiony wyżej, możemy wyznaczyć jeden z określników różnicy w zależności od danych określników odjemnej i odjemnika.

§ 77. Podobnie jak w przypadku dodawania, oderwana teoria liczb wymiernych przywodzi niezależnie od geometrycznej teorii liczb bezwzględnych do ogólnej definicyi mnożenia tych liczb. Istotnie, uważajmy dwie liczby wymierne a i b i ich iloczyn $a \cdot b$. Iloczyn ten nie jest mniejszy od iloczynu dwóch liczb wymiernych, z których jedna byłaby nie większa od liczby a , a druga — od liczby b , ani większy od iloczynu dwóch liczb wymiernych, z których jedna byłaby nie mniejsza od liczby a , a druga — od liczby b . Żadna liczba wymierna, iloczynowi $a \cdot b$ nierówna, własności poprzedzających nie posiada, jeżeli bowiem pewna liczba w iloczynowi $a \cdot b$ równa nie jest, to mamy, albo

$$w < a \cdot b,$$

albo

$$w > a \cdot b,$$

w pierwszym przypadku mamy dwie liczby wymierne odpowiednio nie większe od a i b , mianowicie same te liczby, których iloczyn większy jest od liczby w , a w drugim — dwie liczby odpowiednio nie mniejsze od liczb a i b , mianowicie znowu same te liczby, których iloczyn mniejszy jest od liczby w ; w obu więc jedynie możliwych przypadkach liczba wymierna w , iloczynowi $a \cdot b$ nierówna, nie posiada powyższych własności. Uwagi te przywodzą nas do definicyi następującej:

Iloczynem jakiegokolwiek liczby bezwzględnej a , przyjętej za mnożną, przez jakąkolwiek drugą liczbę bezwzględną b , przyjętą za mnożnik, nazywamy liczbą bezwzględną x , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby równej iloczynowi dwóch liczb wymiernych, odpowiednio nie większych od liczb a i b , ani większa od żadnej liczby równej iloczynowi dwóch liczb wymiernych odpowiednio nie mniejszych od liczb a i b .

Rozważania, które przywiodły nas do tej definicyi, dają nam z góry pewność, że rzeczona definicya, przy zastosowaniu jej do liczb wymiernych, do żadnej sprzeczności doprowadzić nie może, a z samego jej brzmienia wynika bezpośrednio, że każda liczba x' równa liczbie, mogącej być uważaną za iloczyn $a \cdot b$, sama za ten iloczyn uważana być może, i może także być uważana za iloczyn jakiegokolwiek liczby a' równej liczbie a przez jakąkolwiek liczbę b' , równą liczbie b .

Innemi słowy, powyższa definicya czyni zadość tym podstawowemu warunkom (§ 25), żeby wynik działania oznaczony był tylko co do wartości i zależał wyłącznie od wartości liczb ulegających działaniu.

I. *Mnożenie liczb bezwzględnych jest, zgodnie z zasadą, do której postanowiliśmy zawsze zastosowywać się (§ 31), działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.*

Istotnie, zachowajmy oznaczania, któremi posługiwaliśmy się, wysławiając definicyę mnożenia liczb bezwzględnych, i oznaczmy nadto przez (K_1) zbiór wszystkich liczb, z których każda uważana być może za iloczyn dwóch liczb wymiernych, odpowiednio nie większych od liczb a i b , a przez (K_2) — zbiór wszystkich liczb, z których każda uważana być może za iloczyn dwóch liczb wymiernych, odpowiednio nie mniejszych od liczb a i b . Oczywiście, zbiory (K_1) i (K_2) są dwoma zbiorami liczb wymiernych i zbiory te posiadają tę własność, iż żadna liczba zbioru (K_1) nie jest większa od żadnej liczby zbioru (K_2) . Z tego wynika (§ 68, tw. II), że istnieje przynajmniej jedna liczba x , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (K_1) , ani większa od żadnej liczby zbioru (K_2) . Powiadamy, że warunki te określają wartość liczby x w zupełności. Istotnie, oznaczmy przez (A_1) pierwszą część, a przez (A_2) drugą część jednego z określników liczby a , a przez (B_1) i (B_2) elementy analogiczne w stosunku do liczby b i załóżmy, żeśmy dobrali określniki $\{(A_1), (A_2)\}$ i $\{(B_1), (B_2)\}$ tak, żeby, co zawsze może być urzeczywistnione (§ 68, tw. VIII), każda liczba każdego ze zbiorów (A_2) i (B_2) mniejsza była od oznaczonej liczby wymiernej, większej od każdej z liczb a i b . Jeżeli tedy oznaczmy przez (C_1) zbiór wszystkich iloczynów, z których każdy jest iloczynem jednej liczby zbioru (A_1) i jednej liczby zbioru (B_1) , a przez (C_2) zbiór wszystkich iloczynów, z których każdy jest iloczynem jednej liczby zbioru (A_2) i jednej liczby zbioru (B_2) , to na podstawie rozumo-

wania czysto arytmetycznej natury, wyłożonego już w § 70 tym, zbiory (C_1) i (C_2) uważane być mogą odpowiednio za pierwszą i drugą część określnika pewnej liczby bezwzględnej c . A ponieważ każda liczba zbioru (C_1) należy do zbioru (K_1) , a każda liczba zbioru (C_2) — do zbioru (K_2) , przeto mamy

$$x = c.$$

Ze względu na definicyę mnożenia liczb bezwzględnych równość ta wyraża właśnie twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Rozważania powyższe nie tylko stanowią dowód na to, że mnożenie liczb bezwzględnych jest działaniem zawsze wykonalnem i jednoznacznem, ale prócz tego podają nam środek do wyznaczenia iloczynu przy danych mnożnej i mnożniku, jeżeli bowiem, określniki $\{(A_1), (A_2)\}$ i $\{(B_1), (B_2)\}$ są znane, to i określnik $\{(C_1), (C_2)\}$ liczby c , równej iloczynowi $a \cdot b$, oczywiście także będzie znany.

II. *Mnożenie liczb bezwzględnych posiada własność łączności, jakiegokolwiek skończonej liczbie równałaby się liczba czynników.*

Ze względu na twierdzenie I-sze z § 28-go winniśmy tylko dowieść, że

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c. \quad (1)$$

jakiegokolwiek liczby bezwzględne oznaczylibyśmy przez a, b, c . Oznaczając ogólnie przez a_1, b_1, c_1 trzy liczby wymierne, odpowiednio nie większe od liczb a, b i c , a przez a_2, b_2, c_2 trzy liczby wymierne, odpowiednio nie mniejsze od liczb a, b i c , oznaczmy przez (K_1) zbiór liczb wymiernych, z których każda uważana być może za wartość wyrażenia postaci

$$a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1),$$

a przez (K_2) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda uważana być może za wartość wyrażenia postaci

$$a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2).$$

W takim razie możemy uważać zbiór (K_1) za pierwszą część, a zbiór (K_2) za drugą część pewnego określnika $\{(K_1), (K_2)\}$ wartości wyrażenia

$$a \cdot (b \cdot c), \quad (2)$$

a ponieważ na podstawie teorii liczb wymiernych mamy

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1) &= (a_1 \cdot b_1) \cdot c_1 \\ a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2) &= (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \end{aligned}$$

przeto określnik $\{(K_1), (K_2)\}$ jest także jeden z określników iloczynu

$$(3) \quad (a \cdot b) \cdot c.$$

Zatem, wyrażenia (2) i (3), jako wyrażenia, których wartości oznaczone być mogą przez pewien i ten sam określnik, są rzeczywiście zawsze sobie równe. Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

III. *Mnożenie liczb bezwzględnych posiada własność przemienności bez względu na liczbę czynników.*

Spostrzegamy z łatwością, że w razie dwóch czynników, twierdzenie zachodzi niezawodnie, gdyż, przy zachowaniu oznaczeń, którymi posługiwaliśmy się przy dowodzie twierdzenia I-szego, każdy z iloczynów

$$a \cdot b \quad \text{ i } \quad b \cdot a$$

równa się oczywiście tej liczbie x , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (K_1) , ani większa od żadnej liczby zbioru (K_2) . Stąd zaś wynika na podstawie twierdzenia poprzedzającego i twierdzenia II-go z § 28-go, że, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, o dówód którego chodziło, mnożenie liczb bezwzględnych posiada własność przemienności bez względu na liczbę czynników.

IV. *Iloczyn liczb bezwzględnych równy jest zeru w razie i tylko w razie, kiedy jeden przynajmniej z czynników równy jest zeru.*

Istotnie, drogą indukcji matematycznej dowiedlibyśmy z łatwością prawdziwości tego twierdzenia w przypadku ogólnym, gdybyśmy posiadali dowód tego twierdzenia w przypadku dwóch tylko czynników. Uważajmy więc iloczyn dwóch czynników a i b i załóżmy, że czynnik a równa się zeru; ze względu na własność przemienności mnożenia liczb bezwzględnych, jest rzeczą obojętną, czy czynnik a uważać będziemy za mnożną czy też za mnożnik.

Zachowując tedy oznaczenia, którymi posługiwaliśmy się przy dowodzie tw. I-szego, możemy określić każdy ze zbiorów (A_1) i (A_2) jako zbiór, do którego należy jedyna liczba zero. Wówczas każdy ze zbiorów (C_1) i (C_2) , stanowiących odpowiednio pierwszą i drugą część jednego z określników iloczynu $a \cdot b$, obejmować będzie je-

dyną liczbę zero. Zatem sam iloczyn $a \cdot b$ oczywiście równać się będzie zeru. Założmy obecnie, że żadna z liczb a i b zeru równa nie jest. W takim razie znajdują się dwie, zeru nierówne, liczby wymierne, a_1 i b_1 , sprawdzające nierówności

$$a_1 < a, \quad b_1 < b,$$

a ponieważ na podstawie definicyi mnożenia mamy tedy

$$a \cdot b > a_1 \cdot b_1,$$

przeto mamy

$$a \cdot b > 0.$$

Z powyższych rozważań wynika, że twierdzenie, o które chodziło, winno być uważane za udowodnione.

V. *Jeżeli jeden z czynników iloczynu dwóch liczb wymiernych równa się jedności, to sam iloczyn równa się drugiemu czynnikowi.*

Zachowując w dalszym ciągu oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się przy dowodzie tw. I-go, przyjmijmy

$$a = 1$$

oraz, że każdy ze zbiorów (A_1) i (A_2) w takim razie obejmuje jedną liczbę 1; w takim razie zbiory (A_1) i (A_2) zawsze jeszcze stanowią będą odpowiednio pierwszą i drugą część jednego z określników liczby a , ale określnik $\{(C_1), (C_2)\}$ iloczynu $a \cdot b$ zlewać się będzie z określnikiem $\{(B_1), (B_2)\}$ liczby b . Mamy więc

$$a \cdot b = b,$$

zatem na podstawie własności przemienności mnożenia liczb bezwzględnych, mamy także

$$b \cdot a = b.$$

Uzyskane równości wyrażają właśnie twierdzenie, o którego udowodnienie chodziło.

VI. *W stosunku do dodawania i do odejmowania, mnożenie liczb bezwzględnych posiada własność rozdzielności.*

Na podstawie tw. I-go z § 30-go i tw. II-go § 32-go, twierdzenie, o które chodzi, będzie mogło być uważane za udowodnione, jeżeli tylko okażemy, że mamy

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

jakikolwiek liczby bezwzględne oznaczylibyśmy przez a , b i c . Oznaczmy przez (K_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda równa się wyrażeniu postaci

$$a_1 \cdot (b_1 + c_1),$$

gdzie a_1 , b_1 i c_1 oznaczają liczby wymierne, sprawdzające związki

$$a_1 \leq a, \quad b_1 \leq b \quad \text{ i } \quad c_1 \leq c,$$

przez (K'_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda równa się wyrażeniu postaci

$$a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1,$$

przez (K_2) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda równa się wyrażeniu postaci

$$(1) \quad a_2 \cdot (b_2 + c_2),$$

gdzie a_2 , b_2 i c_2 oznaczają trzy liczby wymierne, czyniące zadość związkom

$$a_2 \geq a, \quad b_2 \geq b \quad \text{ i } \quad c_2 \geq c,$$

wreszcie przez (K'_2) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda równa się wyrażeniu postaci

$$a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2.$$

W takim razie zbiór (K_1) uważany być może za pierwszą część, a zbiór (K_2) za drugą część pewnego określnika wartości wyrażenia

$$(2) \quad a \cdot (b + c).$$

Co do zbiorów (K'_1) i (K'_2) , to one uważane być mogą odpowiednio za pierwszą i drugą część pewnego określnika wartości wyrażenia

$$(3) \quad a \cdot b + a \cdot c,$$

a ponieważ ze względu na równości

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (b_1 + c_1) &= a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 \\ a_2 \cdot (b_2 + c_2) &= a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2, \end{aligned}$$

które niezawodnie zachodzą, albowiem mnożenie liczb wymiernych posiada własność rozdzielności w stosunku do dodawania, zbiór (K_1)

zlewa się ze zbiorem (K_1) , a zbiór (K_2) — ze zbiorem (K_2') , przeto wartości wyrażeń (2) i (3) są sobie równe. Zatem uzasadniliśmy równość, o którą właśnie chodziło.

VII. Oznaczmy przez a , b i b' trzy liczby bezwzględne i założmy, że mamy

$$b < b'. \quad (1)$$

Nierówność ta pociąga za sobą nierówność

$$a \cdot b < a \cdot b' \quad (2)$$

w razie, ale tylko w razie, kiedy zachodzi nierówność

$$a > 0. \quad (3)$$

Spostrzegamy natychmiast, że nierówność (2) nie zachodziłaby, gdyby liczba a nie sprawdzała warunku (3), gdyż mielibyśmy w takim razie

$$a = 0,$$

a więc

$$a \cdot b = a \cdot b' = 0,$$

na podstawie tw. IV-go.

Zatem nierówność (3) jest rzeczywiście koniecznym warunkiem, ażeby nierówność (1) pociągała za sobą nierówność (2). Z drugiej strony na podstawie tw. VI-go, mamy

$$a \cdot (b' - b) = a \cdot b' - a \cdot b.$$

Ze względu na nierówności (1) i (3), i na tw. IV-te, mamy

$$a \cdot (b' - b) > 0,$$

mamy więc

$$a \cdot b' - a \cdot b > 0,$$

skąd

$$a \cdot b' > a \cdot b$$

o co jedynie jeszcze chodziło.

§ 78. Na podstawie ogólnej teorii działań zasadniczych, rozwiniętej w rozdziale V-tym, oraz własności przemienności mnożenia (§ 31) istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia liczb bezwzględnych, a ilorazem podziału jakiegokolwiek oznaczonej liczby bezwzględnej a , przyjętej za dzielną, przez jakąkolwiek liczbę b , przyjętą za dzielnik, będzie wszelka liczba x , która sprawdza równanie

$$b \cdot x = a. \quad (1)$$

W przypadku szczególnym, kiedy dzielnik b równy jest zeru, dzielenie ze względu na tw. IV-te z paragrafu poprzedzającego wykonalne będzie jedynie w razie, kiedy i dzielna równa się zeru, a wtedy każda wartość na x sprawdza równanie (1) i wynik dzielenia jest całkiem nieoznaczony.

Zwróćmy się do przypadku, kiedy mamy

$$(2) \quad b > 0.$$

i oznaczmy przez $\{(A_1), (A_2)\}$ jeden z określników liczby a , a przez $\{(B_1), (B_2)\}$ jeden z określników liczby b . Przyjawszy dowolnie pewną liczbę wymierną l_1 , sprawdzającą nierówność

$$0 < l_1 < b,$$

i pewną liczbę wymierną l_2 , czyniącą zadość nierównościom

$$l_2 > a \quad \text{oraz} \quad l_2 > b,$$

możemy zawsze (§ 68, tw. VII) drogą ewentualnego usunięcia pewnych liczb ze zbiorów (A_2) i (B_1) , do tego doprowadzi, że każda liczba zbioru (A_2) będzie mniejsza od liczby l_2 , a każda liczba zbioru (B_1) — większa od liczby l_1 . Załóżmy tedy, że warunki te są spełnione i, oznaczając ogólnie przez a_1, a_2, b_1 i b_2 liczby należące odpowiednio do zbiorów $(A_1), (A_2), (B_1)$ i (B_2) , oznaczmy przez (C_1) zbiór wszystkich liczb, z których każda c_1 równa się pewnemu ilorazowi postaci

$$a_1 : b_2,$$

a przez (C_2) zbiór wszystkich liczb, z których każda c_2 równa się pewnemu ilorazowi postaci

$$a_2 : b_1.$$

Każdy ze zbiorów (C_1) i (C_2) oczywiście będzie pewnym zbiorem liczb wymiernych, a na podstawie definicji tych zbiorów mamy

$$a_1 = b_2 \cdot c_1,$$

$$a_2 = b_1 \cdot c_2,$$

skąd

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot b_2 \cdot c_1 \\ a_2 \cdot b_2 = b_1 \cdot b_2 \cdot c_2, \end{cases}$$

a ponieważ mamy

$$a_1 \leq a_2 \quad \text{i} \quad b_1 \leq b_2,$$

a więc i

$$(4) \quad a_1 \cdot b_1 \leq a_2 \cdot b_2,$$

przeto mamy

$$c_1 \leq c_2, \quad (5)$$

albowiem w razie przeciwnym związek (4) sprzeczny byłby z równościami (3).

Związek (5) wyraża, że żadna liczba zbioru (C_1) nie jest większa od żadnej liczby zbioru (C_2); żeby więc dowieść, że zbiór (C_1) uważany być może za pierwszą część, a zbiór (C_2) za drugą część określnika oznaczonej liczby bezwzględnej c , należy tylko dowieść, że, jakkolwiek liczbę wymierną, od zera odmienną, ale choćby jak małą, oznaczylibyśmy przez ε , zawsze istnieje taki układ wartości na c_1 i c_2 , żebyśmy mieli

$$c_2 - c_1 < \varepsilon. \quad (6)$$

Ze względu na związki (3), mamy

$$b_1 \cdot b_2 (c_2 - c_1) = a_2 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_1$$

czyli

$$b_1 \cdot b_2 \cdot (c_2 - c_1) = a_2 (b_2 - b_1) + b_1 (a_2 - a_1),$$

skąd

$$c_2 - c_1 = \frac{a_2 (b_2 - b_1)}{b_1 \cdot b_2} + \frac{a_2 - a_1}{b_2}. \quad (7)$$

Na podstawie założeń, poczynionych o zbiorach (A_2) i (B_1), mamy

$$a_2 < l_2 \quad \text{ i } \quad b_1 > l_1,$$

a więc ze względu na związek

$$b_2 \geq b_1,$$

mamy także i

$$b_2 > l_1.$$

Mamy więc

$$c_2 - c_1 < \frac{l_2}{l_1^2} \cdot (b_2 - b_1) + \frac{1}{l_1} \cdot (a_2 - a_1). \quad (8)$$

Jeżeli oznaczymy przez μ liczbę wymierną od zera większą, ale choćby jak małą, zawsze istnieć będą takie układy wartości na a_1 , a_2 , b_1 i b_2 , żeby

$$a_2 - a_1 < \mu \quad \text{ i } \quad b_2 - b_1 < \mu, \quad (9)$$

a w takim razie zachodzić będzie nierówność

$$(10) \quad c_2 - c_1 < \left(\frac{l_2}{l_1^2} + \frac{1}{l_1} \right) \cdot \mu$$

na podstawie związku (8).

Jeżeli więc przyjmiemy na μ taką wartość, żebyśmy mieli

$$\left(\frac{l_2}{l_1^2} + \frac{1}{l_1} \right) \mu \leq \varepsilon$$

i założymy następnie, że liczby a_1 , a_2 , b_1 i b_2 tak zostały przyjęte, żeby nierówności (9) były spełnione, to na podstawie nierówności (10) zachodzić będzie nierówność (6). Ostatecznie zbiór (C_1) uważany być może za pierwszą część, a zbiór (C_2) za drugą część pewnego określnika oznaczonej liczby c .

Oznaczmy przez (D_1) zbiór wszystkich liczb, z których każda równa się iloczynowi pewnej liczby zbioru (B_1) przez pewną liczbę zbioru (C_1) , a przez (D_2) zbiór wszystkich liczb, z których każda równa się iloczynowi pewnej liczby zbioru (B_2) przez pewną liczbę zbioru (C_2) . Zbiory (D_1) i (D_2) będą zbiorami liczb wymiernych i stanowić będą odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika iloczynu $b.c$. Ale określnik $\{(D_1), (D_2)\}$ uważany być może za pewien określnik liczby a . Istotnie, zachowując poprzednio nadane znaczenie symbolom a_1 , a_2 , b_1 i b_2 , oznaczwszy przez b'_1 nową liczbę ze zbioru (B_1) , a przez b'_2 nową liczbę ze zbioru (B_2) , otrzymamy wzory ogólne na liczbę d_1 zbioru (D_1) i na liczbę d_2 zbioru (D_2) w postaci następującej:

$$d_1 = \frac{a_1 \cdot b'_1}{b_2} \quad \text{ i } \quad d_2 = \frac{a_2 \cdot b'_2}{b_1},$$

a ponieważ mamy

$$b'_1 \leq b_2 \quad \text{ i } \quad b'_2 \geq b_1,$$

przeto mamy w każdym razie

$$d_1 \leq a_1 \leq a \leq a_2 \leq d_2,$$

skąd wynika, że określnik $\{(D_1), (D_2)\}$ uważany być może rzeczywiście za określnik liczby a . Mamy więc

$$a = b.c.$$

Zatem wartość

$$x = c$$

na x sprawdza równanie (1).

Z drugiej zaś strony, w razie nierówności (2) jedna tylko wartość na x sprawdzać może równanie (1); okoliczność ta wynika z tw. VII-go § 77-go i ogólnych tw. I-go i II-go z § 29-go, a nadto łatwo stwierdzić ją możemy i w sposób następujący: jeżeli założymy, iż liczba x sprawdza równanie (1), i oznaczmy przez x' liczbę liczbie x nierówną, to na podstawie nierówności (2) i tw. VII-go z paragrafu poprzedzającego, zachodzić będzie nierówność

$$b \cdot x' \neq b \cdot x,$$

a więc żadna liczba x' , liczbie x nierówna, nie może sprawdzać równania.

$$b \cdot x' = a,$$

jeżeli tylko liczba x równanie (1) sprawdza.

Ostatecznie mamy twierdzenie następujące:

Jeżeli przy dzieleniu liczb bezwzględnych dzielnik b jest liczbą od zera odmienną, to jakkolwiek wartość miałyby dzielna a , dzielenie jest zawsze wykonalne i jednoznaczne, a iloraz możemy wyznaczyć, gdy dzielna i dzielnik są dane, przyjmując przy tworzeniu określnika, oznaczonego wyżej przez $\{(C_1), (C_2)\}$, a będącego określnikiem ilorazu $a:b$, za określniki, któreśmy oznaczyli w poprzednich rozważaniach odpowiednio przez $\{(A_1), (A_2)\}$ i $\{(B_1), (B_2)\}$, dane określniki liczb a i b , po ewentualnem usunięciu pewnych liczb z pierwszej części określnika liczby b i drugiej części określnika liczby a ; jeżeli zaś dzielnik równa się zeru, to dzielenie jest wykonalne tylko w razie, kiedy dzielna też równa jest zeru, ale wówczas iloraz jest całkiem nieoznaczony.

Możemy jeszcze dodać, że trzy są przypadki, w których dzielenie przy dzielniku od zera odmiennym jest natychmiastowe, mianowicie, kiedy dzielnik równa się jedności, kiedy dzielna równa się zeru, oraz w razie, kiedy dzielna równa jest dzielnikowi; w pierwszym przypadku iloraz oczywiście równa się dzielnej, w drugim zeru, a w trzecim — jedności.