

VI. Czysto arytmetyczna teoria liczb wymiernych.

(Teoria klasyczna).

§ 34. Badanie problemu mierzenia odcinków prostoliniowych przywiodło nas do teorii liczb wymiernych. Oczywiście mogliśmy byli rozwinąć całkiem analogiczne rozważanie i w innych przypadkach, na przykład, gdybyśmy byli traktowali problem mierzenia okresów czasu. W takim razie doszlibyśmy także do teorii liczb wymiernych i uzyskana teoria nie różniłaby się zasadniczo od tej, którą omówiliśmy w rozdziale IV-tym.

Natomiast zachodziłaby różnica w podstawach logicznych obu teorii: teoria rozdziału IV-go opiera się częściowo na pojęciach natury geometrycznej, teoria zaś, którąbyśmy uzyskali opracowując problem mierzenia okresów czasu, polegałaby częściowo na pojęciach, związanych z pojęciem czasu.

Ze względu na różnorodność podstaw, na których mogliśmy oprzeć teorię liczb wymiernych, wysnuwając ją z różnych postaci problemu mierzenia, nasuwa się myśl oderwania teorii tej od jakiegokolwiek konkretnego zagadnienia, opierając ją wyłącznie na pojęciu liczby całkowitej i kierując się jednocześnie tą ideą, żeby rozwiniętszy oderwaną teorię liczb wymiernych, zastosowywać ją jako gotowe już narzędzie do problemów mierzenia i wogóle do badania przyrody.

Takie traktowanie rzeczy odpowiada w zupełności ogólnym poglądom, które w krótkości omówiliśmy w rozdziale I-szym; ono właśnie stanowi zastosowanie się do zasady, według której, w interesie ułatwienia krytyki naukowej, usiłujemy zawsze badać z osobna elementy, napotymane w naturze tylko we wzajemnym ze sobą połączeniu, poświęcając następnie syntezie wyników, tą drogą uzyskanych, znowu osobny szereg rozważań.

Metodę, którą posługiwać się będziemy, możemy scharakteryzować krótko w sposób następujący: Ustawiwszy a priori definicję liczby ułamkowej, nadamy liczbom ułamkowym charakter wielkości na podstawie nowych definicji, dalej określimy działania zasadnicze na tych liczbach i nareszcie okażemy, że do zbioru liczb ułamkowych możemy dołączyć zbiór liczb całkowitych i połączyć teorie obu rodzajów liczb w jedną teorię liczb wymiernych.

§ 35. Na czele rozważań naszych możemy, nie odstępując od myśli przewodniej, omówionej w paragrafie poprzedzającym, postawić definicję liczby ułamkowej, która, co do postaci swojej, nie różni się od definicji, przyjętej w rozdziale IV-tym na str. 33. Przyjmujemy zatem definicję następującą:

Wyraz liczba ułamkowa oznacza każdy układ dwóch liczb całkowitych, uważany za element wszystkich takich dwójek liczb całkowitych, które łącznie podlegają pewnej ogólnej umowie. W stosunku do tej umowy każda z liczb całkowitych, stanowiących razem liczbę ułamkową, ma sobie właściwą rolę i z tej przyczyny jedna z nich zowie się mianownikiem, a druga — licznikiem; za symbol liczby ułamkowej o liczniku m , a mianowniku p , przyjmujemy tymczasowo symbol

$$(m, p),$$

który czytamy: m przecinek p .

Umowa wspomniana w tej definicji, z konieczności odmienna od tej umowy, którą przyjęliśmy w rozdz. IV-tym, brzmi jak następuje:

1°. Mianownikiem liczby ułamkowej może być tylko liczba całkowita, od zera odmienna, poza tem jednak jakakolwiek, a wartość licznika nie ulega żadnemu zastrzeżeniu.

2°. Związki.

$$(m, p) < (m', p'), \quad (m, p) = (m', p') \quad \text{i} \quad (m, p) > (m', p')$$

mają być uważane odpowiednio za równoważne związkom następującym:

$$mp' < m'p, \quad mp' = m'p \quad \text{i} \quad mp' > m'p.$$

Druga część tej umowy, która oczywiście zawiera w sobie definicję treści każdego z orzeczeń:

$$(m, p) < (m', p'), \quad (m, p) = (m', p') \quad \text{i} \quad (m, p) > (m', p')$$

winna być usprawiedliwiona przez udowodnienie zgodności wspomnianych definicji z zasadami rozdziału II-go. Czytelnik z łatwo-

ścią spostrzeże, że cel ten będzie mógł być uważany za dopięty, skoro udowodnione będą dwa twierdzenia następujące:

A) Równości

$$(1) \quad \begin{cases} (m, p) = (m', p') \\ (m', p') = (m'', p'') \end{cases}$$

pociągają za sobą równość

$$(2) \quad (m, p) = (m'', p'').$$

B) Związki

$$(3) \quad \begin{cases} (m, p) < (m', p') \\ (m', p') < (m'', p'') \end{cases}$$

pociągają za sobą związek

$$(4) \quad (m, p) < (m'', p'').$$

Zwracamy się najpierw do uzasadnienia twierdzenia *A*.

Na podstawie równości (1) mamy

$$\begin{aligned} mp' &= m'p \\ m'p'' &= m''p' \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} mp'p'' &= m'pp'' \\ m'p''p &= m''p'p, \end{aligned}$$

zatem

$$mp'p'' = m''p'p,$$

a ponieważ liczba p' , jako mianownik liczby ułamkowej zerem być nie może, przeto następstwem ostatniej równości jest równość

$$mp'' = m''p,$$

która wyraża, że równość (2) jest spełniona. O to właśnie chodziło.

Żeby i twierdzenie *B* uzasadnić, zważmy, że związki (3) równoważne są odpowiednio związkom następującym:

$$\begin{aligned} mp' &< m'p \\ m'p'' &< m''p', \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} mp'p'' &< m'pp'' \\ m'p''p &< m''p'p, \end{aligned}$$

mamy więc

$$mp'p'' < m''p'p,$$

a ponieważ liczba całkowita p' , jako mianownik liczby ułamkowej jest od zera odmienna, przeto z uzyskanej nierówności wynika, że

$$mp'' < m''p.$$

Nierówność ta wyraża, że zachodzi nierówność (4), o której udowodnienie właśnie chodziło.

§ 36. I. Z definicji równości dwóch liczb ułamkowych wynika, że mamy

$$(m, p) = (lm, lp) \quad (5)$$

jakąkolwiek byłaby liczba ułamkowa (m, p) i jakąkolwiek od zera odmienną liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez l .

Powyższe twierdzenie udowodnić łatwo: iloczyny $m \cdot (l \cdot p)$ i $(l \cdot m) \cdot p$ są oczywiście równe sobie w każdym razie, zatem równość (5) niezawodnie zachodzi rzeczywiście; co zaś się tyczy zastrzeżenia, iż liczba l ma być od zera odmienna, to konieczność zastrzeżenia tego polega na tem, że ono stanowi warunek konieczny i wystarczający, ażeby iloczyn lp (w którym czynnik p , jako mianownik liczby ułamkowej z pewnością od zera jest odmienny) był od zera odmienny, co znowu jest warunkiem, ażeby symbol

$$(lm, lp)$$

oznaczał liczbę ułamkową.

Z twierdzenia poprzedzającego wynika natychmiast, że bez spowodowania zmiany wartości liczby ułamkowej, możemy zastąpić licznik i mianownik odpowiednio przez ilorazy dzielenia tych liczb całkowitych przez jakikolwiek wspólny dzielnik albo przez iloczyny tychże liczb przez jakikolwiek od zera odmienny czynnik.

Jeżeli licznik i mianownik pewnej liczby ułamkowej są liczbami względnie pierwszymi, to taka liczba ułamkowa zowie się liczbą ułamkową nieprzywiedlną.

II. Jeżeli z dwóch liczb ułamkowych (m, p) i (m', p') , sprawdzających równość

$$(m, p) = (m', p'), \quad (6)$$

jedna (m, p) , jest liczbą ułamkową nieprzywiedlną, to licznik i mianownik drugiej, (m', p') , równają się odpowiednio iloczynom licznika i mianownika pierwszej przez pewien ten sam współczynnik.

Istotnie, z równości (6), mamy

$$m \cdot p' = m' \cdot p. \quad (7)$$

Z równości tej wynika, że liczba p jest dzielnikiem iloczynu $m \cdot p'$. A ponieważ liczby p i m są liczbami względnie pierwszymi, przeto¹⁾ liczba p jest dzielnikiem liczby p' . Mamy więc

$$(8) \quad p' = lp,$$

oznaczając przez l pewną liczbę całkowitą.

Podstawiając wartość (8) na p' do równości (7), otrzymujemy

$$m \cdot l \cdot p = m' \cdot p,$$

skąd

$$(9) \quad m \cdot l = m',$$

ponieważ liczba p , jako mianownik liczby ułamkowej, jest niezawodnie od zera odmienną liczbą całkowitą. Równości (8) i (9) wyrażają łącznie właśnie to twierdzenie, o którego udowodnienie chodziło.

Gdyby przy zachowaniu wszystkich oznaczeń poprzedzających, nie tylko liczba (m, p) , ale i liczba (m', p') była liczbą ułamkową nieprzywiedlną, to czynnik l w równościach (8) i (9) musiałby oczywiście równać się jedności; mamy więc twierdzenie następujące:

III. *Dwie liczby ułamkowe nieprzywiedlne równe są sobie w takim i tylko w takim razie, kiedy liczniki i mianowniki obu liczb ułamkowych równe są sobie z osobna.*

Uważajmy kilka jakichkolwiek liczb ułamkowych

$$(10) \quad (m_1, p_1), (m_2, p_2), \dots (m_k, p_k).$$

Jeżeli tedy oznaczmy przez w jakąkolwiek wspólną wielokrotność mianowników $p_1, p_2, \dots p_k$ liczb (10), to możemy wyznaczyć liczby ułamkowe o wspólnym mianowniku w , odpowiednio równe liczbom (10), czyli sprowadzić liczby te do wspólnego mianownika, równego liczbie w .

Istotnie, oznaczając ogólnie przez l_i iloraz dzielenia liczby w przez liczbę p_i , mamy oczywiście

$$(m_1 l_1, w) = (m_1, p_1), \quad (m_2 l_2, w) = (m_2, p_2) \text{ i t. d.}$$

zatem liczby

$$(m_1 l_1, w), (m_2 l_2, w), \dots (m_k l_k, w)$$

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad etc. str. 137, tw. VII.

stanowią wynik sprowadzenia liczb (10) do wspólnego mianownika w i dostarczają rozwiązanie zagadnienia, o które chodziło.

Zagadnienie sprowadzania kilku danych liczb ułamkowych do wspólnego mianownika oczywiście posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Jedno z tych rozwiązań wyróżnia się od innych przez to, że odnośny wspólny mianownik jest najmniejszy.

Czytelnik sam udowodni, że najmniejszy wspólny mianownik, do którego możemy sprowadzić kilka danych liczb ułamkowych równa się najmniejszej wspólnej wielokrotności mianowników liczb ułamkowych danych, po poprzednim przeprowadzeniu tych liczb do postaci liczb ułamkowych nieprzywiedlnych.

Po sprowadzeniu dwóch liczb ułamkowych do wspólnego mianownika możemy łatwo zdecydować, czy one są sobie równe, a w razie nierówności rozpoznać mniejszą, albowiem, jak to czytelnik z łatwością udowodni, po sprowadzeniu do wspólnego mianownika uzyskamy, w razie równości rozważanych liczb ułamkowych, równe wartości na liczniki, a w razie nierówności — wartość mniejszą na licznik liczby ułamkowej mniejszej.

§ 37. Dodawanie. *Żeby określić sumę dwóch liczb ułamkowych a i b , oznaczamy przez a_1 i b_1 dwie liczby ułamkowe o równych sobie mianownikach, odpowiednio równe liczbom a i b , i umawiamy się, że za sumę liczb a i b uważać będziemy wszelką liczbę ułamkową równą tej, której mianownik równa się wspólnemu mianownikowi liczb a_1 i b_1 , a licznik — sumie liczników tych liczb.*

Ze względu na zasady, do których postanowiliśmy (§ 31) zawsze zastosowywać się przy ustawianiu teorii działań zasadniczych, jakikolwiek byłby rodzaj rozważanych wielkości, definicya poprzedzająca określa pojęcie sumy liczb ułamkowych nie tylko w przypadku dwóch tylko składników, ale i w przypadku jakiegokolwiek większej liczby tychże. Natomiast winniśmy upewnić się, że przyjęta przez nas definicya sumy dwóch liczb ułamkowych czyni zadość wymaganiom, omówionem w rozdziale poprzedzającym. W tym celu należy tylko uzasadnić dwa twierdzenia następujące:

I. *Przyjęta definicya czyni zadość dwom warunkom podstawowym, podanym w § 25-tym.*

II. *Ta definicya określa dodawanie jako działanie jednoznaczne, wykonalne bez zastrzeżeń.*

Zanim przejdziemy do dowodu tych twierdzeń, wysławiamy

jeszcze twierdzenia, które, podobnie do dwóch twierdzeń poprzedzających, bezpośrednio prawie wynikają z definicyi, podanej na czele tego paragrafu. Twierdzenia, które mamy na myśli, są następujące:

III. *Suma jakiegokolwiek skończonej liczby liczb ułamkowych posiada własności łączności i przemienności.*

IV. *Jeżeli dwie liczby ułamkowe b i b' sprawdzają nierówność*

$$b < b',$$

to w takim razie zachodzi nierówność

$$a + b < a + b',$$

jakąkolwiek liczbę ułamkową oznaczilibyśmy przez a .

Żeby uzasadnić tw. I-sze, oznaczmy przez a i b dwie jakiegokolwiek liczby ułamkowe, przez a' i b' dwie liczby ułamkowe, sprawdzające równości

$$(11) \quad \begin{cases} a' = a \\ b' = b, \end{cases}$$

a przez c liczbę ułamkową, mogącą być uważaną za sumę liczb a i b .

Na podstawie definicyi sumy dwóch składników mamy

$$(12) \quad c = (m + n, p),$$

oznaczając przez (m, p) i (n, p) pewne dwie liczby ułamkowe, o równych sobie mianownikach, sprawdzające równości

$$\begin{aligned} (m, p) &= a \\ (n, p) &= b. \end{aligned}$$

Z równości tych i równości (11), mamy

$$\begin{aligned} (m, p) &= a' \\ (n, p) &= b'. \end{aligned}$$

Zatem, ze względu na równość (12), liczba c uważana być może i za sumę liczb a' i b' .

Dowiedliśmy więc, że jeżeli pewna liczba ułamkowa c uważana być może za sumę pewnych dwóch liczb ułamkowych a i b , to liczba ta uważana być może i za sumę każdych dwóch liczb odpowiednio równych liczbom a i b ; innemi słowy, stwierdziliśmy, że powyższa definicya dodawania liczb ułamkowych czyni zadość pierwszemu z dwóch warunków, podanych w § 25-tym. Z drugiej zaś strony, z samego brzmienia omawianej definicyi wynika bezpo-

średnio, że ona czyni zadość i drugiemu z tych warunków. Zatem przekonywamy się, że pierwsze z powyższych twierdzeń rzeczywiście zachodzi.

Żeby uzasadnić tw. II-gie, przypuśćmy, że każda z liczb c i c' uważana być może za sumę pewnych dwóch liczb ułamkowych a i b . Mamy tedy:

$$\begin{aligned} c &= (m + n, p) \\ c' &= (m' + n', p'), \end{aligned}$$

oznaczając przez (m, p) , (n, p) , (m', p') i (n', p') pewne cztery liczby ułamkowe, które sprawdzają równania:

$$\begin{aligned} (m, p) &= a, & (n, p) &= b \\ (m', p') &= a, & (n', p') &= b. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} (m, p) &= (m', p') \\ (n, p) &= (n', p') \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} m \cdot p' &= m' \cdot p \\ n \cdot p' &= n' \cdot p \end{aligned}$$

zatem

$$(m + n) \cdot p' = (m' + n') \cdot p,$$

skąd

$$c = c'.$$

Równość ta wyraża, że dodawanie liczb ułamkowych jest, zgodnie z brzmieniem tw. II-go, działaniem jednoznaczem. Ponieważ zaś dodawanie liczb ułamkowych oczywiście jest wykonalne bez żadnych zastrzeżeń, przeto ostatecznie tw. II-gie zachodzi w podanem brzmieniu.

Ze stanowiska ogólnej teorii, rozwiniętej w rozdziale poprzedzającym, usprawiedliwiliśmy obecnie przyjętą przez nas definicję dodawania liczb ułamkowych.

Przechodząc do dowodu tw. III-go, oznaczmy przez a , b i c trzy jakiegokolwiek liczby ułamkowe.

Sprowadzając liczby te do pewnego wspólnego mianownika w , przyjmijmy

$$a = (\alpha, w), \quad b = (\beta, w), \quad c = (\gamma, w),$$

oznaczając oczywiście przez α , β i γ pewne trzy liczby całkowite. Ze względu na jednoznaczność dodawania, mamy tedy

$$a + b = (\alpha + \beta, w)$$

oraz

$$(a + b) + c = ((\alpha + \beta) + \gamma, w);$$

analogicznie znajdziemy

$$a + (b + c) = (\alpha + (\beta + \gamma), w),$$

a ponieważ

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

na podstawie własności łączności dodawania liczb całkowitych, przeto

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Z tego wynika, na podstawie znanego twierdzenia (§ 28, tw. I), że dodawanie liczb ułamkowych posiada własność łączności we wszystkich przypadkach.

Skoro zaś dodawanie posiada własność łączności w przypadku ogólnym, a przy dwóch składnikach działanie to posiada oczywiście własność przemienności, to rozważane działanie (§ 28, tw. II) posiada własność przemienności i w przypadku ogólnym.

Pozostaje tylko jeszcze twierdzenie IV-te do uzasadnienia. Jakikolwiek byłyby liczby ułamkowe a , b i b' , możemy, sprowadzając je do wspólnego mianownika, przyjąć:

$$a = (m, p), \quad b = (n, p), \quad b' = (n', p).$$

Mamy tedy

$$\begin{aligned} a + b &= (m + n, p) \\ a + b' &= (m + n', p), \end{aligned}$$

a nadto, gdybyśmy mieli

$$(13) \quad b < b',$$

to mielibyśmy także

$$n < n',$$

a zatem

$$(m + n, p) < (m + n', p),$$

skąd

$$(14) \quad a + b < a + b'.$$

Dowiedliśmy więc, że nierówność (13) pociąga za sobą nierówność (14), a na tem właśnie polega twierdzenie, które pragniemy uzasadnić.

§ 38. Odejmowanie. Ogólna teoria, rozwinięta w § 30-tym, zwalnia nas od podawania jakiegokolwiek specjalnych definicyi, dotyczących odejmowania liczb ułamkowych.

Na podstawie tw. III-go z paragrafu poprzedzającego istnieje jeden tylko rodzaj (§ 31) odejmowania, a ze względu na tw. IV-te z paragrafu poprzedzającego i na tw. I-sze i II-gie z § 29-go odejmowanie liczb ułamkowych jest, w razie wykonalności, działaniem jednoznaczem.

Zatem, z teoryi odejmowania liczb ułamkowych pozostaje tylko do rozwiązania problem następujący: wyznaczyć warunki wykonalności tego działania i podać ogólną metodę wykonywania tegoż.

Jeżeli oznaczymy przez a odjemną, a przez b odjemnik, to odejmowanie polega na wyznaczeniu reszty x z równania

$$b + x = a. \quad (1)$$

Zważywszy, że suma dwóch liczb ułamkowych, z których jedna ma licznik równy zeru, równa się zawsze drugiej z tych liczb, zważywszy dalej, że każda liczba o liczniku równym zeru (równa każdej innej liczbie ułamkowej tego szczególnego rodzaju) mniejsza jest od każdej liczby ułamkowej o liczniku od zera odmiennym, spostrzegamy z łatwością, opierając się na tw. IV-tym ustępu poprzedzającego, że mamy w każdym razie

$$b + x \geq b + (0.1) = b.$$

Jeżeli więc istnieje liczba x , sprawdzająca równanie (1), to mamy

$$a \geq b.$$

Zatem, żeby odejmowanie było wykonalne, koniecznem jest, żeby odjemnik nie był większy od odjemnej.

Warunek ten wystarcza; jeżeli bowiem on jest spełniony to, po sprowadzeniu liczb a i b do pewnego wspólnego mianownika p , uzyskamy na licznik α liczby (a, p) , równej a , liczbę nie mniejszą od licznika β liczby (b, p) , równej liczbie b , zatem odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$a - b$$

będzie wykonalne, a symbol

$$(\alpha - \beta, p)$$

przedstawiać będzie oznaczoną liczbę ułamkową, która ze względu na to, że mamy

$$(\alpha - \beta, p) + b = (\alpha - \beta, p) + (\beta, p) = (\alpha, p) = a,$$

przedstawiać będzie właśnie resztę, o którą chodziło.

Wynik ten nie tylko jest dowodem na to, że wyżej podany warunek wykonalności odejmowania jest dostateczny, ale oczywiście stanowi ogólne rozwiązanie problemu wykonywania odejmowania w teorii liczb ułamkowych.

§ 39. Mnożenie. Przystępując do mnożenia liczb ułamkowych, winniśmy ustawić, specjalnie dla tych liczb obmyślaną, definicyę tego działania przy dwóch czynnikach, a ta definicya (§ 31) stanowić będzie drugą i ostatnią definicyę podstawową (pierwszą była definicya sumy dwóch składników) w teorii działań zasadniczych na liczbach ułamkowych. Przyjmijmy definicyę następującą:

Iloczyn jakiejkolwiek liczby ułamkowej (m, p) , przyjętej za mnożną, przez jakąkolwiek liczbę ułamkową (m', p') , przyjętą za mnożnik, określamy jako liczbę ułamkową, równą liczbie ułamkowej

$$(m \cdot m', p \cdot p'),$$

której licznik jest iloczynem liczników, a mianownik — iloczynem mianowników rozważanych czynników.

Żeby ze stanowiska zasad rozdziału poprzedzającego usprawiedliwić tę definicyę, należy tylko uzasadnić dwa twierdzenia następujące:

I. Mnożenie liczb ułamkowych czyni zadość dwom zasadniczym warunkom, podanym w § 25-tym.

II. Mnożenie liczb ułamkowych jest działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Przed podaniem dowodu na te twierdzenia, wysłowimy jeszcze inne twierdzenia, które podobnie do dwóch poprzedzających, bezpośrednio prawie wynikają z przyjętej przez nas definicyi mnożenia liczb ułamkowych; są to twierdzenia następujące:

III. *Iloczyn dowolnej liczby liczb ułamkowych posiada własności łączności i przemienności.*

IV. *W stosunku do dodawania, a więc i w stosunku do odej-*

mowania (§ 32, tw. II), mnożenie liczb ułamkowych posiada własność rozdzielności.

Z samego brzmienia definicji mnożenia liczb ułamkowych wynika bezpośrednio, że definicja ta czyni zadość drugiemu z warunków, podanych w § 25-tym, gdyż każda liczba ułamkowa, równa liczbie mogącej być uważaną za iloczyn dwóch liczb ułamkowych, oczywiście sama uważana być może za iloczyn tych liczb. Żeby dowieść, że przyjęta przez nas definicja mnożenia liczb ułamkowych czyni zadość i pierwszemu z omawianych warunków, oznaczmy przez (m, p) , (m', p') , (m_1, p_1) i (m'_1, p'_1) cztery liczby ułamkowe sprawdzające równości

$$\left. \begin{aligned} (m, p) &= (m_1, p_1) \\ (m', p') &= (m'_1, p'_1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

i oznaczmy przez x liczbę, mogącą być uważaną za iloczyn

$$\begin{aligned} &(m, p) \cdot (m', p'). \\ \text{Mamy tedy} \quad &x = (m \cdot m', p \cdot p'), \end{aligned} \quad (2)$$

a ponieważ z równości (1) mamy

$$\begin{aligned} m \cdot p_1 &= m_1 \cdot p \\ m' \cdot p'_1 &= m'_1 \cdot p', \end{aligned}$$

skąd

$$(m \cdot m') \cdot (p_1 \cdot p'_1) = (m_1 \cdot m'_1) \cdot (p \cdot p'),$$

skąd znowu

$$(m \cdot m', p \cdot p') = (m_1 \cdot m'_1, p_1 \cdot p'_1), \quad (3)$$

przeto na podstawie równości (2), mamy

$$x = (m_1 \cdot m'_1, p_1 \cdot p'_1).$$

Zatem, wszelka liczba x , mogąca być uważana za iloczyn $(m, p) \cdot (m', p')$ uważana być może i za iloczyn jakiegokolwiek liczby ułamkowej (m_1, p_1) równej liczbie (m, p) przez jakąkolwiek liczbę (m'_1, p'_1) równą liczbie (m', p') .

Stwierdzamy więc, że mnożenie liczb ułamkowych sprawdza i pierwszy z warunków podanych w § 25-tym. Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności tw. I-sze.

Przechodzimy obecnie do dowodu tw. II-go. Na podstawie samego brzmienia definicji mnożenia liczb ułamkowych działanie to oczywiście wykonalne jest bez zastrzeżeń. Z drugiej znów strony przekonał się przed chwilą, że równości (1) pociągają za sobą

równość (3), skąd znów wynika, że jeżeli pewna liczba ułamkowa x uważana być może za iloczyn pewnej liczby ułamkowej (m, p) przez pewną liczbę ułamkową (m', p') , a pewna liczba x' — za iloczyn liczby (m_1, p_1) równej liczbie (m, p) , przez liczbę (m'_1, p'_1) równą liczbie (m', p') , to liczba x równa się liczbie x' . Zatem mnożenie liczb ułamkowych jest działaniem jednoznaczem. Ostatecznie uzasadniliśmy i tw. II-gie.

Ze stanowiska ogólnej teorii, rozwiniętej w rozdziale poprzedzającym, możemy uważać obecnie wyżej podaną definicyę mnożenia liczb ułamkowych za usprawiedliwioną.

Żeby uzasadnić tw. III-cie, zważmy, iż jakiegokolwiek liczby ułamkowe oznaczylibyśmy przez (m, p) , (m', p') i (m'', p'') , mamy

$$\{(m, p) \cdot (m', p')\} \cdot (m'', p'') = (m \cdot m', p \cdot p') \cdot (m'', p'') = \\ = (m \cdot m' \cdot m'', p \cdot p' \cdot p'')$$

oraz

$$(m, p) \cdot \{(m', p') \cdot (m'', p'')\} = (m, p) \cdot (m' \cdot m'', p' \cdot p'') = \\ = (m \cdot m' \cdot m'', p \cdot p' \cdot p''),$$

zatem

$$\{(m, p) \cdot (m', p')\} \cdot (m'', p'') = (m, p) \cdot \{(m', p') \cdot (m'', p'')\}.$$

Przekonywamy się więc, że przy trzech czynnikach, własność łączności zachodzi. Ale z tego wynika (§ 28, tw. I-sze), że łączność ta zachodzi w każdym razie.

Z drugiej strony łatwo stwierdzamy, że w razie dwóch czynników, mnożenie liczb ułamkowych posiada własność przemienności. Zatem, ze względu na uzasadnioną dopiero co własność łączności mnożenia liczb ułamkowych, mnożenie liczb ułamkowych (§ 28, tw. II) posiada własność przemienności w przypadku ogólnym.

Pozostaje jeszcze do uzasadnienia tw. IV-te. Oznaczając przez (m, p) , (m', p') i (m'', p'') trzy jakiegokolwiek liczby ułamkowe, mamy:

$$(1) \quad (m, p) \cdot (m', p') + (m, p) \cdot (m'', p'') = \\ = (m \cdot m', p \cdot p') + (m \cdot m'', p \cdot p'') = \\ = (m \cdot m' \cdot p'', p \cdot p', p'') + (m \cdot m'' \cdot p', p \cdot p'' \cdot p') = \\ = (m \cdot m' \cdot p'' + m \cdot m'' \cdot p', p \cdot p' \cdot p'').$$

Z drugiej znów strony mamy:

$$\text{skąd} \quad (m', p') + (m'', p'') = (m' \cdot p'' + m'' \cdot p', p' p''), \\ (m, p) \{(m', p') + (m'', p'')\} = (mm'p'' + mm''p', pp'p'').$$

Zatem na podstawie równości (1), mamy

$$(m, p) \cdot (m', p') + (m, p) \cdot (m'', p'') = (m, p) \{(m', p) + (m'', p'')\}.$$

Równość ta wyraża właśnie twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Już w teorii odejmowania liczb ułamkowych przywiedzeni byliśmy do wyróżnienia od innych liczb ułamkowych tych, których liczniki równają się zeru. Stwierdziliśmy już wówczas, że wspomniane liczby ułamkowe są sobie równe, że każda z nich mniejsza jest od każdej innej liczby ułamkowej, a nadto spostrzegliśmy, iż rzeczone liczby mają własność następującą: jeżeli oznaczymy przez Ω wspólną ich wartość, to mamy tedy

$$a + \Omega = a,$$

jakąkolwiek liczbę ułamkową oznaczylibyśmy przez a .

Spostrzegamy z łatwością, że powyższa własność liczb ułamkowych o liczniku równym zeru jest charakterystyczną własnością tych liczb. Wogóle, jeżeli w pewnym zbiorze (Z) działaniu dodawania ulegać mogących wielkości istnieje taki element Ω , żeby po oznaczeniu przez a i x dwóch elementów zbioru (Z) równości

$$x = \Omega \quad \text{i} \quad a + x = a$$

były sobie równoważne, to w takim razie wspólną wartość wszystkich, elementowi Ω równych, elementów zbioru (Z) zwiemy modułem dodawania elementów zbioru (Z).

Na podstawie tej definicji odcinek zerowy przedstawia moduł dodawania liczb całkowitych, a ze względu na uwagi, poczynione wyżej, każda liczba ułamkowa o liczniku zerowym — moduł dodawania liczb ułamkowych.

W stosunku do mnożenia liczby ułamkowe o liczniku zerowym czyli równe modułowi dodawania posiadają także charakterystyczną dla nich właściwość, którą czytelnik z największą łatwością sprawdzi, a która polega na twierdzeniu następującem:

V. *Warunek konieczny i wystarczający, ażeby iloczyn jakiegokolwiek liczby liczb ułamkowych równał się liczbie ułamkowej o liczniku równym zeru czyli modułowi dodawania, polega na tem, żeby przynajmniej jeden czynnik sam równał się modułowi dodawania liczb ułamkowych.*

Na zakończenie teorii mnożenia liczb ułamkowych podajemy twierdzenie następujące:

VI. Jeżeli oznaczymy przez b jakąkolwiek liczbę ułamkową, od modułu dodawania odmienną, a przez a i a' dwie liczby ułamkowe, sprawdzające nierówność

$$(1) \quad a < a',$$

to mamy

$$(2) \quad ab < a'b.$$

Istotnie, na podstawie nierówności (1) możemy przyjąć

$$c = a' - a,$$

ponieważ odejmowanie, zaznaczone w tym wzorze, jest wykonalne. Z drugiej strony mamy

$$(3) \quad b \cdot c = a' \cdot b - a \cdot b$$

ze względu na własność rozdzielności mnożenia w stosunku do odejmowania. Ponieważ zaś w iloczynie $b \cdot c$ czynnik c jest liczbą ułamkową z licznikiem od zera odmiennym na podstawie nierówności (1), a drugi czynnik z założenia także temu warunkowi czyni zadość, przeto ta sama okoliczność zachodzi i co do samego iloczynu $b \cdot c$ na podstawie tw. V-go obecnego paragrafu.

Zatem z równości (3), mamy

$$a' \cdot b > a \cdot b,$$

co właśnie pragnęliśmy uzasadnić.

§ 40. Dzielenie. Na podstawie ogólnej teorii, do której odwoływaliśmy się tyle razy w tym rozdziale, nie zachodzi potrzeba, przystępując do teorii dzielenia liczb ułamkowych, ustawienia jakiegokolwiek, dla liczb ułamkowych specjalnie obmyślanej definicji. Winniśmy tylko zaznaczyć, że z powodu własności przemienności mnożenia liczb ułamkowych, istnieje dla tych liczb tylko (§ 31) jeden rodzaj dzielenia, i podać warunki wykonalności oraz metodę do wykonywania tego działania.

Zatem, oznaczając przez a dzielną, przez b dzielnik a przez x iloraz, mamy tylko przeprowadzić dyskusję zadania, polegającego na wyznaczeniu liczby x z równania

$$(1) \quad b \cdot x = a.$$

Zwróćmy się najpierw do przypadku szczególnego, kiedy liczba ułamkowa b równa się modułowi dodawania. Gdyby w tym przypadku liczba a nie równała się także modułowi dodawania, to oczywiście nie

istniałaby żadna wartość na x , sprawdzająca równanie (1), i rozważane dzielenie byłoby niewykonalne. Gdyby natomiast nie tylko liczba b , ale i liczba a miała licznik równy zeru, gdyby, innemi słowy, obie te liczby równały się modułowi dodawania, to równanie (1) zachodziłoby, jakakolwiek liczbę ułamkową oznaczylibyśmy przez x ; zatem w tym przypadku dzielenie byłoby wykonalne, ale iloraz byłby całkiem nieoznaczony.

Przejdźmy do przypadku ogólnego, kiedy licznik liczby b jest od zera odmienny i, żeby uwidocznić liczniki i mianowniki liczb a i b , przyjmijmy:

$$a = (\alpha, \alpha'); \quad b = (\beta, \beta').$$

Ponieważ z założenia liczba β jest od zera odmienna, przeto symbol (β', β) przedstawia oznaczoną liczbę ułamkową. Łatwo sprawdzić możemy, że wartość

$$x = (\alpha, \alpha') \cdot (\beta', \beta) \quad (2)$$

na x czyni zadość równaniu (1). Istotnie, na podstawie wzoru (2), mamy

$$\begin{aligned} x \cdot (\beta, \beta') &= \{(\alpha, \alpha') \cdot (\beta', \beta)\} \cdot (\beta, \beta') = \\ &= (\alpha, \alpha') \cdot \{(\beta', \beta) \cdot (\beta, \beta')\} = (\alpha, \alpha') (1, 1) = (\alpha, \alpha'). \end{aligned}$$

Ponieważ na podstawie tw. VI-go z paragrafu poprzedzającego i tw. I-go i II-go z § 29-go dzielenie jest w rozważanym przypadku, w razie wykonalności, działaniem jednoznaczem, przeto możemy, opierając się na wyniku, uzyskanym dopiero co i na wynikach uzasadnionych poprzednio, odpowiedzieć obecnie w sposób wyczerpujący na pytania, które pragnęliśmy byli rozstrzygnąć, a to, wysławiając twierdzenie następujące:

Jeżeli przy dzieleniu liczb ułamkowych dzielnik jest liczbą ułamkową, od modułu dodawania odmienną, to dzielenie jest działaniem wykonułym i jednoznaczem, a iloraz równa się iloczynowi dzielnej przez dzielnik odwrócony (to znaczy, przez liczbę ułamkową, która wynika z dzielnika przez zamianę licznika na mianownik, a mianownika na licznik). Jeżeli zaś dzielnik równa się modułowi dodawania, to dzielenie jest niewykonalne, prócz, kiedy dzielna równa się też modułowi dodawania, a w takim razie iloraz jest całkiem nieoznaczony.

§ 41. Liczby wymierne. Jeżeli połączymy zbiór liczb całkowitych i zbiór liczb ułamkowych w jeden nowy zbiór (W), to zbiór ten stanowić będzie to, co nazywamy zbiorem liczb wymiernych. Zatem wszelka liczba całkowita lub ułamkowa jest liczbą

wymierną, a każda liczba wymierna jest albo liczbą całkowitą albo ułamkową.

Żeby liczbom wymiernym nadać charakter wielkości w znaczeniu ściślejszem, umawiamy się, że wykonywać będziemy porównywanie ilościowe dwóch liczb wymiernych według reguł następujących:

1°. W przypadku, kiedy liczby wymierne, mające uleż porównaniu ilościowemu, są liczbami ułamkowymi, zastosowujemy bezpośrednio reguły przyjęte w teorii liczb ułamkowych.

2°. W przypadku, gdy z dwóch liczb wymiernych, które mają uleż porównaniu ilościowemu, jedna jest pewną liczbą całkowitą k , a druga jest liczbą ułamkową (m, p) , orzekamy, że mamy

$$k < (m, p), \quad k = (m, p) \quad \text{lub} \quad k > (m, p)$$

zależnie od tego, czy zachodzi pierwszy, drugi lub trzeci ze związków następujących:

$$(k, 1) < (m, p), \quad (k, 1) = (m, p) \quad \text{lub} \quad (k, 1) > (m, p).$$

3°. W przypadku, kiedy liczby wymierne, które pragniemy porównać ze sobą ilościowo, są obie liczbami całkowitymi, zastosowujemy bez żadnej zmiany reguły, przyjęte w teorii liczb całkowitych.

Oczywiście winniśmy upewnić się, że reguły powyższe zgodne są z zasadami rozdziału II-go.

Warunki konieczne i wystarczające, ażeby zgodność ta zachodziła, polegają na twierdzeniach następujących:

A) Równości

$$w = w' \quad \text{i} \quad w' = w,$$

gdzie w i w' oznaczają dwie liczby wymierne, są równoważne.

B) Pomiedzy liczbami wymiernymi, równemi oznaczonej liczbie wymiernej w , znajduje się także i sama liczba w .

C) Równości

$$w = w' \quad \text{i} \quad w' = w'',$$

gdzie w , w' i w'' oznaczają trzy liczby wymierne, pociągają za sobą równość

$$w = w''.$$

D) Związki

$$w < w' \quad \text{i} \quad w' > w,$$

gdzie oznaczaliśmy znowu przez w i w' dwie liczby wymierne, są równoważne.

E) Dwie liczby wymierne w i w' sprawdzają zawsze jeden, ale też tylko jeden z trzech związków

$$w < w', \quad w = w' \quad \text{ i } \quad w > w'.$$

F) Związki

$$w < w' \quad \text{ i } \quad w' < w'',$$

gdzie w , w' i w'' oznaczają jak wyżej trzy liczby wymierne, pociągają za sobą związek

$$w < w''^1).$$

Z twierdzeń poprzedzających, twierdzenie A , B , D i E stanowią natychmiastowe następstwa reguły, przyjętej na porównywanie ilościowe liczb wymiernych, a twierdzenia C i F uzasadnimy łatwo po wprowadzeniu pewnej odpowiedniości pomiędzy liczbami wymiernymi a liczbami ułamkowymi. Żeby odpowiedniość tę określić, umówmy się, że wyrażenie, liczba ułamkowa odpowiednia oznaczonej liczbie wymiernej w , oznacza, w razie kiedy liczba w jest już sama pewną liczbą ułamkową, tę właśnie liczbę ułamkową, a w razie, kiedy liczba w jest liczbą całkowitą — liczbę ułamkową, której licznikiem jest ta liczba całkowita a mianownikiem — jedność.

Na podstawie tych definicji mamy twierdzenie następujące:

I. *Jakiegokolwiek liczby wymierne oznaczylibyśmy przez w i w' , związki*

$$w < w', \quad w = w' \quad \text{ i } \quad w > w' \tag{1}$$

są odpowiednio równoważne związkom następującym:

$$u < u', \quad u = u' \quad \text{ i } \quad u > u', \tag{2}$$

oznaczając przez u liczbę ułamkową, odpowiednią liczbie wymiernej w , a przez u' — liczbę ułamkową, odpowiednią liczbie wymiernej w' .

Twierdzenie to jest bezpośrednio oczywistem w przypadku, kiedy jedna przynajmniej z liczb w i w' jest liczbą ułamkową, ze względu na dwie pierwsze z trzech reguł, określających prawa

¹⁾ Ponieważ, na podstawie uwagi, uczynionej w § 8-ym, ostatnie dwa twierdzenia II-ej grupy twierdzeń, wyszczególnionych w rzeczonym paragrafie, należą do następstw logicznych twierdzeń pozostałych, przeto przy usprawiedliwieniu reguł, przyjętych na porównywanie ilościowe elementów oznaczonego zbioru, uzasadnianie ostatnich dwóch twierdzeń II-giej grupy jest zbędne, skoro uzyskana została pewność, że wszystkie inne twierdzenia obu grup w rozważanym przypadku zachodzą.

porównywania liczb wymiernych. Przypuśćmy więc, że liczby wymierne w i w' są dwiema liczbami całkowitemi. W takim razie, z łatwością sprawdzamy, opierając się na regułach porównywania ilościowego liczb ułamkowych, że związki (1) są odpowiednio równoważne związkom następującym:

$$(w, 1) < (w', 1), \quad (w, 1) = (w', 1) \quad \text{i} \quad (w, 1) > (w', 1),$$

a ponieważ w rozważanym przypadku symbol u oznacza właśnie liczbę ułamkową $(w, 1)$, a symbol u' — liczbę ułamkową $(w', 1)$, przeto i w tym nawet przypadku związki (1) i (2) są, zgodnie z zapowiedzią, odpowiednio równoważne sobie.

Przechodzimy do kolejnego uzasadnienia twierdzeń C i F .

Oznaczmy w tym celu przez w , w' i w'' trzy liczby wymierne jakiekolwiek, a przez u , u' i u'' liczby ułamkowe, odpowiednie liczbom wymiernym w , w' i w'' .

Założmy najpierw, że mamy

$$w = w' \quad \text{oraz} \quad w' = w''.$$

W takim razie, ze względu na równoważność związków (1) i (2) mieć będziemy

$$\begin{aligned} & \text{skąd} \quad u = u' \quad \text{oraz} \quad u' = u'', \\ & \quad \quad \quad u = u''. \end{aligned}$$

Wnosimy stąd, opierając się ponownie na tw. I-szem, że mamy

$$w = w''.$$

Uzasadniliśmy więc twierdzenie C .

Założmy obecnie, że mamy

$$w < w'; \quad w' < w'',$$

w takim razie, na podstawie tw. I-go, mieć będziemy także

$$\begin{aligned} & \text{skąd} \quad u < u' \quad \text{oraz} \quad u' < u'', \\ & \quad \quad \quad u < u'', \end{aligned}$$

a zatem znowu na podstawie tw. I-go mamy

$$w < w''.$$

Uzyskany wynik stanowi oczywiście dowód na twierdzenie F .

Ostatecznie stwierdzamy, że reguła, którą przyjęliśmy na porównywanie ilościowe liczb wymiernych czyni zadość zasadom rozdz. II-go.

Winniśmy zaznaczyć, że na podstawie wspomnianej reguły, warunek konieczny i wystarczający, ażeby oznaczona liczba całkowita k równała się oznaczonej liczbie ułamkowej (m, p) , polega na tem, żeby liczba całkowita m podzielna była przez liczbę całkowitą p i żeby nadto iloraz tych liczb równał się liczbie k . Z tego wynika w szczególności, że *każda liczba ułamkowa, której licznik równa się zeru, zawsze równa się zeru*.

Ze względu na różne zastosowania znaczenie podstawowe ma twierdzenie następujące:

II. *Liczba liczb wymiernych, położonych pomiędzy dwoma jakimikolwiek nierównymi sobie liczbami wymiernymi w i w' ($w < w'$), jest nieskończenie wielka.*

Istotnie, możemy zawsze przedstawić liczby w i w' w postaci dwóch liczb ułamkowych o wspólnym mianowniku; mamy tedy

$$w = (m, p), \quad w' = (m', p) \\ m' > m,$$

a ponieważ liczby m' i m są liczbami całkowitemi, przeto

$$m' - m \geq 1,$$

zatem

$$m'(n+1) - m(n+1) \geq n+1,$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez n ($n \geq 1$). Ze związku poprzedzającego wynika, że przyjmując w wyrażeniu

$$m(n+1) + i$$

na i kolejno wartości

$$1, 2, 3, \dots, n,$$

uzyskamy n nierównych sobie liczb całkowitych pośrednich pomiędzy liczbami

$$m(n+1) \quad \text{i} \quad m'(n+1),$$

a ponieważ mamy

$$w = (m(n+1), p(n+1)); \quad w' = (m'(n+1), p(n+1)),$$

przeto spostrzegamy, że wyznaczymy n nierówne sobie liczby wymierne pośrednie pomiędzy liczbami w i w' , przyjmując w wyrażeniu

$$(m(n+1) + i, p(n+1))$$

na i kolejno wszystkie wartości całkowite od $i = 1$ aż do $i = n$. Ponieważ możemy przyjąć na n jakąkolwiek, od jedności nie mniejszą wartość całkowitą, przeto wynik, do którego doszliśmy, stanowi dowód na twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Stosując twierdzenie poprzedzające do przypadku, kiedy mamy $w = 0$, otrzymujemy twierdzenie następujące:

III. *Liczba liczb wymiennych nierównych pomiędzy sobą, większych od liczby zero, ale mniejszych od dowolnie przyjętej, od zera większej liczby wymiernej, jest nieskończenie wielka.*

Spostrzegamy natychmiast, że zachodzi także i twierdzenie następujące:

IV. *Liczba liczb wymiennych, większych od jakiegokolwiek oznaczonej liczby wymiernej, jest nieskończenie wielka.*

§ 42. Działania zasadnicze na liczbach wymiennych. Na podstawie ogólnej teorii rozdziału poprzedzającego, stworzymy teorię działań zasadniczych na liczbach wymiennych, skoro tylko określimy dodawanie i mnożenie w przypadku szczególnym, kiedy dwie tylko liczby podlegać mają jednemu z tych działań. Żeby odnośne definicje wysłowić, uważajmy dwie liczby wymierne w i w' . Oczywiście zawsze zachodzić będzie jeden z trzech przypadków następujących:

1^o. Obie liczby w i w' są liczbami ułamkowymi.

2^o. Jedna z nich jest pewną liczbą całkowitą k , a druga — pewną liczbą ułamkową (m, p) .

3^o. Obie liczby w i w' są liczbami całkowitemi.

W pierwszym przypadku nazywamy sumą i iloczynem liczb w i w' liczby wymierne, odpowiednio równe tym liczbom ułamkowym, które na podstawie teorii liczb ułamkowych przedstawiają odpowiednio sumę i iloczyn liczb ułamkowych, którymi są odpowiednio liczby wymierne w i w' .

W drugim przypadku nazywamy sumą i iloczynem liczb wymiennych w i w' liczby wymierne, odpowiednio równe liczbom ułamkowym, które na podstawie teorii liczb ułamkowych stanowią odpowiednio sumę i iloczyn liczb ułamkowych $(k, 1)$ i (m, p) .

W trzecim przypadku nazywamy sumą i iloczynem liczb wymiennych w i w' liczby wymierne, odpowiednio równe liczbom całkowitym, które stanowią na podstawie teorii liczb całkowitych sumę i iloczyn liczb w i w' .

Definicje poprzedzające oczywiście nie są sprzeczne ani z teo-