

I. Uwagi wstępne natury filozoficznej.

§ 1. Kto dzięki dłuższym studyom nie miał sposobności oswoić się z matematyką, ten przy zetknięciu się z tą gałęzią wiedzy odczuwa zazwyczaj wrażenia, które najlepiej mógłby wyrazić w postaci sądów następujących: matematyka przepełniona jest subtelnościami, które przed zdrowym rozsądkiem żadnego usprawiedliwienia nie znajdują; subtelności te bez żadnej potrzeby utrudniają poznanie tego, co w matematyce ma istotne znaczenie naukowe; one pozbawiają matematykę charakteru poważnej nauki, przemieniając ją w rodzaj łamigłówki bez głębszego znaczenia; wspomniane subtelności tak dalece zaciemniają stosunek matematyki do przyrody, że stosunek ten jest prawie niedostrzegalny; ostatecznie, podobnie do pierwszej lepszej gry, w osnowie matematyki znajduje się cały kompleks, nie wiadomo skąd i dlaczego przyjętych umów, a umiejętność matematyki polega, jak w każdej grze, na ścisłym stosowaniu się do tych umów, które od reguł gier wyróżniają się tem, że są bardzo trudne do zrozumienia.

O tem, że matematyka często bywa przedmiotem podobnych sądów, przekonać się możemy nie tylko na podstawie doświadczenia pedagogów, ale także na podstawie faktów z historyi myśli ludzkiej. Jeden z takich faktów, należący do najbardziej charakterystycznych, stanowią sądy o matematyce, wygłoszone przez Göthego i jego stronników, przy sposobności sporu o prawdziwe zasady optyki.

Scharakteryzowane przed chwilą, a bardzo niekorzystne wrażenia, wywierane zazwyczaj przez matematykę przy pierwszym zetknięciu się z nią, oczywiście bardzo utrudniają pierwsze kroki na drodze bliższego obeznania się z tą nauką. Z tej przyczyny poświęcamy obecny rozdział rozważaniom, które mają na celu uchronienie czytelnika od takich wrażeń.

§ 2. Przedewszystkiem zastanówmy się nad procesem wytwarzania się i rozwijania pojęć i teorii matematycznych. W tym względzie historia nauk ścisłych poucza nas, że każdy istotnie nowy element wszedł do matematyki nie inaczej jak tylko przy sposobności rozwiązywania pewnych problematów, najczęściej z dziedziny astronomii lub fizyki, napotkanych przy badaniu przyrody. Dowiadujemy się jednocześnie, że pierwotna postać, w której nowe pojęcia i teorie przyroda matematyce podsuwa, nie utrzymuje się zazwyczaj w nauce. Nowa myśl, podsunęta matematykom przez przyrodę, staje się zaczątkiem szeregu rozważań natury spekulacyjnej, które rozszerzają i przekształcają ją tak dalece, że wynikiem tych rozważań staje się teoria, w której ślady jej pochodzenia całkiem są zatarte.

Jakież są przyczyny takiego przekształcania sztucznego myśli podsuniętych nam przez przyrodę?

§ 3. Przyczyny, o które chodzi, możemy podzielić na dwie klasy: jedne z nich wynikają ze stosunku matematyki do przyrody a drugie tkwią w samej matematyce.

Zwracając się do tej kategorii problematów, stawianych nam przez przyrodę, w których mamy sposobność stosowania matematyki, a których najbogatszy zbiór znajdujemy w fizyce, spostrzegamy natychmiast, że często najróżnorodniejsze zagadnienia okazują, o ile chodzi o ich matematyczną stronę, nie tylko bardzo wielką analogię, lecz nawet najzupełniejszą tożsamość. W takich problematach napotykamy takie same wzory i tylko znaczenie symbolów w tych wzorach ulega zmianie przy przejściu od jednego problemu do drugiego. Żeby podać choć jeden bardzo elementarny przykład tego stanu rzeczy, uważajmy z jednej strony zjawisko rozszerzania się ciała stałego przy ogrzewaniu, a z drugiej przemieszczanie się prostolinijne i jednostajne punktu. Jeżeli założymy, co często zgadza się w przybliżeniu z rzeczywistością, że rozważane ciało stałe rozszerza się jednostajnie, to na zmianę długości d sztaby, której długość przy temperaturze zero byłaby równa jednostce, uzyskamy wzór:

$$(1) \quad d = v (t_2 - t_1)$$

oznaczając przez v współczynnik rozszerzalności, a przez t_1 i t_2 początkową i końcową temperaturę sztaby. Jeżeli zaś oznaczymy przez v prędkość poruszającego się punktu a przez d długość, którą

przebiega ten punkt w czasie upływającym od pewnej chwili t_1 do pewnej chwili t_2 , to i w takim razie zachodzić będzie równość (1).

Gdybyśmy zastanowili się bliżej nad pojęciem współczynnika rozszerzalności z jednej strony a nad pojęciem prędkości punktu z drugiej, to przekonalibyśmy się, że natura matematyczna tych pojęć jest najzupełniej ta sama. Stwierdzilibyśmy nawet, że ta tożsamość zachowuje się nawet wtedy, gdy opuszczamy założenia o jednostajności rozszerzalności i o jednostajności ruchu.

Ponieważ uwidocznienie wspólnych elementów w rzeczach skądinąd od siebie odmiennych należy do najistotniejszych zadań nauki, przeto w szczególności stwierdzenie tożsamości lub pokrewieństwa pod względem matematycznym, poza tem odmiennych od siebie problematów, ma niezawodnie doniosłe znaczenie naukowe.

Spostrzeganie takich tożsamości i analogii w takim razie tylko będzie możliwe, jeżeli nauczymy się ujmować matematyczną stronę problematów przyrodniczych w postaciach czysto matematycznych czyli takich, do których nie wchodziłaby żadna niematematyczna właściwość tych problematów. Ponieważ zaś w przyrodzie matematyczne stosunki tylko w połączeniu z wieloma rodzajami innych stosunków napotkane być mogą, przeto przy pierwszym napotkaniu pewnego nowego matematycznego pojęcia w przyrodzie, nie poznajemy tego pojęcia w postaci czystej i musimy dlatego wykonać pracę oderwania go od elementów do matematyki nie należących. Na tem jednak nie kończą się te zmiany pojęć matematycznej natury, które spowodowane są stosunkiem matematyki do przyrody. Często się zdarza, że zetknięcie się z nowymi problematami w przyrodzie, nie wzbogaca matematyki elementami rdzennie nowymi, ale poucza nas o potrzebie wprowadzenia pewnych zmian, najczęściej pewnego rozszerzenia już poprzednio nabytych pojęć i teorii.

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia, dlaczego znajdujemy w samej matematyce powody do przekształcania pojęć i teorii, które stanowią jej treść. W tym celu należy podnieść przedewszystkiem:

1) Że pomiędzy pojęciami matematycznymi istnieje pewna niewielka liczba pojęć zasadniczych, z których wszystkie inne pojęcia matematyczne mogą być wysnute drogą stosownych definicji i mają z tej przyczyny postać tworców umysłowych.

2) Że wzajemne stosunki pojęć matematycznych możemy uzasadnić drogą rozumowania, przyjmując bez dowodu tylko pewną niewielką liczbę tych stosunków, które stanowią tak zwane aksjomaty.

Ten stan rzeczy wyrażamy krótko, oświadczając, że matematyka jest nauką *dedukcyjną*.

Dzięki charakterowi dedukcyjnemu matematyki, twierdzenia tej nauki odznaczają się wyjątkowym stopniem pewności i mogą być przez umysł daleko łatwiej objęte, aniżeli by to nastąpić mogło, gdyby te twierdzenia nie były tak ściśle ze sobą logicznie powiązane. Stopień, w jakim matematyka, albo nawet wogóle jakikolwiek kompleks pojęć logicznie ze sobą powiązanych, te zalety posiadać będzie, zależy w pierwszym rzędzie od sposobu mniej lub więcej odpowiedniego, w którym uważane pojęcia będą ze sobą logicznie powiązane, albowiem jakkolwiekbyśmy naukę dedukcyjną rozważali, przekonywamy się, że nie zmieniając zasadniczo jej treści, możemy przedstawić logiczny związek twierdzeń, na którym ona polega, we wielu odmiennych od siebie postaciach, które będą mniej lub więcej przejrzyste jedne od drugich. Otóż w miarę rozwijania się matematyki nie tylko poznajemy coraz to nowe pojęcia i teorie, ale często przekonywamy się, że ustrój dawniejszych teorii w interesie największej przejrzystości całej nauki i największej łatwości objęcia jej całokształtu, musi ulegz daleko idącym zmianom, co znowu nie daje się wykonać bez wprowadzenia pewnych pojęć pomocniczych i bez pewnych zmian w pojęciach istniejących.

§ 4. Jeżeli zważymy, że matematyka rozwijała się przez długi szereg wieków zanim doszła do swojego obecnego stanu, to na podstawie wyjaśnień, podanych w dwóch ustępach poprzedzających, niechybnie dojdziemy do przekonania, że pojęcia matematyczne muszą bardzo być odległe od tych pojęć, które nabywamy przy bezpośrednim obcowaniu z przyrodą.

Tłumaczymy sobie jednocześnie dlaczego przystępując bezpośrednio do studyowania matematyki współczesnej, a nie posiadając tych przynajmniej bardzo ogólnikowych i niewyczerpujących wiadomości o rozwoju matematyki, które zostały podane w ustępach poprzedzających, niepodobieństwem jest nie odczuwać tych wrażeń, które scharakteryzowaliśmy w ustępie 1-szym. Przekonywamy się także, że kto ogólnikowe pojęcie o procesie rozwoju matematyki posiada, ten zapewne powstrzyma się od sądów przytoczonych w ustępie 1-szym, ale usiłując obeznać się bezpośrednio z matematyką współczesną, wielkie będzie miał trudności do zwalczania i przez długi czas mimowolnie uważać będzie musiał matematykę za twór bardzo nienaturalny.

Na podstawie powyższych rozważań mimowolnie nasuwa się wniosek następujący: tylko historyczna metoda wykładu matematyki mogłaby naukę tę przedstawić w postaci łatwo dostępnej. Niestety, wniosek ten nie wytrzymuje ściślejszej krytyki. Droga historyczna byłaby tak bardzo długa, że ostatecznie, posuwając się po niej, włożylibyśmy bez porównania więcej pracy, aniżeli posługując się drogami, po których przemieszczanie się jest znacznie trudniejsze, ale które zato nie zrównanie są krótsze. Zapewne możemy w przypadkach wyjątkowych zejść na krótki czas na drogę historyczną; znacznie częściej będziemy mogli z pożytkiem zaznaczyć główne stadya, przez które przechodziło podczas swojego rozwoju jedno lub drugie pojęcie podstawowe, ale chodzi mi o to, żeby wyraźnie podnieść, iż konsekwentne trzymanie się tak pełnej powabu metody historycznej jest rzeczą bezwarunkowo niemożliwą. Czytelnik musi pogodzić się z faktem leżącym w samej naturze matematyki, a polegającym na tem, że proces obeznavania się z tą nauką porównany być może raczej z drapaniem się na stromą górę po kamienistej i przepaścistej ścieżce, aniżeli z podróżą po pocztowym trakcie.
