

przez symbol specyficzny ¹⁾ przedstawiona liczba wymierna w , wymagało tylko kolejnego wykonania na skończonej liczbie liczb wymiernych, do których należy liczba w , a które przedstawione są przez symbole specyficzne, skończonego układu (U) czynności, polegających albo na wykonaniu jednego z działań zasadniczych na dwóch liczbach, albo na porównaniu ilościowym dwóch liczb, z których każda jest albo jedną ze wspomnianych liczb wymiernych, albo wynikiem już wykonanych czynności z układu (U). Żeby wyrazić, iż pewien przekrój zbioru liczb wymiernych w taki właśnie sposób jest oznaczony, orzekamy, że przekrój ten jest arytmetycznie oznaczony.

Teraz nasuwa się pytanie: czy wszelki przekrój zbioru liczb wymiernych oznaczony być może arytmetycznie?

Doświadczenie poucza nas, że mając nie arytmetyczne, ale jednak całkiem precyzyjne określenie pewnego przekroju zbioru liczb wymiernych, nie zawsze potrafimy arytmetycznie oznaczyć ten przekrój. Natomiast z samej istoty pojęcia przekroju zbioru liczb wymiernych wynika, że skoro mamy jakiegokolwiek, byle precyzyjne, określenie (Ω) pewnego przekroju zbioru liczb wymiernych, to chociażbyśmy nie potrafili przekroju tego arytmetycznie oznaczyć, nie możemy nie przyjąć, że gdybyśmy rozporządzali umysłem dostatecznie potężnym i wykształconym, tobyśmy mogli rozważyć przekrój arytmetycznie oznaczyć.

Tę właśnie okoliczność wyrażamy, orzekając, że wszelki przekrój zbioru liczb wymiernych może być oznaczony arytmetycznie.

§ 62. Załóżmy, iż przy oznaczonej jednostce długości u , pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych i pewien odcinek prostoliniowy a znajdują się w takim ze sobą związku, że odcinek a nie jest ani mniejszy od żadnego odcinka prostoliniowego, którego miara równałaby się jednej z liczb pierwszej kategorii (A_1) liczb wymiernych w stosunku do przekroju (P), ani większy od żadnego odcinka, którego miarą byłaby jedna z liczb drugiej kategorii (A_2) liczb wymiernych w stosunku do tegoż przekroju.

Żeby wyrazić, iż przekrój (P) zbioru liczb wymiernych i odcinek prostoliniowy a znajdują się przy jednostce długości u , w powyższym ze sobą związku, orzekamy, że przekrój (P) i odcinek a

¹⁾ Za symbol specyficzny liczby ułamkowej uważamy symbol ilorazu licznika i mianownika, przedstawionych w numeracji dziesiętnej.

odpowiadają sobie wzajemnie (przy rozważanej jednostce długości).

Z rozważań, wyłożonych w ustępach poprzedzających, wynika bezpośrednio, że każdemu odcinkowi, niewspółmiernemu z jednostką długości, odpowiada całkiem oznaczony przekrój (drugiego gatunku) zbioru liczb wymiernych. Spostrzegamy nadto natychmiast, że każdemu odcinkowi współmiernemu z jednostką długości, byle nie zerowemu, odpowiadają dokładnie dwa przekroje zbioru liczb wymiernych, mianowicie te dwa przekroje, z których każdy określony jest przez to, iż liczba wymierna, będąca miarą rozważanego odcinka przy rozważanej jednostce długości, położona jest na nim. Zatem możemy wysłowić twierdzenie następujące:

I. *Przy oznaczonej jednostce długości odpowiada każdemu odcinkowi prostoliniowemu niezerowemu przynajmniej jeden przekrój liczb wymiernych; jeżeli rozważany odcinek jest z jednostką niewspółmierny, to odcinkowi temu odpowiada jeden tylko przekrój zbioru liczb wymiernych; jeżeli zaś ów odcinek jest z jednostką współmierny, to w takim razie istnieją dokładnie dwa przekroje zbioru liczb wymiernych, z których każdy odcinkowi temu odpowiada, a są to przekroje, na których położona jest liczba wymierna, stanowiąca miarę rozważanego odcinka.*

Spostrzegamy natychmiast, że przy oznaczonej jednostce długości istnieje zawsze odcinek prostoliniowy, odpowiadający danemu dowolnie przekrojowi pierwszego gatunku zbioru liczb wymiernych. Pytanie, czy ta sama okoliczność zachodzi i w stosunku do przekrojów drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych, omówimy w paragrafie następującym, a obecnie poprzestaniemy na uzasadnieniu twierdzenia następującego:

II. *Jeżeli przy oznaczonej jednostce długości istnieje pewien odcinek a , odpowiadający oznaczonemu przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych, to w takim razie zbiór wszystkich odcinków prostoliniowych, z których każdy odpowiada przekrojowi (P), zlewa się ze zbiorem wszystkich odcinków, równych odcinkowi a .*

Przystępując do uzasadnienia tego twierdzenia, czynimy najpierw uwagę następującą: jeżeli przy oznaczonej jednostce długości pewien odcinek a odpowiada oznaczonemu przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych, to rzecz oczywista, iż w takim razie każdy odcinek, równy odcinkowi a , odpowiada także przekrojowi (P). Wobec

tego pozostaje jedynie do udowodnienia, iż przekrojowi (P) odpowiadać może wyłącznie tylko odcinek równy odcinkowi a .

Załóżmy tedy, że z pewnych dwóch odcinków a i a' ($a \leq a'$) każdy uważany być może za odcinek, odpowiadający pewnemu przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych, i uważajmy od zera odmienną, ale poza tem całkiem dowolnie przyjętą liczbę wymierną ε . Jeżeli tedy oznaczymy przez α'' jedną z liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do przekroju (P), a przez n jakąkolwiek liczbę całkowitą, byle sprawdzającą nierówność

$$n \geq \alpha'' : \varepsilon,$$

to w ciągu skończonym

$$0, \varepsilon, 2 \cdot \varepsilon, 3 \cdot \varepsilon, 4 \cdot \varepsilon, \dots, n \cdot \varepsilon,$$

pierwszy wyraz należeć będzie do zbioru (K_1) liczb wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (P), a ostatni — do zbioru (K_2) liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju. Z tego wynika, że istnieje będzie pewna liczba całkowita m ($m \geq 1$), nie większa od n , a taka, żeby z dwóch wyrazów sąsiednich

$$(m - 1) \cdot \varepsilon \text{ i } m \cdot \varepsilon$$

powyższego ciągu, jeden był elementem zbioru (K_1), a drugi — zbioru (K_2).

Jeżeli tedy oznaczymy przez a_1 i a_2 odcinki, których miarami byłyby odpowiednio liczby $(m - 1) \cdot \varepsilon$ i $m \cdot \varepsilon$, to zachodzić będą związki następujące:

$$a_1 \leq a \leq a' \leq a_2.$$

skąd

$$a' - a \leq a_2 - a_1.$$

A ponieważ miarą odcinka $a_2 - a_1$ jest oczywiście liczba wymierna ε , przeto uzyskana nierówność wyraża twierdzenie następujące: jakąkolwiek liczbę wymierną, od zera odmienną, oznaczylibyśmy przez ε , odcinek $a' - a$ nie może być większy od odcinka, którego miarą byłaby liczba ε . Z tego wynika, że różnica $a' - a$ równać się musi odcinkowi zerowemu, albowiem w przeciwnym razie wbrew temu, cośmy udowodnili, moglibyśmy przyjąć (§ 59, tw. I) na liczbę ε taką wartość, żeby liczba ta mierzyła odcinek większy od odcinka zerowego, ale mniejszy od odcinka $a' - a$. Za-

tem odcinki a i a' muszą być sobie równe. Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Na podstawie twierdzenia poprzedzającego i uwag, uczynionych na początku tego paragrafu, dochodzimy do wniosku następującego:

Problem zmierzenia oznaczonego odcinka jakiegokolwiek nierowego, a więc i odcinka z jednostką niewspółmiernego, rozwiążemy, jeżeli tylko oznaczymy arytmetycznie ten przekrój zbioru liczb wymiernych, któremu przy przyjętej jednostce długości odpowiada rozważany odcinek.

§ 63. Obecnie zamierzamy zbadać, czy zachodzi twierdzenie następujące:

I. *Jakikolwiek byłby pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych, zawsze istnieje przy oznaczonej jednostce długości odcinek, odpowiadający temu przekrojowi w znaczeniu, określonym w paragrafie poprzedzającym.*

Żeby rzecz wyjaśnić, oznaczmy przez (P) pewien oznaczony przekrój zbioru liczb wymiernych i uważajmy oznaczony, z pewnego punktu O wychodzący promień (S) (czyli prostą jednostronnie ograniczoną przez punkt O). Możemy tedy, przyjąwszy pewną jednostkę długości u , zbiór punktów promienia (S) podzielić na dwa zbiory (ξ_1) i (ξ_2) w sposób następujący: do zbioru (ξ_1) zaliczamy każdy taki punkt A promienia (S), żeby pośród liczb wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (P) znalazła się liczba, która byłaby miarą odcinka nie mniejszego od odcinka OA , do zbioru zaś (ξ_2) zaliczamy wszystkie inne punkty rozważanego promienia. Oznaczmy ten podział zbioru punktów promienia (S) przez (II), umawiając się jednocześnie, żeby uważać podział (II) zbioru punktów promienia (S) i przekrój (P) zbioru liczb wymiernych za elementy odpowiadające sobie wzajemnie.

Podział (II) zbioru punktów promienia (S) na dwa zbiory (ξ_1) i (ξ_2) ma własności następujące:

1°. Każdy ze zbiorów (ξ_1) i (ξ_2) jest nieskończenie liczny, albowiem, jeżeli oznaczmy przez a_1 jedną z liczb wymiernych, od zera odmiennych, pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (P), a przez a_2 jedną z liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju i oznaczmy przez A_1 i A_2 takie punkty promienia (S), żeby miarami odcinków OA_1 i OA_2 były odpowiednio liczby a_1 i a_2 , to wszystkie punkty odcinka OA_1 oczywiście należące

będą do zbioru (S_1) , a wszystkie te punkty promienia (S) , których odległości od początku O tegoż promienia nie są mniejsze od odcinka OA_2 , oczywiście należeć będą do zbioru (ξ_2) .

2°. Odległość każdego punktu zbioru (ξ_1) od punktu O jest mniejsza, aniżeli odległość od tegoż punktu O jakiegokolwiek punktu, należącego do zbioru (ξ_2) ; okoliczność ta jest natychmiastowem następstwem definicyi rozważanego podziału zbioru punktów promienia (S) .

Jeżeli wogóle pewien podział (II') zbioru punktów promienia (S) na dwa zbiory nieskończone (ξ'_1) i (ξ'_2) jest taki, że odległość punktu O od każdego punktu zbioru (ξ'_1) jest mniejszą od jego odległości od każdego punktu zbioru (ξ'_2) , to podziałowi temu nadamy nazwę przekroju zbioru punktów promienia (S) nazywając jednocześnie zbiór (ξ'_1) zbiorem punktów pierwszej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju, a zbiór (ξ'_2) — zbiorem punktów drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju. Według tej terminologii, określony dopiero co podział (II) zbioru punktów promienia (S) stanowi pewien przekrój zbioru punktów tego promienia. Stosunek, w jakim przekrój (II) znajduje się do przekroju (P) zbioru liczb wymiernych wyrażać będziemy, jakżeśmy już zaznaczyli wyżej, orzekając, że przekroje (P) i (II) odpowiadają sobie wzajemnie.

Na podstawie przyjętej przez nas definicyi odpowiedniości wzajemnej przekrojów zbioru liczb wymiernych i zbioru punktów promienia (S) odpowiada, przy oznaczonej jednostce długości, każdemu przekrojowi zbioru liczb wymiernych oznaczony przekrój zbioru punktów promienia (S) . Upewnijmy się, że odwrotnie, przy oznaczonej jednostce długości, każdemu przekrojowi (II) zbioru punktów promienia (S) odpowiada całkiem oznaczony przekrój zbioru liczb wymiernych. W tym celu zważmy, że przyjąwszy dowolnie pewną liczbę wymierną w , będziemy mogli wyznaczyć na promieniu (S) jeden i jeden tylko taki punkt M , ażeby miarą odcinka OM była liczba wymierna w . Punkt M należeć będzie albo do zbioru punktów pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (II) albo do zbioru punktów drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju. Oznaczmy przez (A_1) zbiór wszystkich tych wartości na w , przy których zachodzi pierwszy przypadek, a przez (A_2) zbiór wszystkich tych wartości na w , przy których zachodzi drugi. Ponieważ każda liczba wymierna należeć musi do jednego ze zbiorów (A_1) lub (A_2) , przeto, określając te zbiory, określiliśmy pewien podział zbioru liczb wymienionych na dwa zbiory, mianowicie (A_1) i (A_2) . Po-

dział ten oczywiście stanowi pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych, a przekrój ten odpowiada oczywiście przekrojowi (II) w znaczeniu określonym wyżej. Nadto spostrzegamy z łatwością, że żaden od przekroju (P) odmienny przekrój zbioru liczb wymiernych przekrojowi (II) zbioru punktów promienia (S) odpowiadać nie może.

Ostatecznie, przy oznaczonej jednostce długości, każdemu przekrojowi zbioru liczb wymiernych odpowiada jeden jedyny przekrój zbioru punktów promienia (S), a każdemu przekrojowi tego zbioru punktów odpowiada jeden jedyny przekrój zbioru liczb wymiernych. Fakt ten wyrażamy w postaci twierdzenia następującego.

Przy oznaczonej jednostce długości wyżej określona odpowiedniość wzajemna przekrojów zbioru liczb wymiernych i przekrojów zbioru punktów promienia (S) jest obustronnie jednoznaczna.

Uważajmy oznaczony przekrój (II) zbioru punktów promienia (S), którego początek oznaczamy, jak poprzednio, przez 0. Niech (ξ_1) oznacza zbiór punktów promienia pierwszej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju, a (ξ_2) zbiór punktów drugiej kategorii w stosunku do tego przekroju. Jeżeli tedy na promieniu (S) istnieje punkt M , który byłby albo najdalszym od punktu 0 punktem zbioru (ξ_1) , albo najbliższym od punktu 0 punktem zbioru (ξ_2) , to okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że na promieniu (S) istnieje pewien punkt M , położony na rozważanym przekroju.

Oznaczywszy jednostkę długości, uważajmy pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych i odpowiadający mu przekrój (II) zbioru punktów promienia (S).

Jeżeli w znaczeniu, określonym w § 62-gim, istnieje pewien odcinek a , odpowiadający przekrojowi (P), to istnieje także punkt M położony na przekroju (II) zbioru punktów promienia (S) i punkt ten określony jest równością

$$(12) \quad OM = a.$$

Istotnie, równością (12) określony punkt M , zarówno jak i każdy inny punkt promienia (S), należeć będzie albo do zbioru (ξ_1) punktów pierwszej — albo do zbioru (ξ_2) punktów drugiej kategorii w stosunku do przekroju (II). W pierwszym przypadku punkt M będzie najdalszym od punktu 0 punktem zbioru (ξ_1) , ponieważ w razie przeciwnym istniałaby pośród liczb wymiernych pierwszej

kategorii (A_1) w stosunku do przekroju (P) pewna liczba a_1 , która byłaby miarą odcinka większego od OM , a więc także, wbrew definicji odcinka a , — miarą odcinka większego od tego odcinka.

W drugim przypadku punkt M byłby najbliższym od punktu O punktem zbioru (ζ_2), albowiem, w razie przeciwnym, istniałaby pośród liczb drugiej kategorii (A_2) w stosunku do przekroju (P) pewna liczba a_2 , która byłaby miarą odcinka mniejszego od OM , a więc i mniejszego od a , co sprzeczne byłoby z definicją odcinka a .

Dowiedliśmy więc, że punkt M , określony równością (12), rzeczywiście położony jest na samym przekroju (II).

Odwrotnie, jeżeli istnieje pewien punkt M , położony na samym przekroju (II) zbioru punktów promienia (S), to w znaczeniu, określonym w § 62-gim, istnieje odcinek odpowiadający przekrojowi (P), a takim odcinkiem jest odcinek OM (i naturalnie każdy odcinek temu odcinkowi równy). Istotnie, oznaczmy przez a_1 jakąkolwiek liczbę zbioru (A_1), a przez M_1 taki punkt promienia (S), żeby miarą odcinka OM_1 była właśnie liczba a_1 . W takim razie punkt M_1 należeć będzie do zbioru (ζ_1). Jeżeli tedy punkt M należy także do zbioru (ζ_1), to zachodzić będzie związek

$$OM_1 \leq OM,$$

albowiem punkt M jest wtedy najdalszym od punktu O punktem zbioru (ζ_1). Jeżeli zaś punkt M należy do zbioru (ζ_2), to, na podstawie definicji zbiorów (ζ_1) i (ζ_2), zachodzić będzie nierówność

$$OM_1 < OM.$$

Ostatecznie, odcinek OM nie jest mniejszy od żadnego odcinka, którego miarą byłaby jedna z liczb zbioru (A_1). Pozostaje więc tylko do okazania, że odcinek OM nie jest większy od żadnego odcinka, którego miarą byłaby jedna z liczb zbioru (A_2). Oznaczmy przez a_2 którąkolwiek z liczb tego zbioru, a przez M_2 taki na promieniu (S) położony punkt, żeby miarą jego była liczba a_2 . Punkt M_2 należeć będzie do zbioru (ζ_2). Jeżeli punkt M także do zbioru tego należy, to będziemy mieli

$$OM \leq OM_2,$$

ponieważ punkt M byłby w tym razie najbliższym punktu O punktem zbioru (ζ_2).

Gdyby zaś punkt M należał do zbioru (ξ_1) , to mielibyśmy

$$OM < OM_2$$

na podstawie już samej definicyi zbiorów (ξ_1) i (ξ_2) .

Zatem odcinek OM nie jest większy od żadnego odcinka, którego miarą byłaby jedna z liczb zbioru (A_2) , a to właśnie pozostawało jeszcze do udowodnienia.

Rozważania poprzedzające nie rozstrzygają o słuszności twierdzenia I-szego (wysłowionego na początku tego paragrafu), ale rozważania te pouczają nas, że twierdzenie I-sze równoważne jest twierdzeniu następującemu:

II. *Jakikolwiek przekrój zbioru punktów promienia (S) rozważalibyśmy, zawsze istnieje będzie pośród punktów tego promienia pewien punkt położony na rozważanym przekroju.*

Wstrzymując się na razie od dania odpowiedzi na pytanie, czy twierdzenie poprzedzające zachodzi w tej postaci ogólnej, w jakiej je wysłowiliśmy, okażemy, że twierdzenie to, które, jakżeśmy dowiedli, równoważne jest twierdzeniu I-szemu, równoważne jest i twierdzeniu następującemu:

III. *Uważajmy na oznaczonej prostej (Δ) ciąg nieskończony odcinków*

$$(13) \quad A_1B_1, \quad A_2B_2, \quad A_3B_3, \dots$$

i załóżmy, że każdy z tych odcinków, poczynając od odcinka A_2B_2 , jest częścią bezpośrednio poprzedzającego go w rozważanym ciągu odcinka, albo zlewa się z tym odcinkiem. W takim razie istnieje na prostej (Δ) jeden punkt przynajmniej, który należy jednocześnie do wszystkich odcinków, stanowiących rozważany ciąg¹⁾.

Załóżmy najpierw, że wysłowione twierdzenie zachodzi. Powiadam, że w takim razie zachodzić będzie także i twierdzenie II-gie.

Istotnie, oznaczmy przez (II) pewien przekrój zbioru punktów pewnego promienia (S) , wychodzącego z pewnego punktu O , a przez (ξ_1) i (ξ_2) zbiory punktów odpowiednio 1-szej i 2-giej kategorii w stosunku do tego przekroju. Możemy tedy ciąg (13) określić w sposób następujący:

1°. Koniec A_1 odcinka A_1B_1 jest dowolnie przyjętym punktem w zbiorze (ξ_1) . a koniec B_1 tegoż odcinka jest dowolnie przyjętym punktem w zbiorze (ξ_2) .

¹⁾ G. Ascoli. R. Ist. Lombardo Rendiconti, 1895.

2°. Koniec A_k odcinka $A_k B_k$, ($k > 1$) należy do zbioru (ξ_1) , a koniec B_k do zbioru (ξ_2) , nadto sam odcinek $A_k B_k$ zlewa się z jednym z tych dwóch równych sobie odcinków, na które środek I_{k-1} odcinka $A_{k-1} B_{k-1}$ ten odcinek dzieli.

Nie ulega wątpliwości, że ciąg (13) może być utworzony na podstawie tej definicji. Istotnie, co do możebności wyznaczenia pierwszego wyrazu $A_1 B_1$ oczywiście nie zachodzi żadna wątpliwość, a gdybyśmy omawiany ciąg doprowadzili do wyrazu $A_{k-1} B_{k-1}$ włącznie, to moglibyśmy także wyznaczyć i wyraz $A_k B_k$. Rzeczywiście, środek I_{k-1} odcinka $A_{k-1} B_{k-1}$ będzie należał albo do zbioru (ξ_1) albo do zbioru (ξ_2) ; w pierwszym przypadku odcinkiem $A_k B_k$ byłby odcinek $I_{k-1} B_{k-1}$, a w drugim — odcinek $A_{k-1} I_{k-1}$. Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej każdy wyraz omawianego ciągu jest określony w zupełności.

Na podstawie tw. III-go, którego słuszność obecnie zakładamy, istnieje przynajmniej jeden punkt wspólny wszystkim odcinkom ciągu (13). Oznaczmy przez M jeden taki punkt. Powiadam, że żaden od punktu M odmienny punkt M' promienia (S) nie może być także punktem wspólnym wszystkim odcinkom ciągu (13), a może tylko należeć do pewnej skończonej liczby początkowych wyrazów ciągu (13). Istotnie, jeżeli punkt M i punkt M' należą jednocześnie do odcinka $A_k B_k$, to mieć będziemy:

$$A_k B_k \geq MM',$$

a ponieważ oczywiście

$$A_1 B_1 = 2^{k-1} \cdot A_k B_k,$$

przeto

$$A_1 B_1 \geq 2^{k-1} \cdot MM'. \quad (14)$$

Z drugiej znów strony, na podstawie pewnika Archimedesa, istnieje taka pewna liczba całkowita p , że

$$A_1 B_1 < p \cdot MM'. \quad (15)$$

Ponieważ zaś, wyznaczywszy liczbę p , możemy zawsze na liczbę k przyjąć wartość tak wielką, żebyśmy mieli

$$2^{k-1} > p,$$

przeto, poczynając od pewnej, dostatecznie wielkiej wartości na k , nierówność (14) przestanie zachodzić, albowiem nierówność ta

sprzeczna byłaby z nierównością (15). Skoro więc punkt M do wszystkich odcinków ciągu (13) należy, to, zgodnie z zapowiedzią, już żaden inny punkt tej własności mieć nie będzie. i może tylko być wspólnym punktem pewnej skończonej liczby początkowych wyrazów ciągu (13).

Powiadam dalej, że punkt M położony jest na przekroju (II). Żeby dowieść, że okoliczność ta zachodzi, uzasadnimy najpierw dwa twierdzenia następujące:

A) Każdy, od punktu M odmienny, punkt M_1 odcinka OM należy do zbioru (ξ_1) .

B) Każdy taki punkt M_2 promienia (S) , który od punktu O jest dalszy, aniżeli punkt M , należy do zbioru (ξ_2) .

Istotnie, na podstawie dopiero co uzasadnionego wyniku, przy dostatecznie wielkiej wartości na k punkt M_1 znajdować się będzie poza granicami odcinka $A_k B_k$, a ponieważ punkt M_1 , w razie kiedy do odcinka $A_k B_k$ nie należy, tylko na odcinku OA_k znajdować się może, przeto punkt ten bliższy będzie punktu O , aniżeli punkt A_k .

Z drugiej strony, ponieważ punkt A_k należy do zbioru (ξ_1) , przeto do zbioru (ξ_2) należeć mogą tylko punkty od punktu O dalsze, aniżeli punkt A_k . Zatem punkt M_1 rzeczywiście do zbioru (ξ_1) należeć będzie.

Równie łatwo możemy uzasadnić twierdzenie wysłowione pod B: oznaczmy przez M_2 jakikolwiek taki punkt M_2 promienia (S) , ażeby odległość jego od punktu O większa była od odległości punktu M ; przy dostatecznie wielkiej wartości wskaźnika k , punkt M_2 położony będzie poza granicami odcinka $A_k B_k$, a to z tej samej przyczyny, dla której analogiczna okoliczność zachodziła co do punktu M_1 , rozważanego wyżej.

Z drugiej znów strony, punkt M_2 , skoro położony jest poza granicami odcinka $A_k B_k$, musi być dalszy od punktu O , aniżeli punkt B_k . A ponieważ punkt B_k należy już do zbioru (ξ_2) , przeto punkt M_2 jako dalszy od punktu O punkt promienia (S) , aniżeli punkt B_k , także do zbioru tego należeć musi.

Tak więc uzasadniliśmy już twierdzenia wysłowione pod A i B. Z twierdzeń tych możemy natychmiast wysnuć twierdzenie, o które nam właściwie chodzi, a mianowicie, iż istnieje punkt położony na samym przekroju (II). Powiadam, że punktem tym będzie właśnie punkt M , wspólny wszystkim odcinkom ciągu (13). Istotnie, punkt M

należać będzie albo do zbioru (ξ_1) albo do zbioru (ξ_2) ; w pierwszym przypadku byłby ten punkt najdalszym od punktu 0 punktem zbioru (ξ_1) , a w drugim — najbliższym punktu 0 punktem pomiędzy punktami zbioru (ξ_2) . W obu więc tych jedynie możliwych przypadkach byłby punkt M punktem, położonym na samym przekroju (II).

Dowiedliśmy więc, że gdyby zachodziło twierdzenie III-cie, to zachodziłoby i twierdzenie II-gie. Pozostaje więc tylko do udowodnienia, że odwrotnie, gdyby zachodziło twierdzenie II-gie, to zachodziłoby także i twierdzenie III-cie. W tym celu zakładamy, że twierdzenie II-gie zachodzi rzeczywiście i bierzemy pod uwagę ciąg (13). Oczywiście możemy przyjąć na prostej (Δ) , na której położone są odcinki, stanowiące wyrazy ciągu (13), taki punkt 0, żeby odcinek $A_1 B_1$ położony był po jednej stronie tego punktu. W takim razie wszystkie odcinki rozważanego ciągu leżeć będą także po tej stronie punktu 0. Z drugiej strony punkt 0 dzieli prostą (Δ) na dwa promienie. Oznaczmy przez (S) ten z nich, na którym leżą odcinki (13). Możemy oczywiście oznaczenia tak dobrać, żeby przy każdej wartości wskaźnika k punkt A_k bliższy był punktu 0, aniżeli punkt B_k . Założmy, że oznaczenia w ten właśnie sposób zostały dobrane; oznaczmy nadto przez (ξ_1) zbiór punktów, z których każdy jest albo jednym z punktów ciągu

$$A_1, A_2, A_3, \dots \quad (16)$$

albo takim punktem promienia (S) , żeby punkt ten bliższy był punktu 0, aniżeli jeden przynajmniej z punktów ciągu (16), a przez (ξ_2) — zbiór wszystkich innych punktów promienia (S) .

Spostrzegamy z łatwością, że wszystkie punkty ciągu

$$B_1, B_2, B_3, \dots \quad (17)$$

należą do zbioru (ξ_2) .

Z drugiej strony, dopiero co określony podział zbioru punktów promienia (S) na zbiory (ξ_1) i (ξ_2) stanowi oczywiście pewien przekrój (II) zbioru punktów rozważanego promienia. Ponieważ zakładamy, że twierdzenie II-gie zachodzi, przeto pośród punktów promienia (S) istnieć będzie pewien punkt M , położony na przekroju (II).

Ponieważ punkt A_k należy do zbioru (ξ_1) , przeto mamy:

$$(18) \quad 0A_k \leq 0M,$$

gdyż punkt M może tylko być albo najdalszym od punktu O punktem zbioru (ξ_1) , albo najbliższym tegoż punktu punktem zbioru (ξ_2) . Z takich samych powodów i ze względu na to, że, jakieśmy zaznaczyli powyżej, punkty ciągu (17) należą do zbioru (ξ_2) , mamy

$$(19) \quad 0B_k \geq 0M.$$

Ponieważ związki (18) i (19) zachodzą, jakkolwiek wartość miałby wskaźnik k , przeto też, bez względu na wartość tego wskaźnika, punkt M niezawodnie należy do odcinka $A_k B_k$. Innymi słowy, punkt M jest wspólnym punktem wszystkich odcinków ciągu (13), a o to właśnie chodziło.

Widzieliśmy wyżej, że twierdzenia I-sze i II-gie są sobie równoważne, a dowiedliśmy obecnie, że ta sama okoliczność zachodzi co do twierdzeń II-go i III-go. Zatem twierdzenia I-sze i III-cie są także sobie równoważne. Ostatecznie twierdzenia I-sze, II-gie i III-cie są równoważne; innymi słowy, jeżeli zachodzi jedno z tych twierdzeń, to i dwa pozostałe zachodzić muszą. Z tego oczywiście nie wynika jeszcze bynajmniej, żeby którekolwiek z rzeczonych twierdzeń rzeczywiście zachodziło.

Jednakże każde z tych twierdzeń ma takie cechy prawdy oczywistej, że niepodobna wątpić o tem, żeby ono zachodziło rzeczywiście. Wobec tego możemy, kierując się osobistym upodobaniem, przyjąć za pewnik jedno z trzech rozważanych twierdzeń. W takim razie dwa pozostałe należeć będą do jego logicznych następstw.

Ostatecznie, przy dzisiejszym przynajmniej stanie nauki, nie możemy uzasadnić żadnego z trzech twierdzeń I-go, II-go i III-go, nie wprowadzając jakiegoś nowego pewnika, którym może być jedno z tych trzech twierdzeń, albo jakiekolwiek twierdzenie równoważne.

Żeby usunąć nieokreślność, która mogłaby w dalszych rozważaniach spowodować pewne zamieszanie, oświadczamy wyraźnie, że przyjmujemy za pewnik twierdzenie III-cie.

§ 64. Wyniki, uzyskane w ustępach poprzedzających, możemy streścić w postaci następującego twierdzenia: