

IV. Problem mierzenia odcinków prostoliniowych i liczby ułamkowe. Ogólne pojęcie liczby wymiernej.

§ 15. Teorya, którą zamierzamy wyłożyć w tym rozdziale i którą nazwiemy teorią geometryczną, nie jest to teoria liczb ułamkowych i liczb wymiernych, która ostatecznie utrzymała się w nauce i którą nazwać możemy teorią czysto arytmetyczną. Nie pomijamy jednak teorii geometrycznej z tej przyczyny, że ze stanowiska historycznego teoria arytmetyczna jest owocem krytyki teorii geometrycznej, skąd znów wynika, że nie bylibyśmy w stanie zrozumieć w jaki sposób powstać mogła teoria arytmetyczna, nie obeznawszy się poprzednio z teorią geometryczną. Omówienie teorii geometrycznej uważamy za tem bardziej pożądane, że fakta, z którymi będziemy mieli sposobność obeznać czytelnika, w każdym razie w tej lub innej formie podaneby być musiały ze względu na problem mierzenia wielkości.

Ponieważ teorię arytmetyczną wyłożymy w jednym z dalszych rozdziałów, przeto rozwijamy teorię geometryczną tylko do kresu, poza którym teoria geometryczna nie różni się już od teorii arytmetycznej. Na tem właśnie polega przyczyna z powodu której omawiamy tu, z teorii działań na liczbach ułamkowych i wymiernych, tylko dodawanie i mnożenie, ograniczając się przytem do przypadku, kiedy dwie tylko liczby działaniu podlegają.

§ 16. Odkładając ogólną teorię mierzenia do jednego z dalszych rozdziałów, poprzestaniemy obecnie na postawieniu problemu mierzenia odcinków prostoliniowych w postaci następującej: *podać ogólną metodę do zupełnego określenia pod względem długości odcinków prostoliniowych w zależności od dowolnie oznaczonego, ale zerowym odcinkiem jednak nie będącego odcinka prostoliniowego, który w takim razie przybierze nazwę jednostki długości.*

Jeżeli pewien odcinek a jest z jednostką długości u współmiernym, to określimy oczywiście w zupełności pod względem długości odcinek a w zależności od odcinka u , podając liczby całkowite m i p , z których pierwsza m , oznacza, ile razy pewna jedna ze wspólnych podwielokrotności odcinków a i u mieści się w odcinku a , a druga — p , ile razy ta sama wspólna podwielokrotność mieści się w jednostce u . Okoliczność ta oczywiście zachodzi nawet w razie, kiedy odcinek a jest odcinkiem zerowym; ten szczególny przypadek wyróżnia się od innych tą tylko osobliwością, że liczba m równa się zeru, a na liczbę p możemy przyjąć od zera odmienną, ale poza tem dowolną wartość całkowitą.

Powyższa uwaga stanowi oczywiście rozwiązanie problemu mierzenia odcinków współmiernych z jednostką. Z tego nie wynika jednak, żebyśmy już mieli, albo nawet mogli natychmiast przejść do przypadku niewspółmierności. W rzeczywistości koniecznem jest, żebyśmy doprowadzili najpierw wynik, zasadniczo już uzyskany, do należytej postaci i rozwinęli cały szereg rozważań, z tem połączonych.

Przystępujemy zatem obecnie do tego przedmiotu, a sprawę mierzenia odcinków niewspółmiernych z jednostką omówimy dopiero w rozdziale VIII-ym.

§ 17. Rozwiązanie problemu mierzenia odcinka a , współmiernego z jednostką u , uzyskaliśmy w postaci układu dwóch liczb całkowitych, przed chwilą bliżej określonych, m i p , z których p jest w każdym razie od zera odmiennie. Zatem w stosunku do problemu mierzenia odcinków, współmiernych z jednostką, pary liczb całkowitych występują jako oddzielne rzeczy; w każdej takiej parze liczb całkowitych każda z nich w porównaniu do drugiej ma odmiennie znaczenie; nadto w każdej z owych par liczb całkowitych pewna, jedna z nich, zawsze jest od zera odmienna. Uwagi te przywodzą nas do definicyi następującej:

Wyraz liczba ułamkowa oznacza każdy układ dwóch liczb całkowitych, uważany za element zbioru wszystkich takich dwójek liczb całkowitych, które łącznie podlegają pewnej ogólnej umowie. W stosunku do tej umowy każda z liczb całkowitych, stanowiących razem liczbę ułamkową, ma sobie właściwą rolę i z tej przyczyny jedna z nich zowie się mianownikiem, a druga licznikiem. Umowę wspomnianą w tej definicyi, podajemy w postaci nowej definicyi, mianowicie:

Orzeczenie, że pewna liczba ułamkowa stanowi miarę oznaczonego odcinka a , gdy przyjmujemy za jednostkę pewien odcinek u , wyraża, iż odcinki a i u są współmierne, a pewna wspólna podwielokrotność tych odcinków mieści się w odcinku u tyle razy, ile wynosi mianownik, a w odcinku a tyle, ile wynosi licznik.

Spostrzegamy z łatwością, iż warunek konieczny i wystarczający na to, ażeby, przyjąwszy dowolnie za jednostkę pewien odcinek nie zerowy u , oraz dwie liczby całkowite m i p , istniał taki odcinek a współmierny z odcinkiem u , żeby wspólna podwielokrotność d tych odcinków mieściła się dokładnie m razy w odcinku a , a p razy w odcinku u , polega na tem tylko, aby liczba całkowita p była od zera odmienna. Wnosimy stąd, że jedyny warunek na to, ażeby dwie liczby całkowite m i p uważane być mogły odpowiednio za licznik i mianownik oznaczonej liczby ułamkowej, polega na tem, żeby liczba p była od zera odmienna.

Natychmiastowem następstwem przyjętych definicyi jest twierdzenie następujące: *Przy oznaczonej jednostce długości odpowiada każdej liczbie ułamkowej jedna i tylko jedna taka długość, żeby miarą odcinka tej długości była rozważana liczba ułamkowa.*

Odwroćenie tego twierdzenia nie byłoby poprawne. Istotnie, jeżeli pewien odcinek a współmierny jest z jednostką, to niezawodnie istnieć będzie liczba ułamkowa, która będzie miarą odcinka a , ale nie tylko jedna, albowiem dwa współmierne odcinki posiadają nieskończenie wiele wspólnych podwielokrotności, skąd natychmiast wynika, że istnieć będzie nieskończenie wiele liczb ułamkowych, z których każda będzie mogła być uważana za miarę odcinka a .

Za symbol liczby ułamkowej o liczniku m i mianowniku p przyjmujemy tymczasowo symbol następujący:

$$(m, p),$$

który czytamy: m przecinek p . Później będziemy mieli powód przyjąć ostatecznie za symbol liczby ułamkowej inny symbol.

§ 18. Ponieważ przy oznaczonej jednostce długości, liczby ułamkowe stanowią pewnego rodzaju obrazy pewnej klasy odcinków prostoliniowych, mianowicie współmiernych z jednostką, ponieważ dalej już poprzednio nadaliśmy odcinkom charakter wielkości, przeto powstaje najnaturalniej myśl o nadaniu tegoż charakteru także i liczbom ułamkowym.

Otóż zestawianie reguły porównywania ilościowego odcinków

z definicyami, na podstawie których określiliśmy przed chwilą związek wzajemny liczb ułamkowych z odcinkami, prowadzi nas do ustawienia definicyi następujących:

1°. Dwie liczby ułamkowe zowią się równemi sobie w razie i tylko w razie, kiedy przy oznaczonej jednostce długości liczby te są miarami równych pomiędzy sobą odcinków.

2°. Orzeczenie, że pewna liczba ułamkowa (m, p) mniejsza jest od pewnej liczby ułamkowej (m', p') i orzeczenie równoważne, iż liczba ułamkowa (m', p') większą jest od liczby (m, p) , wyrażają, że, przy oznaczonej jednostce, liczba (m, p) jest miarą odcinka mniejszego od odcinka, którego miarą jest liczba (m', p') .

Spostrzegamy natychmiast, że definicje te w razie, kiedy jednostka długości jest odcinkiem w zupełności oznaczonym, czynią najzupełniej zadość zasadom rozdziału II-go. Natomiast zachodzi wątpliwość czy, w przypadku zmiany jednostki długości, sąd o tem, czy oznaczona liczba ułamkowa jest mniejsza albo większa od pewnej innej, lub jej się równa, nie będzie musiał niekiedy ulec zmianie.

Żeby w tym względzie poznać prawdziwy stan rzeczy, uważajmy dwie jakiegokolwiek liczby ułamkowe (m, p) i (m', p') i, przyjmawszy dowolnie pewien odcinek u za jednostkę, wyznaczmy odcinki a i a' , których miarami byłyby odpowiednio rozważane liczby ułamkowe. Oznaczając przez d i d' dwa tak dobrane odcinki, żebyśmy mieli:

$$u = p \cdot d \quad (1)$$

oraz

$$u = p' \cdot d', \quad (2)$$

będziemy mieli

$$a = m \cdot d \quad (3)$$

$$a' = m' \cdot d'. \quad (4)$$

Podzielimy odcinek d na tyle równych części, ile wynosi liczba p' , i oznaczmy przez δ jedną z nich. W takim razie zachodzić będzie równość

$$d = p' \cdot \delta. \quad (5)$$

Ze związków (1) i (5) wynika natychmiast związek następujący:

$$u = (p \cdot p') \delta. \quad (6)$$

Gdybyśmy więc odcinek b określili równością

$$b = p \cdot \delta, \quad (7)$$

to otrzymalibyśmy

$$(8) \quad u = p' \cdot b.$$

Ponieważ, w razie nierówności odcinków b i d' , odcinki

$$p' \cdot b \text{ i } p' \cdot d$$

równymi sobie być nie mogą, ponieważ zaś z drugiej strony, na podstawie równości (2) i (8), odcinki te są niezawodnie sobie równe, przeto mamy

$$b = d',$$

mamy więc

$$(9) \quad d' = p \cdot \delta$$

na podstawie równości (7).

Zważmy obecnie, że na podstawie równości (3) i (5) mamy

$$(10) \quad a = (m \cdot p') \cdot \delta,$$

a na podstawie równości (4) i (9)

$$(11) \quad a' = (m' \cdot p) \cdot \delta.$$

Ze związków (10) i (11) wynika, że związki:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \cdot p' < m' \cdot p \\ m \cdot p' = m' \cdot p \\ m \cdot p' > m' \cdot p \end{array} \right.$$

są odpowiednio równoważne¹⁾ następującym:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a < a' \\ a = a' \\ a > a'. \end{array} \right.$$

Ponieważ zaś, ze względu na definicję, nadające liczbom ułamkowym charakter wielkości, związki (13) równoważne są związkom:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (m, p) < (m', p') \\ (m, p) = (m', p') \\ (m, p) > (m', p'), \end{array} \right.$$

przeto związki (12) i (14) są sobie odpowiednio także równoważne.

¹⁾ Dwa związki zowią się równoważnymi, jeżeli koniecznym logicznym następstwem założenia, iż jeden z nich zachodzi, jest ta okoliczność, że drugi także zachodzi.

Żeby więc zdecydować, który ze związków (14) przy oznaczonych wartościach na liczby m, p, m' i p' w rzeczywistości zachodzi, należy tylko upewnić się, któremu ze związków (12) czynią w rzeczywistości zadość liczby całkowite m, p, m' i p' .

Kryterium poprzedzające całkiem jest niezależne od wyboru jednostki długości, co usuwa w zupełności wątpliwość, która zastanowiła nas była wyżej.

Z uzyskanego warunku równości dwóch liczb ułamkowych wynika natychmiast, że, jakkolwiek bądź od zera odmienną liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez λ , mamy

$$(\lambda m, \lambda p) = (m, p), \quad (15)$$

jakkolwiek byłaby liczba ułamkowa (m, p) .

§ 19. Zestawiając definicje rozdziału obecnego z treścią rozdziału poprzedzającego, dochodzimy najnaturalniej do wprowadzenia definicji następującej: *wynikiem dodania pewnej liczby ułamkowej (m, p) do innej oznaczonej liczby ułamkowej (m', p') , czyli sumą liczby (m, p) i liczby (m', p') nazywamy liczbę ułamkową (x, y) , która, przy dowolnie przyjętej jednostce długości u , stanowi miarę odcinka c równego sumie dwóch odcinków a i b , określonych przez to, że, po przyjęciu odcinka u za jednostkę, miarami ich są odpowiednio liczby (m, p) i (m', p') .*

Na sumę liczb (m, p) i (m', p') przyjmujemy symbol

$$(m, p) + (m', p').$$

Spostrzegamy z łatwością, że, ze względu na jednoznaczność sumy dwóch oznaczonych odcinków i ze względu na własność przemienności takich sum, suma dwóch oznaczonych liczb ułamkowych, o ile istnieje, jest, przy oznaczonej jednostce długości, oznaczona jednoznacznie¹⁾ i posiada własność przemienności²⁾. Natomiast mniej natychmiastowymi są okoliczności następujące:

1°. Działanie dodawania liczb ułamkowych zawsze jest wykonalne. (Fakt ten musi być uzasadniony, ponieważ nie mamy pewności a priori, czy odcinek c jest z odcinkiem u współmierny).

¹⁾ Zob. pierwszy odsyłacz u dołu str. 19.

²⁾ Zob. drugi odsyłacz u dołu str. 19.

2°. Suma dwóch liczb ułamkowych zależy wyłącznie od tych liczb, ale bynajmniej nie zależy od wyboru jednostki długości.

Żeby przekonać się o tem, że okoliczności te istotnie zachodzą, a nadto rozwiązać problem dodania do siebie dwóch liczb ułamkowych, zachowajmy wszystkie oznaczenia określone przy podaniu samej definicyi dodawania liczb ułamkowych i oznaczmy przez w jedną ze wspólnych, od zera odmiennych, wielokrotności mianowników p i p' liczb (m, p) i (m', p') . Mamy tedy

$$(16) \quad \begin{cases} w = kp \\ w = k'p' \end{cases}$$

oznaczając przez k i k' pewne dwie liczby całkowite.

Opierając się na twierdzeniu, które wyrażone jest równością (15), i uwzględniając związki (16), stwierdzamy, że mamy

$$(17) \quad \begin{cases} (km, w) = (m, p) \\ (km', w) = (m', p'). \end{cases}$$

Z równości tych wynika, co następuje: jeżeli odcinek u podzielimy na w równych sobie części i oznaczmy przez d jedną z nich, to odcinek d mieścić się będzie dokładnie w odcinku a tyle razy, ile wynosi iloczyn km , a w odcinku b — ile wynosi iloczyn $k'm'$. Zatem, w odcinku c odcinek d mieścić się będzie tyle razy, ile wynosi liczba

$$km + k'm',$$

a ponieważ odcinek d mieści się w jednostce u tyle razy, ile wynosi liczba w , przeto liczba ułamkowa

$$(km + k'm', w)$$

stanowi miarę odcinka c . Mamy przeto, ostatecznie

$$(m, p) + (m', p') = (km + k'm', w).$$

Stwierdzamy więc, że działanie dodawania dwóch liczb ułamkowych jest rzeczywiście zawsze wykonalne, a to, według reguły następującej: *Wyznaczwszy jedną ze wspólnych, od zera odmiennych, wielokrotności, w , mianowników dwóch danych liczb ułamkowych, mnożymy licznik każdej z nich przez iloraz podziału liczby w przez jej mianownik; w takim razie suma iloczynów poprzedzających stanowi licznik, a liczba w mianownik liczby ułamkowej, przedstawia-*

jącej sumę liczb ułamkowych danych. Spostrzegamy jednocześnie, że, zgodnie z zapowiedzią, suma dwóch liczb ułamkowych od jednostki długości wcale nie zależy.

§ 20. Przypuśćmy, że jednostka długości u jest podwielokrotnością pewnego odcinka a i mieści się w nim dokładnie m razy. W takim razie, na podstawie ogólnych definicyi, przyjętych w § 16, miarą odcinka a będzie liczba ułamkowa

$$(m, 1),$$

tę osobliwość mająca, że mianownik jej równa się jedności. Z drugiej znów strony, nie stanęlibyśmy w sprzeczności z ogólnemi zasadami § 16-go, gdybyśmy przyjęli następującą definicyę: *w razie, kiedy jednostka długości jest podwielokrotnością pewnego odcinka a i mieści się zatem w nim dokładnie oznaczoną ilość razy m , nadajemy liczbie całkowitej m nazwę miary odcinka a* . Ze względu na tę okoliczność powstaje myśl, żeby definicyę poprzedzającą dołączyć do definicyi podanych wyżej, i uważać liczby całkowite i liczby ułamkowe jako stanowiące razem pewną oznaczoną klasę rzeczy, tak zwane liczby wymierne bezwzględne, nadając jednocześnie liczbom wymiernym charakter wielkości na podstawie definicyi następujących: *orzeczenia, że pewna liczba wymierna bezwzględna w mniejsza jest od pewnej liczby wymiernej bezwzględnej w' , równa się jej, albo jest od niej większa, wyrażają odpowiednio, że przy oznaczonej jednostce długości, odcinek a , którego miarą jest liczba w , jest mniejszy od odcinka a' , którego miarą jest liczba w' , równa się temu odcinkowi, albo jest od niego większy*.

Spostrzegamy natychmiast, że definicye te czynią zadość ogólnym zasadom rozdziału II-go.

Ponieważ spostrzegamy równie łatwo, że definicye poprzedzające nie znajdują się w sprzeczności z temi, na podstawie których nadaliśmy charakter wielkości liczbom całkowitym, przeto wprowadzamy rzeczywiście wszystkie te definicye.

Definicye te przywodzą nas do wprowadzenia jeszcze definicyi następującej: *wynikiem dodania oznaczonej liczby wymiernej w' do drugiej liczby w , albo sumą liczb w i w' nazywamy, przy oznaczonej jednostce długości u , miarę odcinka równego sumie odcinka a' , którego miarą jest liczba w' , i odcinka a , którego miarą jest liczba w , przyjmując zarazem na sumę liczb w i w' symbol*

$$w + w'.$$

Definicja powyższa jest tylko wynikiem takiego rozszerzenia definicji dodawania liczb ułamkowych, podanej na początku ustępu poprzedzającego, ażeby określić przez nią sumę dwóch jakiegokolwiek liczb wymiernych bezwzględnych. Winniśmy jednak zaznaczyć, że nie jest oczywistą rzeczą, iż przy tej definicji wykonanie dodawania zawsze będzie możliwe i w żadnym przypadku nie doprowadzi do sprzeczności z definicją sumy przyjętą w teorii liczb całkowitych.

Żeby wszelką w tym względzie wątpliwość usunąć, czynimy uwagę następującą: jeżeli oznaczymy przez w , w' , w_1 i w'_1 dowolne cztery liczby wymierne, byle tylko sprawdzały równości

$$(18) \quad \begin{cases} w_1 = w \\ w'_1 = w' \end{cases}$$

to, przy oznaczonej jednostce długości u , dodawania, zaznaczone w wyrażeniach

$$(19) \quad w + w' \text{ i } w_1 + w'_1$$

jednocześnie tylko mogą być wykonalne lub niewykonalne, a w razie wykonalności muszą prowadzić do równych sobie wyników, albowiem jeżeli oznaczymy przez a i a' odcinki, których miarami są odpowiednio liczby w i w' , to, ze względu na równości (18) miarami odcinków a i a' będą odpowiednio i liczby w_1 i w'_1 . Zatem, w razie współmierności odcinka $a + a'$ z jednostką u , dodawania zaznaczone w wyrażeniach (19) będą i jedno i drugie wykonalne, a wspólnym ich wynikiem będzie miara odcinka $a + a'$; gdyby zaś odcinek $a + a'$ z jednostką współmierny nie był, to żadne z obu rozważanych dodawań nie byłoby wykonalne.

Opierając się na uwadze poprzedzającej, oraz na tem, że mamy ogólnie

$$(m, 1) = m$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez m , stwierdzamy, że dodanie jednej liczby wymiernej do drugiej, możemy zawsze sprowadzić do wykonania tegoż działania na liczbach ułamkowych. Stąd wysnuwamy natychmiast wyniki następujące: *dodawanie liczb wymiernych zawsze jest wykonalne, a wynik tego działania jest określony jednoznacznie, skoro liczby, mające uleż działaniu, są oznaczone; nadto dodawanie liczb wymiernych posiada własność przemienności.* Pozostaje tylko do wykazania, że omawiana definicja nie

proceedzi do sprzeczności z definicyą dodawania, przyjętą w teoryi liczb całkowitych. Według definicyi, którą podaliśmy wyżej, i na podstawie już z niej wysnutych konsekwencyi, suma dwóch liczb całkowitych m i m' równa się sumie

$$(m, 1) + (m', 1),$$

która znów równa się liczbie ułamkowej

$$(m + m', 1),$$

gdzie wyrażenie $m + m'$ ma być rozumiane w znaczeniu, przyjętem w teoryi liczb całkowitych. Ponieważ zaś mamy

$$(m + m', 1) = m + m',$$

przeto stwierdzamy, że rozważana obecnie definicya dodawania, przy zastosowaniu do liczb całkowitych, prowadzi do tego samego wyniku, co definicya klasyczna sumy dwóch liczb całkowitych.

§ 21. Stosując teorię mierzenia odcinków do badania przyrody albo do celów praktycznej natury, napotykamy często potrzebę przyjęcia za jednostkę długości odcinka odmiennego od tego, który pierwotnie za jednostkę był przyjęty. Stąd konieczność bliższego zbadania okoliczności, które towarzyszą takiej zmianie jednostki.

Rozważmy najpierw przypadek najprostszy, kiedy miarą pierwotnej jednostki długości u , po wprowadzeniu nowej jednostki u' jest pewna liczba całkowita k , i spróbujmy, po wprowadzeniu nowej jednostki u' wyznaczyć miarę takiego odcinka a , którego miara, przed wprowadzeniem nowej jednostki, a więc przy jednostce pierwotnej u , byłaby równa oznaczonej liczbie całkowitej m .

Spostrzegamy natychmiast, że miarą odcinka a , po wprowadzeniu jednostki u' , będzie liczba całkowita, równa iloczynowi liczb k i m . Jednakże, w interesie dalszych rozważań, uprzątnijmy sobie w całej rozciągłości rozumowanie, które do tego wyniku prowadzi. Rozumowanie to jest oczywiście następujące: na podstawie przyjętych założeń odcinek a składa się z tylu części równych odcinkowi u , ile wynosi liczba m ; z drugiej znów strony każda z tych m części odcinka a , jako równa odcinkowi u , uważana być może za układ tylu odcinków równych odcinkowi u' , ile wynosi liczba k . Zatem odcinek a uważany być może za zbiór m zbiorów, z których każdy jest zbiorem k odcinków równych u' . Z tego wynika,

że odcinek a jest sumą tylu odcinków równych odcinkowi u' , ile wynosi suma m składników, równych liczbie całkowitej k . Ostatecznie więc odcinek u' zawiera się w odcinku a tyle razy, ile wynosi iloczyn, w którym

mnożnik równa się liczbie m

a

mnożna $n \quad n \quad n \quad k$.

Spostrzegamy obecnie, że pojęcie iloczynu możemy rozszerzyć w ten sposób, iżby ono nie było pozbawione treści jakiegokolwiek byśmy liczby wymierne bezwzględne przyjęli odpowiednio za mnożnik i mnożną, a to, wprowadzając definicyę następującą:

Żeby określić znaczenie, jakie przywiązujemy do wyrażenia iloczynu mnożenia dowolnie przyjętej liczby wymiernej w' , mającej stanowić mnożną, przez jakąkolwiek drugą liczbę wymierną w , mającą stanowić mnożnik, przyjmujemy dowolnie pewien odcinek niezerowy u' i kreślimy najpierw odcinek u , którego miarą, gdy przyjmujemy odcinek u' za jednostkę, jest mnożna w' . Następnie kreślimy odcinek a , którego miarą, gdy przyjmujemy odcinek u za jednostkę, jest mnożnik w i oświadczamy, że mający być określony iloczyn stanowi liczba, która jest miarą odcinka a , przyjmując za jednostkę odcinek u' ; jednocześnie za symbol iloczynu, który określiliśmy, przyjmujemy bez różnicy każdy z symbolów następujących:

$$w' \cdot w \text{ i } w' \times w.$$

Definicja ta prowadzi natychmiast do postawienia sobie następujących pytań:

1°. Czy działanie mnożenia wykonalne jest, jakiegokolwiek liczby wymierne przyjęlibyśmy za mnożnik i mnożną?

2°. Czy iloczyn zależy wyłącznie od mnożnej i mnożnika, nie zaś od odcinka u' rozważanego w definicyi?

3°. Czy, przy oznaczonych mnożnej i mnożniku, iloczyn określony jest jednoznacznie?

4°. Czy w żadnym razie nie może zachodzić sprzeczność pomiędzy omawianą definicyą a definicyą mnożenia, którą przyjmujemy w teorii liczb całkowitych?

Żeby na pytania te odpowiedzieć, zachowujemy bez zmiany wszystkie oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się, układając defi-

nicyę iloczynu dla liczb wymiernych, i zwracamy się najpierw do ogólnego przypadku, kiedy mamy jednocześnie

$$\left. \begin{array}{l} w' \neq 0 \\ w \neq 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

Następnie czynimy uwagę następującą: jeżeli dwie liczby wymierne w_1 i w'_1 sprawdzają równości

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = w \\ w'_1 = w' \end{array} \right\} \quad (21)$$

to, po dokonaniu wyboru odcinka u' , mnożenia, zaznaczone w wyrażeniach:

$$w' \cdot w \text{ i } w'_1 \cdot w_1 \quad (22)$$

mogą być wykonalne lub niewykonalne tylko jednocześnie, a w razie wykonalności prowadzą do równych sobie wyników.

Istotnie, jeżeli wyznaczymy odcinki u i a w sposób, określony w definicji mnożenia liczb wymiernych, i oznaczmy nadto przez u_1 i a_1 odcinki, które otrzymalibyśmy odpowiednio zamiast odcinków u i a , gdybyśmy zastąpili przy konstrukcyi tych odcinków liczbę w' przez liczbę w'_1 , a liczbę w przez liczbę w_1 , to mielibyśmy

$$\left. \begin{array}{l} u = u_1 \\ a = a_1 \end{array} \right\} \quad (23)$$

na podstawie równości (21) i definicji równości dwóch liczb wymiernych. Ze względu zaś na równość (23) odcinki a i a_1 tylko jednocześnie mogą być współmierne lub niewspółmierne z odcinkiem u' , a w razie współmierności, miarami odcinków a i a_1 , jeżeli przyjmiemy za jednostkę odcinek u' , będą dwie równe sobie liczby wymierne v i v_1 .

Ponieważ znów na podstawie definicji mnożenia liczb wymiernych mnożenie zaznaczone w wyrażeniu:

$$w' \cdot w$$

wykonalne jest lub wykonalnem nie jest, stosownie do tego, czy odcinek a jest czy nie jest z odcinkiem u' współmierny, ponieważ dalej, w razie współmierności mamy:

$$v = w' \cdot w,$$

ponieważ nareszcie całkiem analogicznie stwierdzamy, że warunek wykonalności mnożenia, zaznaczonego w wyrażeniu

$$w'_1 \cdot w_1,$$

polega na współmierności odcinków a_1 i u' i że w razie, kiedy warunek ten zachodzi, mamy

$$v_1 = w'_1 \cdot w_1,$$

przeto, ze względu na równość

$$v = v_1,$$

przekonywamy się, że uczyniona uwaga jest najzupełniej uzasadniona.

Ze względu na uzyskany wynik oraz na równość

$$(m, 1) = m,$$

która zachodzi, jakąkolwiek liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez m , możemy, o ile chodzi o trzy pierwsze z zapytań, postawionych wyżej, bez szkody dla ogólności założyć, że liczbą w i w' są liczbami ułamkowymi.

Żeby uwidocznic liczniki i mianowniki tych liczb, przyjmujemy

$$(24) \quad \begin{cases} w = (m, p) \\ w' = (m', p'), \end{cases}$$

zachowując jednocześnie i w dalszym ciągu oznaczenia, któreśmy wprowadzili, ustawiając definicyę mnożenia.

Oznaczmy przez δ taką podwielokrotność odcinka u , żebyśmy mieli

$$u = (m' \cdot p) \cdot \delta.$$

Przyjmując

$$(25) \quad d' = p \cdot \delta$$

$$(26) \quad d = m' \cdot \delta,$$

mamy tedy

$$(27) \quad u = m' \cdot d',$$

oraz

$$(28) \quad u = p \cdot d.$$

Ze względu na drugą z równości (24) i na konstrukcyę odcinka u , wnosimy natychmiast ze związku (27), że mamy

$$u' = p' d'. \quad (29)$$

Ze względu zaś na pierwszą z równości (24) i na konstrukcyę odcinka a , mamy na podstawie równości (28)

$$a = m \cdot d. \quad (30)$$

Z równości (25) i (29) mamy

$$u' = (p \cdot p') \cdot \delta, \quad (31)$$

a z równości (26) i (30)

$$a = (m \cdot m') \delta. \quad (32)$$

Z równości (31) i (32) wynika, że odcinki a i u' są współmierne, a nadto, że miara odcinka a , jeżeli przyjmiemy odcinek u' za jednostkę, jest liczba ułamkowa $(m \cdot m', p \cdot p')$. Mamy więc

$$u' \cdot w = (m', p') \cdot (m, p) = (m' \cdot m, p' \cdot p). \quad (33)$$

Na podstawie uzyskanego wyniku możemy wysłowić twierdzenie następujące:

Jeżeli zachodzą nierówności (20), jeżeli więc w innych wyrazach ani mnożnik, ani mnożna w pewnym iloczynie liczb wymiernych nie równają się zeru, to w takim razie:

1°. *mnożenie jest zawsze wykonalne, a to według pravidła następującego: przedstawwszy mnożną i mnożnik w postaci liczb ułamkowych, wyznaczamy iloczyn liczników i iloczyn mianowników; pierwszy z tych iloczynów stanowi licznik, a drugi mianownik liczby równej iloczynowi, o którego wyznaczenie chodziło.*

2°. *iloczyn zależy wyłącznie od mnożnej i mnożnika, nie zaś od wyboru odcinka oznaczonego w definicyi mnożenia przez u' .*

3°. *iloczyn określony jest jednoznacznie w zależności od mnożnej i mnożnika.*

Dwie pierwsze części twierdzenia tego stanowią oczywiste i natychmiastowe następstwa tego, co wyraża równość (33). Żeby jeszcze przekonać się, że i trzecia część twierdzenia jest uzasadniona, należy tylko uwzględnić, że na podstawie uwagi, uczynionej na wstępie rozważań, które doprowadziły nas do równości (33), iloczyn jest po dokonanym wyborze odcinka u' i o ile mnożenie jest wyko-

nalne, określony jednoznacznie, i zestawić tę okoliczność z drugą częścią twierdzenia.

Uzasadnienie twierdzenia poprzedzającego stanowi oczywiście odpowiedź na każde z trzech pierwszych zapytań, nawiązanych do definicji mnożenia, z tem jednak zastrzeżeniem, że chodzi o iloczyny, w których ani mnożnik ani mnożna nie równają się zeru. Z tem samem zastrzeżeniem wnosimy jeszcze natychmiast z równości (33), opierając się na własności przemienności iloczynu liczb całkowitych, że własność przemienności przysługuje także iloczynowi dwóch jakiegokolwiek liczb wymiernych, czyli w innych wyrazach:

Jeżeli mnożnik pewnego iloczynu równa się mnożnej pewnego drugiego, a mnożna pierwszego — mnożnikowi drugiego, to iloczyny te są sobie równe.

Zwróćmy się obecnie do przypadku, kiedy jedna przynajmniej z nierówności (20) nie zachodzi i, jak poprzednio, zachowajmy oznaczenia, któreśmy wprowadzili, podając definicyę mnożenia. Żeby konstrukcyja odcinka a była możliwa, koniecznem jest i wystarczającym, żeby odcinek u nie był odcinkiem zerowym. Ponieważ zaś odnośny warunek polega oczywiście na nierówności

$$(33) \quad w' \neq 0,$$

przeto, gdy nierówność ta zachodzi, to chociażbyśmy mieli

$$w = 0,$$

możemy podaną definicyę iloczynu

$$w' \cdot w$$

jeszcze zastosować. Ponieważ zaś w tym przypadku odcinek a byłby odcinkiem zerowym, przeto iloczyn, w którym mnożnik równa się zeru, sam równa się także zeru.

W razie, kiedy mnożna równa się zeru, podana wyżej definicya mnożenia traci wszelką treść. Żeby jednak i ten przypadek przez teorię mnożenia objąć i żeby jednocześnie nie wytworzyć przypadku, w którymby iloczyn własności przemienności nie posiadał, uzupełniamy podaną wyżej definicyę, *umawiając się, że wartością iloczynu, w którym mnożna równa się zeru, jest zero*. Czytelnik spostrzeże natychmiast, że po tem uzupełnieniu definicji mnożenia wszystkie w teorii liczb wymiernych poprzednio używane wyniki stają się ważnymi bez żadnych już zastrzeżeń.

Ze względu na własność przemienności iloczynu dwóch liczb wymiernych, obejmujemy mnożnik i mnożną wspólną nazwą czynników.

Żeby zakończyć dyskusję definicji mnożenia liczb wymiernych, pozostaje do odpowiedzenia na ostatnie z czterech zapytań, do tej definicji nawiązanych.

Obawa, czy nie zachodzi sprzeczność pomiędzy definicyą iloczynu dwóch liczb całkowitych, przyjętą w teorii liczb całkowitych, a ogólną definicyą iloczynu dwóch liczb wymiernych, wprowadzoną w ustępie obecnym, usprawiedliwić możemy tem tylko, że ogólna definicya iloczynu dwóch liczb wymiernych mieści w sobie, jako przypadek szczególny, nową definicyę iloczynu liczb całkowitych, która, być może, nie jest równoważna definicyi klasycznej. W rzeczywistości wstępne rozważania, które przywiodły nas do ogólnej definicji mnożenia liczb wymiernych, usuwają już ową wątpliwość. Żeby jednak rzecz zupełnie wyświecić, uważajmy dwie liczby całkowite m i m' . Na podstawie ogólnej definicji iloczynu dwóch liczb wymiernych iloczyn liczb m i m' równa się iloczynowi

$$(m, 1) \cdot (m', 1).$$

Na podstawie zaś wyżej uzasadnionego prawidła iloczyn poprzedzający równa się liczbie ułamkowej

$$(m \cdot m', 1),$$

gdzie symbol

$$m \cdot m'$$

oznacza iloczyn liczb całkowitych m i m' w znaczeniu, określonym przez klasyczną definicyę, przyjętą w teorii liczb całkowitych. Ponieważ zaś, na podstawie jednej z przyjętych definicji, mamy

$$(m \cdot m', 1) = m \cdot m',$$

przeto przekonywamy się, że niepokojąca nas sprzeczność w rzeczywistości nie istnieje.

§ 22. Z teorii mnożenia liczb wymiernych wynika bardzo ważna konsekwencya następująca:

Jeżeli pewien odcinek a współmierny jest z pewnym odcinkiem niezerowym b , który znowuż współmierny jest z pewnym trzecim odcinkiem c , to odcinki a i c są współmierne pomiędzy sobą.

Gdyby odcinek c był odcinkiem zerowym, to słuszność twier-

dzenia byłyby bezpośrednio oczywistą; zakładamy więc, przystępując do dowodzenia, że odcinek c zerowym odcinkiem nie jest. W takim razie na podstawie założeń przyjętych w twierdzeniu, o którego udowodnienie chodzi, miarą odcinka b , w razie przyjęcia odcinka c za jednostkę będzie pewna liczba wymierna w' , a miarą odcinka a , jeżeli przyjmujemy za jednostkę odcinek b będzie pewna druga liczba wymierna w . Na podstawie zaś teorii mnożenia miarą odcinka a , gdy przyjmujemy odcinek c za jednostkę, będzie liczba wymierna równa iloczynowi $w \cdot w'$, skąd wynika, że odcinki a i c są rzeczywiście współmierne.

Przyczyna tego, żeśmy mogli wysnuć dowód twierdzenia poprzedzającego z teorii mnożenia liczb wymiernych, polega oczywiście na tem, że uzasadnianie prawidła mnożenia takich liczb doprowadziło nas do konstrukcyi wspólnej podwielokrotności δ trzech odcinków u' , u i a , opierając się na tem, że każdy z odcinków u' i a współmierny był z odcinkiem u .

Teorya mnożenia liczb wymiernych nie stanowi pierwszego przypadku, w którym zaszła okoliczność poprzedzająca. Napotkaliśmy ją już przedtem dwa razy, a mianowicie: po raz pierwszy przy rozważaniach, które doprowadziły nas do twierdzenia, że związki (12) są odpowiednio równoważne związkom (14), a po raz drugi przy uzasadnianiu prawidła dodawania liczb ułamkowych.

Zatem, w każdym z tych przypadków mieliśmy już sposobność do uzasadnienia twierdzenia wysłowionego na początku niniejszego paragrafu. Nie skorzystaliśmy z tych sposobności, pragnąc uzasadnić wspomniane twierdzenie w tej właśnie chwili, kiedy bylibyśmy przygotowani do uwidocznienia najbardziej bezpośredniego i ważnego jego następstwa.

Celem uproszczenia wyśławiania się wprowadzamy najpierw definicyę następującą: po dokonany wyborze jednostki długości, nazywamy odcinkami wymiernymi odcinki z jednostką współmierne, wszystkim zaś innym odcinkom dajemy nazwę odcinków niewymiernych.

Możemy tedy odpowiedzieć na kwestye poruszone na samym początku paragrafu poprzedzającego, wygłaszając twierdzenie następujące:

Jeżeli zamiast używanej poprzednio jednostki długości u' wprowadzimy nową jednostkę u , to dwa przypadki są możliwe:

1°. *Pierwotna jednostka u' współmierna jest z nową jednostką u ;*

w takim razie oznaczmy przez w' miarę odcinka u' , przyjmując odcinek u za jednostkę.

2°. Pierwotna jednostka u' nie jest współmierna z nową jednostką u .

W pierwszym przypadku zbiór odcinków wymiernych nie ulegnie żadnej zmianie przy zastąpieniu pierwotnej jednostki u' przez nową u , w innych wyrazach każdy odcinek wymierny w razie przyjęcia za jednostkę jednego z odcinków u lub u' pozostanie wymiernym i w razie przyjęcia za jednostkę drugiego; nadto, miary odcinków wymiernych po wprowadzeniu jednostki u równać się będą odpowiednio iloczynom liczby w' przez miary rozważanych odcinków przed wprowadzeniem jednostki u , a więc przy zachowaniu odcinka u' jako jednostki długości.

W drugim przypadku tylko odcinek zerowy pozostanie odcinkiem wymiernym, a każdy odcinek niezerowy, jeżeli jest wymiernym przy przyjęciu jednego z odcinków u lub u' za jednostkę, stanie się po przyjęciu drugiego z tych odcinków za jednostkę odcinkiem niewymiernym.

Twierdzenie poprzedzające jest natychmiastowem następstwem teoryi mnożenia liczb wymiernych i twierdzenia uzasadnionego w pierwszej części obecnego paragrafu.