

§ 170. I. *Twierdzenia grupy (G_2) są jedne od drugich i od jedyne go twierdzenia, należącego do grupy (G_1) , niezależne.*

Istotnie, przyjmijmy chwilowo, że wyraz „liczba“ oznacza to, czemu zwykle dajemy nazwę „liczba całkowita bezwzględna“, ale, zmieniając znaczenie, jakie w zastosowaniu do dwóch liczb całkowitych bezwzględnych a i b ma równość

$$(1) \quad a = b,$$

umówmy się, że ten układ symbolów wyraża to, co wyrażamy w symbolistyce zwykłej przez układ symbolów

$$a \leq b.$$

W takim razie twierdzenia $(1, G_1)$ i $(3, G_2)$ będą zachodzić, ale twierdzenie $(2, G_2)$ oczywiście zachodzić nie będzie. Zatem twierdzenie to jest niezależne od twierdzeń $(1, G_1)$ i $(3, G_2)$.

Zachowując i nadal nadane dopiero co znaczenie wyrazowi „liczba“, przyjmijmy inną definicyę równości dwóch liczb całkowitych bezwzględnych: umówmy się, że równość (1) wyraża to, co w zwykłej terminologii wyrażamy przez zdanie następujące: Liczby a i b są albo równe pomiędzy sobą, albo większa z tych liczb różni się od drugiej o jedność. W takim razie twierdzenia $(1, G_1)$ i $(2, G_2)$ będą oczywiście zachodzić, ale twierdzenie $(3, G_2)$ zachodzić nie będzie, skąd wynika, że ono jest od twierdzeń $(1, G_1)$ i $(2, G_2)$ niezależne.

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

U w a g a. W pierwszej chwili może się wydać, że twierdzenie $(1, G_1)$ jest następstwem logicznem twierdzeń $(2, G_2)$ i $(3, G_2)$, a to na podstawie rozumowania następującego: Oznaczmy przez a jakąkolwiek liczbę, a przez b taką liczbę, żeby zachodził związek

$$(2) \quad a = b.$$

Ze względu na tw. $(2, G_2)$ równość (2) pociąga za sobą równość

$$(3) \quad b = a,$$

a na podstawie tw. $(3, G_2)$ równości (2) i (3) pociągają za sobą równość

$$a = a,$$

skąd wynika, że twierdzenie $(1, G_1)$ jest rzeczywiście następstwem twierdzeń $(2, G_1)$ i $(3, G_2)$.

Otóż w tem rozumowaniu przyjęto mileząco, iż zachodzi twierdzenie następujące: *Jakąkolwiek liczbę oznaczylibyśmy przez a , zawsze istnieje jedna przynajmniej taka liczba, żeby zachodził związek (2).* Zatem powyższe rozumowanie nie jest poprawne; spostrzegamy nadto, że twierdzenie $(1, G_1)$, albo jakiegokolwiek inne twierdzenie, wykluczające przypadek, w którymby żadnej liczbie nie odpowiadała liczba jej równa, stanowi konieczny warunek, ażeby twierdzenia $(2, G_2)$ i $(3, G_2)$ nie były pozbawione treści.

Spostrzegamy z łatwością, że zachodzi twierdzenie następujące:

II. *Jedynie twierdzenie, należące do grupy (G_3) , czyli twierdzenie $(4, G_3)$, jest niezależne od twierdzeń grup (G_1) i (G_2) , a każde z twierdzeń grupy (G_4) jest niezależne od twierdzeń pozostałych tejże grupy i grup (G_1) , (G_2) i (G_3) .*

Przechodzimy teraz do twierdzenia następującego:

III. *Każde twierdzenie grupy (G_5) jest niezależne od twierdzeń pozostałych w tejże grupie i twierdzenie grup (G_1) , (G_2) , (G_3) i (G_4) .*

Żeby twierdzenie to uzasadnić, należy wziąć pod uwagę kolejno każde z twierdzeń

$$(7, G_5), (8, G_5), (9, G_5) \text{ i } (10, G_5),$$

które razem stanowią grupę (G_5) .

Przyjmijmy, że wyraz „liczba“ oznacza to, co zwykle nazywamy „liczba ułamkowa bezwzględna“ z tą jedyną odmianą, że zamiast zwykłej definicyi dodawania liczb ułamkowych została przyjęta definicya inna. Najpierw określmy dodawanie w sposób następujący: Wynikiem dodania do oznaczonej liczby ułamkowej

$$\frac{m}{p}$$

drugiej liczby ułamkowej

$$\frac{m'}{p'}$$

jest, z wyłączeniem każdej innej, ta liczba ułamkowa

$$\frac{u}{v},$$

której licznik u i mianownik v są liczbami całkowitemi o wartościach następujących

$$\begin{aligned} u &= m \cdot p' + m' \cdot p \\ v &= p \cdot p'. \end{aligned}$$

W takim razie zachodzić będą wszystkie twierdzenia grup

$$(G_k), \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

prócz tylko twierdzenia $(7, G_5)$. Zatem twierdzenie to jest niezależne od wszystkich innych twierdzeń pięciu pierwszych z grup (G_k) .

Zamiast powyższej definicyi dodawania liczb ułamkowych przyjmijmy teraz definicyę następującą:

Wynikiem dodania do oznaczonej liczby ułamkowej $\frac{m}{p}$ jakiegokolwiek drugiej liczby ułamkowej $\frac{m'}{p'}$ jest każda liczba ułamkowa równa liczbie ułamkowej

$$\frac{m + m'}{p + p'}.$$

Po przyjęciu tej definicyi jedyne z twierdzeń, należących do pięciu pierwszych z grup (G_k) , które zachodzić nie będzie, jest oczywiście tw. $(8, G_5)$, skąd wynika, że to twierdzenie jest niezależne od wszystkich innych twierdzeń pięciu pierwszych z grup (G_k) .

Żeby dowieść, iż każde z twierdzeń $(9, G_5)$ i $(10, G_5)$ niezależne jest od wszystkich innych twierdzeń, należących do pięciu pierwszych z grup (G_k) , należy tylko zważyć, iż moglibyśmy zwykłą definicyę mnożenia liczb ułamkowych przyjąć za definicyę dodawania, a na mnożenie przyjąć raz jedną, drugi raz drugą z tych definicyi, które dopiero co przyjmowaliśmy kolejno za definicyę dodawania liczb ułamkowych. Postępując w taki sposób, urzeczywistnilibyśmy kolejno przypadki, w których zachodziłyby wszystkie twierdzenia grup (G_k) , $(k = 1, 2, 3, 4)$, ale jedno tylko z twierdzeń $(9, G_5)$ i $(10, G_5)$, a o to tylko jeszcze chodziło.

IV. *Każde twierdzenie grupy (G_6) jest niezależne od innych twierdzeń tejże grupy i od twierdzeń grup*

$$(G_k), \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Przystępując do uzasadnienia tego twierdzenia, oznaczmy przez $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ dwie jakiegokolwiek funkcyę zmiennych rzeczywistych x i y , byle takie, żeby każdemu układowi wartości na te zmienne odpowiadała dokładnie jedna wartość funkcyi $f(x, y)$ i jedna wartość funkcyi $\varphi(x, y)$. Jeżeli tedy, zmieniając zwykłą terminologię teoryi liczb rzeczywistych, umówimy się, że funkcyja $f(x, y)$ przedstawia wynik dodania liczby y do liczby x , a funkcyja

$\varphi(x, y)$ iloczyn, w którym mnożna i mnożnik równają się odpowiednio liczbom x i y , to wszystkie twierdzenia pięciu pierwszych grup (G_k) oczywiście zachodzić będą, bylebyśmy przez wyraz „liczba“ rozumieli to, co oznaczałby wyraz „liczba rzeczywista“ według przyjętej dopiero co umowy. Zatem, żeby uzasadnić twierdzenie, o które chodzi, należy tylko dowieść, że funkcje $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ mogą być tak dobrane, iżby prócz jednej dowolnie naprzód wskazanej równości z układu następującego

$$\left. \begin{aligned} f(a, f(b, c)) &= f(f(a, b), c) \\ f(a, b) &= f(b, a) \\ \varphi(a, f(b, c)) &= f(\varphi(a, b), \varphi(a, c)), \\ \varphi(f(b, c), a) &= f(\varphi(b, a), \varphi(c, a)), \\ \varphi(a, \varphi(b, c)) &= \varphi(\varphi(a, b), c), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wszystkie inne z tych równości zachodziły, jakiekolwiek liczby rzeczywiste oznaczylibyśmy przez a , b i c .

Otóż, jeżeli za definicje funkcji $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ przyjmiemy równania

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a \cdot (x + y) \\ \varphi(x, y) &= x \cdot y^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie a oznacza liczbę rzeczywistą, dowolnie wybraną, byle nie równą ani zeru, ani jedności (np. $a=2$), to prócz pierwszej z równości (1) wszystkie inne zachodzić będą tożsamościowo.

Określimy teraz funkcję $f(x, y)$ równaniem

$$f(x, y) = y,$$

a funkcję $\varphi(x, y)$, jak wyżej, a więc równaniem

$$\varphi(x, y) = x \cdot y$$

W takim razie druga równość układu (1) nie będzie zachodzić tożsamościowo, ale wszystkie równości pozostałe staną się tożsamościami.

Jeżeli określimy funkcje $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ równościami

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y \\ \varphi(x, y) &= x, \end{aligned}$$

to jedyna równość układu (1), która tożsamością nie będzie, będzie równość trzecia.

¹⁾ Wyrażenie $a(x+y)$ i $x \cdot y$ mają tu oczywiście zwykłe znaczenie.

Gdybyśmy zaś, zachowując powyższe określenie funkcji $f(x, y)$, określili funkcję $\varphi(x, y)$ przez równanie

$$\varphi(x, y) = y,$$

to jedyną równością układu (1), tożsamością nie będącą, byłaby równość 4-ta.

Żeby nareszcie przekonać się, że funkcje $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ tak mogą być określone, żeby jedyną równością układu (1), tożsamościowo nie zachodzącą, była równość 5-ta, wystarczy określić funkcje $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ przez równości następujące:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ \varphi(x, y) &= x \cdot y^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

V. *Jedynę twierdzenie, należące do grupy (G_7) , jest niezależne od twierdzeń grup.*

$$(1) \quad (G_k), \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z uwagi następującej: jeżeli przez wyrażenie „liczba” rozumieć będziemy to samo, co przez wyrażenie „kwaternion”, to twierdzenie $(16, G_7)$ zachodzić nie będzie, ale wszystkie twierdzenia należące do grup (1), będą słuszne.

VI. *Twierdzenie $(17, G_8)$ jest niezależne od drugiego twierdzenia grupy (G_8) , czyli twierdzenia $(18, G_8)$ i od twierdzeń grup*

$$(1) \quad (G_k), \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

a twierdzenie $(18, G_8)$ jest następstwem twierdzenia $(17, G_8)$ i pewnych twierdzeń grup (1), a mianowicie twierdzeń

$$(2) \quad (1, G_1), (2, G_2), (3, G_2), (5, G_4), (7, G_5), (8, G_5) \text{ i } (11, G_6).$$

To, że twierdzenie $(17, G_8)$ jest niezależne od tw. $(18, G_8)$ i od twierdzeń grup (1), wynika bezpośrednio z uwagi, że jeżeli przez wyraz „liczba” rozumieć będziemy rzecz, którą zwykle nazywamy „liczbą bezwzględną”, to twierdzenie $(17, G_8)$ zachodzić nie będzie, a twierdzenie $(18, G_8)$ i wszystkie twierdzenia grup (1) będą słuszne.

Pozostaje do udowodnienia, że twierdzenie $(18, G_8)$ jest następstwem twierdzenia $(17, G_8)$ i twierdzeń (2).

Otóż na podstawie twierdzenia $(17, G_8)$ odpowiada każdej liczbie a pewna liczba u , sprawdzająca równanie

$$a + u = a, \quad (3)$$

a każdej liczbie b pewna liczba v , sprawdzająca równanie

$$v + b = b \quad (4)$$

Opierając się ponownie na twierdzeniu $(17, G_8)$ stwierdzamy istnienie takich liczb a' i b' , które sprawdzają odpowiednio równania następujące:

$$a = a' + v \quad (5)$$

$$b = u + b'. \quad (6)$$

Ze względu na (5), równanie (3) przyjmuje postać następującą:

$$(a' + v) + u = a' + v,$$

a na podstawie twierdzenia $(11, G_6)$ uzyskane równanie równoważne jest następującemu:

$$a' + (v + u) = a' + v. \quad (7)$$

Ale z jednej strony, na podstawie twierdzenia $(17, G_8)$ istnieje jedna tylko wartość na x , przy której mamy

$$a' + x = a' + v,$$

a z drugiej strony równanie to zachodzić będzie zarówno przy wartości

$$x = v.$$

na x , jak i (ze względu na (7)) przy wartości

$$x = v + u$$

Mamy więc

$$v = v + u. \quad (8)$$

Zważmy teraz, że, ze względu (6), z równania (4) wynika równość

$$v + (u + b') = u + b',$$

która na podstawie twierdzenia $(11, G_6)$ równoważna jest następującej:

$$(v + u) + b' = u + b'. \quad (9)$$

Ponieważ zaś, ze względu na twierdzenie $(17, G_8)$, istnieje dokładnie jedna wartość na x , przy której mamy

$$x + b' = u + b', \quad (10)$$

ponieważ z drugiej strony z równania (9) wynika, że równanie (10) zachodzi nie tylko przy

$$x = u,$$

ale i przy

$$x = v + u,$$

przeto mamy

$$(11) \quad u = v + u.$$

Z równości (8) i (11) wynika równość

$$(12) \quad u = v.$$

Ponieważ udowodniliśmy, że równość (12) zachodzi bez względu na wartości liczb a i b , ponieważ z drugiej strony wartość liczby u zależy może jedynie od wartości liczby a , a wartość liczby v — jedynie od wartości liczby b , przeto wspólna wartość liczb u i v nie zależy od żadnej z liczb a i b i równa się pewnej liczbie stałej μ . Innymi słowy: istnieje pewna taka liczba μ , iż równanie

$$x = \mu$$

równoważne jest każdemu z równań

$$a + x = a$$

i

$$x + a = a.$$

Zatem twierdzenie (18, G_8) jest rzeczywiście następstwem twierdzenia (17, G_8) i twierdzeń (2), a o to tylko jeszcze chodziło.

U w a g a. Przy rozwijaniu dowodu poprzedzającego powoływaliśmy się wyraźnie tylko na twierdzenie (17, G_8) i na twierdzenie (11, G_8) z pośród twierdzeń (2). Uczyniliśmy to tylko w tym celu żeby zbytecznie dowodu nie obciążać, ale czytelnik z łatwością stwierdzi, co następuje:

1°. W rzeczywistości opieraliśmy się przy powyższym dowodzie na każdym z twierdzeń (2).

2°. Przy tym dowodzie opieraliśmy się, jak tego wymagała poprawność dowodu, wyłącznie na twierdzeniu (17, G_8) i na twierdzeniach (2).

VII. *Twierdzenie (19, G_9) jest niezależne od drugiego twierdzenia (20, G_9), grupy (G_9) i od twierdzeń grup*

$$(1) \quad (G_k), \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

twierdzenie zaś $(20, G_9)$ jest następstwem twierdzenia $(19, G_9)$ i twierdzeń

$$(18, G_8), (15, G_6), (14, G_6) \text{ i } (13, G_6), \quad (2)$$

oraz twierdzeń grup

$$(G_k). \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (3)$$

O tem, że twierdzenie $(19, G_9)$ jest niezależne od twierdzenia $(20, G_9)$ i od twierdzeń (1) przekonywamy się z największą łatwością, zważywszy, że twierdzenie $(20, G_9)$ i twierdzenia (1) rzeczywiście zachodzić będą, a twierdzenie $(19, G_9)$ zachodzić nie będzie, jeżeli pod wyrazem „liczba“ rozumieć będziemy to, co oznaczamy zwykle przez wyrażenie „liczba rzeczywista całkowita“.

Żeby zaś dowieść, iż twierdzenie $(20, G_9)$ jest następstwem twierdzenia $(19, G_9)$ oraz twierdzeń (2) i (3), przedstawimy rozumowanie bardzo zbliżone do tego, które posłużyło nam do uzasadnienia drugiej części tw. VI-go, ale najpierw udowodnimy twierdzenie przygotowane następujące:

A) Jeżeli jeden przynajmniej z czynników iloczynu dwóch liczb równa się modułowi dodawania μ , to sam iloczyn równa się także modułowi dodawania μ^1 .

Istotnie, oznaczmy przez a i b dwie jakiekolwiek liczby i przyjmijmy

$$\left. \begin{aligned} p &= a \cdot b \\ q &= a \cdot \mu \\ p' &= b \cdot a \\ q' &= \mu \cdot a. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Na podstawie twierdzeń $(13, G_6)$ i $(14, G_6)$ mamy

$$\left. \begin{aligned} p + q &= a \cdot (b + \mu) \\ p' + q' &= (b + \mu) \cdot a, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

a ponieważ z definicyi modułu dodawania wynika bezpośrednio, że mamy

$$b + \mu = b,$$

przeto, z równości (4) i (5), mamy

$$\left. \begin{aligned} p + q &= p \\ p' + q' &= p'. \end{aligned} \right\}$$

¹⁾ Wprowadzając moduł dodawania, powołujemy się tem samem na tw. $(18, G_8)$, które nie zostało wymienione pośród twierdzeń (T), z których mamy wyprowadzić tw. $(20, G_9)$. Ponieważ jednak twierdzenie to (ze względu na tw. VI należy do następstw twierdzeń (T), przeto mamy prawo opierać się na niem.

Uwzględniając powtórnie definicyę modułu dodawania, wnosiśmy z tych równości, że mamy

$$q = q' = \mu,$$

Równości te wyrażają właśnie twierdzenie pomocnicze, które chcieliśmy uzasadnić.

Na podstawie twierdzenia $(19, G_9)$ odpowiadać będą dowolnie przyjętym, byle od modułu dodawania odmiennym liczbom a i b odpowiednio pewne takie liczby ξ i η , które sprawdzać będą równania

$$(6) \quad \begin{cases} a \cdot \xi = a \\ \eta \cdot b = b. \end{cases}$$

Ze względu na twierdzenie pomocnicze A i na to, że każda z liczb a i b jest od modułu dodawania odmienna, żadna z liczb ξ i η nie może równać się modułowi dodawania. Zatem na podstawie twierdzenia $(19, G_9)$, istnieć będą dwie takie liczby a' i b' , żebyśmy mieli

$$(7) \quad \begin{cases} a = a' \cdot \eta \\ b = \xi \cdot b'. \end{cases}$$

Ponieważ zaś mamy

$$(8) \quad \begin{cases} a \neq \mu \\ b \neq \mu, \end{cases}$$

przeto, ze względu na twierdzenie pomocnicze A , mieć będziemy

$$(9) \quad \begin{cases} a' \neq \mu \\ b' \neq \mu. \end{cases}$$

Opierając się na twierdzeniu $(15, G_6)$, wyprowadzamy łatwo z równości (6) i (7) równości następujące:

$$(10) \quad \begin{cases} a' \cdot (\eta \cdot \xi) = (a' \cdot \eta) \cdot \xi = a \cdot \xi = a \\ (\eta \cdot \xi) \cdot b' = \eta \cdot (\xi \cdot b') = \eta \cdot b = b. \end{cases}$$

Z równości (7) i (10) wypływają wnioski następujące:

1°. Liczba x sprawdzać będzie równość

$$(11) \quad a' \cdot x = a,$$

jeżeli tylko przyjmiemy na nią wartość równą którejkolwiek z liczb

$$\eta \text{ i } \eta \cdot \xi.$$

2^o. Liczba y sprawdzać będzie równanie

$$y \cdot b' = b. \quad (12)$$

jeżeli tylko przyjmiemy na nią wartość równą którejkolwiek z liczb

$$\xi \text{ i } \eta \cdot \xi.$$

Zważywszy, iż, ze względu na nierówności (9), z twierdzenia (19, G_9) wynika, że istnieje jedna tylko wartość, przy której x sprawdza równanie (11) i jedna tylko wartość, przy której y sprawdza równość (12), wnosimy natychmiast z obu uwag, uczynionych dopiero co, że mamy

$$\begin{aligned} \eta &= \eta \cdot \xi \\ \xi &= \eta \cdot \xi, \end{aligned}$$

skąd

$$\xi = \eta. \quad (13)$$

Ponieważ z równań (6), określających liczby ξ i η , wynika, że liczba ξ zależy może tylko od liczby a , a liczba η — tylko od liczby b , przeto w następstwie równości (13) wspólna wartość liczb ξ i η jest w rzeczywistości niezależna od liczb a i b i równa się pewnej liczbie stałej m . Zatem, żeby którakolwiek z równości

$$a \cdot x = a \quad (14)$$

lub

$$x \cdot a = a \quad (15)$$

zachodziła bez względu na wartość liczby a , koniecznem jest, żebyśmy mieli

$$x = m. \quad (16)$$

Warunek ten wystarcza: jeżeli bowiem liczba a jest od modułu dodawania odmienna, to na podstawie uzyskanych już wyników, równość (16) pociąga za sobą każdą z równości (14) i (15), jeżeli zaś liczba a równa się modułowi dodawania, to ze względu na twierdzenie przygotowawcze A każda z równości (14) i (15) zachodzi przy każdej, a więc i przy wartości równej m liczby x .

Ostatecznie dowiedliśmy, że twierdzenie (20, G_9) rzeczywiście należy do następstw twierdzenia (19, G_9) oraz twierdzeń (2) i (3), a to tylko pozostawało jeszcze do udowodnienia.

VIII. Dwa ostatnie twierdzenia grupy (G_{10}) należą do następstw logicznych trzech twierdzeń pozostałych oraz twierdzeń grup (G_1), (G_2)

i (G_3). Natomiast każde z trzech pierwszych twierdzeń grupy (G_{10}), a więc każde z twierdzeń

$$(1) \quad (21, G_{10}), \quad (22, G_{10}) \quad \text{ i } \quad (23, G_{10})$$

jest niezależne od dwóch pozostałych i od twierdzeń grup

$$(2) \quad (G_k). \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

Ta okoliczność, że dwa ostatnie twierdzenia grupy (G_{10}), a więc twierdzenia ($24, G_{10}$) i ($25, G_{10}$) należą do koniecznych następstw twierdzeń (1) i twierdzeń grup (G_1) i (G_2) jest tylko szczególnym przypadkiem uwagi, uzasadnionej już na str. 14. Zatem pozostaje tylko do udowodnienia, że każde z twierdzeń (1) jest niezależne od dwóch pozostałych i od twierdzeń grup (1). W tym celu umówmy się, że wyraz „liczba“ oznaczać ma to, co zwykle nazywamy „liczbą rzeczywistą“ z tą tylko odmianą, że każdemu ze zdań symbolicznych

$$(3) \quad a < b$$

i

$$(4) \quad a > b,$$

gdzie a i b oznaczają dwie liczby rzeczywiste, nadane zostanie odpowiednie od zwykłego znaczenie.

Najpierw umówmy się, że związki (3) i (4) wyrażają to, co przy zwykłym znaczeniu symbolów wyrażałyby odpowiednio związki

$$a \leq b \quad \text{ i } \quad a \geq b.$$

W takim razie wszystkie twierdzenia grup (2) zachodziłyby, a nadto zachodziłyby jeszcze twierdzenia ($22, G_{10}$) i ($23, G_{10}$); natomiast twierdzenie ($21, G_{10}$) oczywiście nie zachodziłoby, gdyż związki (3) i (4) niekoniecznie wykluczałyby się wzajemnie.

Zatem twierdzenie ($21, G_{10}$) jest niezależne od dwóch pozostałych z pośród twierdzeń (1) i od twierdzeń grup (2).

Nadajmy teraz inne znaczenie związkom (3) i (4); umówmy się, że związek (3) wyraża, iż różnica

$$b - a$$

równa się liczbie wymiernej, która w zwykłym znaczeniu jest od zera większa, umówmy się nadto, że związek (4) wyraża, że nie zachodzi ani związek (3), ani związek

$$a = b.$$

Przy takim pojmowaniu związków (3) i (4) twierdzenie $(22, G_{10})$ oczywiście zachodzić nie będzie, ale twierdzenia $(21, G_{10})$ i $(23, G_{10})$ zachodzić będą, zarówno jak i wszystkie twierdzenia grup (2). Zatem twierdzenie $(22, G_{10})$ jest niezależne od twierdzeń $(21, G_{10})$, $(22, G_{10})$ i od wszystkich twierdzeń grup (2).

Przyjmijmy nareszcie umowę następującą: jeżeli wartość bezwzględna różnicy

$$b - a$$

jest w zwykłym znaczeniu od jedności mniejsza, to związki zachowują zwykle znaczenie, jeżeli zaś ta okoliczność nie zachodzi, to związek (3) wyraża to, co zwyczajnie wyrażamy przez związek (4), a związek (4) — to, co zwyczajnie wyrażamy przez związek (3).

Po przyjęciu tej umowy twierdzenia $(21, G_{10})$ i $(22, G_{10})$ oraz wszystkie twierdzenia grup (2) będą zachodzić, ale twierdzenie $(23, G_{10})$ zachodzić nie będzie. Stąd wynika, że twierdzenie to jest niezależne od dwóch pozostałych twierdzeń (1) i od twierdzeń grup (2).

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

IX. *Każde z obu twierdzeń grupy (G_{11}) jest niezależne od drugiego i od wszystkich twierdzeń grup*

$$(G_k). \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \quad (1)$$

Istotnie, umówmy się, że wyraz „liczba“ oznacza to, co zwykle zowiemy „liczbą zespoloną pospolitą“. Przyjmijmy najpierw do porównywania ilościowego liczb zespolonych nierównych regułę, przytoczoną na str. 707. W takim razie zachodzić będzie twierdzenie $(26, G_{11})$ i wszystkie twierdzenia grup (1), ale twierdzenie $(27, G_{11})$ zachodzić nie będzie, zatem twierdzenie to jest niezależne od twierdzenia $(26, G_{11})$ i od twierdzeń grup (1). Umówmy się teraz, że porównywanie ilościowe nierównych pomiędzy sobą liczb zespolonych pospolitych ma być wykonywane w sposób następujący: jeżeli moduły dwóch liczb zespolonych nie są pomiędzy sobą równe, to za mniejszą ma być uważana ta, której moduł jest mniejszy, jeżeli zaś moduły dwóch nierównych sobie liczb są pomiędzy sobą równe, to za mniejszą uważana ma być ta, której odpowiada mniejsza, od zera nie mniejsza, a od 2π mniejsza wartość argumentu. Ponieważ w razie równości modułów nierównych pomiędzy sobą liczb zespolonych wspólna wartość modułów z konieczności jest od zera większa,

przeto nawet kiedy chodzi o porównywanie ilościowe dwóch nierównych pomiędzy sobą liczb zespolonych o modułach równych pomiędzy sobą, reguła powyższa nie daje powodu do żadnej dwuznaczności wyniku. Z drugiej strony z łatwością stwierdzamy, że po przyjęciu tej reguły twierdzenie $(27, G_{11})$ i wszystkie twierdzenia grup (1) będą zachodzić, a twierdzenie $(26, G_{11})$ zachodzić nie będzie. Zatem twierdzenie to jest niezależne od twierdzenia $(27, G_{11})$ i od twierdzeń grup (1), a to pozostawało tylko do udowodnienia.

X. *Twierdzenie $(28, G_{12})$ jest niezależne od wszystkich twierdzeń grup*

$$(1) \quad (G_k), \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 11)$$

a twierdzenie $(29, G_{13})$ — od twierdzeń tychże grup i od twierdzenia $(28, G_{12})$.

Żeby dowieść, iż twierdzenie $(29, G_{13})$ jest niezależne od wszystkich innych twierdzeń podanych w § 169-tym, należy tylko zważyć, że jeżeli pod wyrazem „liczba“ rozumiemy rzecz, którą oznaczamy zwykle przez wyrażenie „liczba rzeczywista wymierna“, to wszystkie twierdzenia § 169-go prócz tylko twierdzenia $(28, G_{13})$ będą zachodzić. Mniej łatwo jest uzasadnić, jak to uczynił po raz pierwszy Hilbert¹⁾, że twierdzenie $(28, G_{12})$ jest niezależne od wszystkich twierdzeń grup (1). Przedmiotowi temu poświęćmy paragraf następujący.

§ 171. Żeby udowodnić, że twierdzenie $(28, G_{12})$ jest niezależne od kompleksu twierdzeń należących do grup

$$(1) \quad (G_k), \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 11),$$

należy tylko określić taki zbiór liczb (N, A) , żeby w razie, kiedy pod wyrazem „liczba“ rozumiemy będziemy element zbioru (N, A) , wszystkie twierdzenia grup (1) zachodziły, a twierdzenie $(28, G_{12})$ — nie zachodziło. Zbiór liczb czyniący zadość tym warunkom został utworzony przez Hilberta, ale, żeby uzyskać większy stopień jasności, skorzystamy tylko z idei zasadniczej tego autora, a od jego układu pozwolimy sobie odstępować.

Oznaczmy przez (Z) zbiór wszystkich rzeczy, z których każda a określona być może jako stanowiąca sama nieskończony zbiór (ζ) oznaczonych liczb rzeczywistych, odpowiadających w pewien sposób

¹⁾ Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1909, p. 31.

liczbom całkowitym rzeczywistym, a mianowicie w taki, żeby spełnione były warunki następujące:

1°. Każdej liczbie całkowitej m odpowiada dowolnie oznaczonej wartości liczba rzeczywista, stanowiąca ten element a_m zbioru (ξ) , który (element) odpowiada liczbie całkowitej m . Elementowi a_m zbioru (ξ) nadamy nazwę wyrazu rzędu m tego elementu a zbioru (Z) , którym jest zbiór (ξ) .

2°. Każdemu elementowi a zbioru (Z) odpowiada jedna przynajmniej taka liczba całkowita p , ujemna, zerowa lub dodatnia, żeby nierówność

$$m < p$$

pociągała za sobą równość

$$a_m = 0,$$

gdzie oznaczyliśmy przez a_m , jak przed chwilą, wyraz rzędu m elementu a zbioru (Z) .

Zatem, skoro pewien nieskończony zbiór (ξ) liczb rzeczywistych spełnia powyższe dwa warunki, to on stanowi element zbioru (Z) .

Oznaczmy przez a i b dwa elementy zbioru (Z) , przez a_m wyraz m -ego rzędu elementu a , a przez b_p wyraz p -ego rzędu elementu b . W razie nierówności

$$m < p$$

orzekamy, że wyraz a_m elementu a jest niższego rzędu od wyrazu b_p elementu b ; jeżeli zaś zachodzi nierówność

$$m > p,$$

to wówczas orzekamy, że wyraz a_m elementu a jest wyższego rzędu od wyrazu b_p elementu b ; jeżeli nareszcie zachodzi równość

$$m = p,$$

to powiadamy, że a_m i b_p są równorzędnymi wyrazami elementów a i b .

Uważajmy dwa wyrazy a_m i a_p tego samego elementu a zbioru (Z) . Żeby wyrazić, iż zachodzi nierówność

$$m < p,$$

orzekamy, że element a_m jest niższego rzędu niż element a_p ; to samo wyrażamy jeszcze, orzekając, że element a_p wyższego jest rzędu niż element a_p .

Zbiorowi (Z) nadajemy charakter zbioru liczb, przyjmując umowy następujące:

1°. Równość dwóch elementów zbioru (Z) wyraża, że równorzędne wyrazy tych elementów są równe pomiędzy sobą.

2°. Jeżeli oznaczymy ogólnie przez a_m i b_m wyrazy rzędu m dwóch elementów a i b zbioru (Z), to nierówność

$$a < b$$

i równoważna jej nierówność

$$b > a$$

wyrażają, iż istnieje pewna taka liczba całkowita p , żebyśmy mieli

$$a_p < b_p$$

i żeby nadto nierówność

$$m < p$$

pociągała za sobą równość

$$a_m = b_m.$$

U w a g a. Ponieważ w każdym elemencie zbioru (Z) wyrazy dostatecznie niskiego rzędu równają się zeru, przeto na podstawie definicji poprzedzającej dwa nierówne pomiędzy sobą elementy e i e' zbioru (Z) zawsze sprawdzać będą jeden ze związków

$$e < e' \quad \text{lub} \quad e > e'$$

z wykluczeniem drugiego.

3°. Wynikiem dodania do oznaczonego elementu a zbioru (Z) drugiego elementu b tegoż zbioru nazywamy ten element c rozważanego zbioru, którego każdy wyraz równa się sumie równorzędnych wyrazów elementów a i b .

4°. Iloczynem oznaczonego, za mnożną przyjętego, elementu a zbioru (Z) przez drugi, za mnożnik przyjęty element b tegoż zbioru nazywamy ten element c zbioru (Z), który wyznaczamy w sposób następujący: oznaczmy ogólnie przez a_i , b_i i c_m odpowiednio wyrazy rzędów i , j oraz m w elementach a , b i c , przyjmujemy

$$(1) \quad c_m = \sum_{i=-p_m}^{q_m} a_i b_{m-i}$$

gdzie oznaczyliśmy przez p_m i q_m liczby całkowite i dodatnie, odpowiadające liczbie całkowitej m w taki sposób, żeby w razie jakiegokolwiek zwiększenia którejkolwiek z nich albo i obu, do sumy (1) przy-

bywały tylko składniki równe zeru i ta suma nie ulegała zatem żadnej zmianie wartości.

U w a g a. Ponieważ istnieją takie dwie liczby całkowite p i q , że nierówności

$$i < p \quad \text{oraz} \quad j < q$$

pociągają za sobą odpowiednio nierówności

$$a_i = 0 \quad \text{i} \quad b_j = 0,$$

przeto dostatecznem będzie przyjąć na p_m i q_m wartości jakiegokolwiek, byle czyniące zadość nierównościom

$$-p_m < p, \quad m - q_m < q,$$

żeby wartości te sprawdzały warunki powyższej definicyi; ponieważ z drugiej strony w przypadku nierówności

$$m < p + q \tag{2}$$

zachodzić będzie przynajmniej jedna z nierówności

$$i < p \quad \text{lub} \quad m - i < q,$$

jakąkolwiek wartość miałby wskaźnik i , ponieważ więc w razie nierówności (2) mamy

$$a_i b_{m-i} = 0,$$

bez względu na wartość wskaźnika i , ponieważ zatem nierówność (2) pociąga za sobą równość

$$c_m = 0,$$

przeto powyższa definicya mnożenia elementów zbioru (Z) określa, jak być powinno, iloczyn dwóch elementów zbioru (Z) , jako oznaczony element tegoż zbioru. Zbiór liczb, którym staje się zbiór (Z) na podstawie powyższych definicyi, oznaczać będziemy przez symbol (NA) .

Czytelnik sprawdzi z łatwością, że jeżeli po przyjęciu wszystkich powyższych definicyi rozumiemy pod wyrazem „liczba“ liczbę zbioru (NA) , to wszystkie te twierdzenia § 169-go, które podaliśmy w grupach I, II, III i IV rzeczywiście zachodzić będą. (Z tego wynika w szczególności, że rzeczzone definicje czynią zadość ogólnym zasadom rozdziałów II-go i V-go). Chodzi tylko jeszcze o udowodnienie, że twierdzenie (28, G_{12}) nie zachodzi. W tym

celu oznaczmy przez a taką liczbę zbioru (NA) , żeby w elemencie tym wyraz rzędu

$$-1$$

równał się jedności, a każdy inny zeru; oznaczmy nadto przez b tę liczbę zbioru (NA) , w której wyraz rzędu zerowego równa się jedności, a każdy inny zeru.

Ponieważ moduł dodawania μ liczb zbioru (NA) równa się oczywiście elementowi, którego wszystkie wyrazy równają się zeru, przeto mamy

$$b > \mu.$$

Z drugiej strony suma n składników równych elementowi b oczywiście równa się temu elementowi $s^{(n)}$ zbioru (NA) , którego wyraz rzędu zerowego równa się liczbie n , a każdy inny — zeru. Mamy więc

$$a > s^{(n)}$$

bez względu na wartość liczby całkowitej i dodatniej n . Zatem dla liczb zbioru (NA) postulat Archimedes'a nie zachodzi.

Ostatecznie stwierdziliśmy, że twierdzenie (28, G_{12}) jest niezależne od twierdzeń należących do grup

$$(G_k), \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 11)$$

a to tylko pozostawiało jeszcze do udowodnienia, żeby już w zupełności uzasadnić tw. X-te § 170-go.

Obecnie wszystkie twierdzenia wysłowione w § 170-tym, są uzasadnione w zupełności, a z twierdzeń tych i uwag końcowych § 169-go wynika, żeśmy uczynili zadość w zupełności zasadzie podanej pod D w § 168-mym.

§ 172. Układ (U) wszystkich twierdzeń wysłowionych w § 169 prowadzi do całego szeregu zagadnień z zakresu związków logicznych, które pomiędzy temi twierdzeniami być może zachodzą.

Niektóre z tych zagadnień rozwiązałyśmy przez to samo, żeśmy uzasadnili twierdzenia wysłowione w § 170-tym, ale moglibyśmy postawić sobie bardzo wiele innych zagadnień z tegoż zakresu.

Na podstawie twierdzeń § 170-go możemy bezpośrednio odpowiedzieć na każde pytanie typu następującego: *czy oznaczone twierdzenie (T) układu (U) jest niezależne od innych twierdzeń tej grupy (G_p) , do której ono należy, oraz od twierdzeń, które należą do grup (G_k) , poprzedzających grupę (G_p) w ciągu*

$$(G_1), (G_2), (G_3), \dots, (G_{13})?$$

Natomiast twierdzenia § 170-go nie są wystarczające, ażeby odpowiedzieć na każde pytanie typu następującego: *czy w przypadku, kiedy usuniemy z układu (U) pewien taki kompleks twierdzeń (U'), żeby żadne z twierdzeń pozostałych znaczenia nie utraciło, wszystkie lub niektóre z twierdzeń układu (U') należeć będą do następstw logicznych twierdzeń pozostałych?*

Nie możemy myśleć o tem, żeby odpowiedzieć na wszystkie pytania tego rodzaju i poprzestaniemy na podaniu zajmujących wyników, uzyskanych przez Hilberta na tem polu.

Hilbert nazywa liczbami Desarguesa liczby każdego takiego zbioru liczb, który, z ewentualnym wyjątkiem twierdzenia $(16, G_7)$, sprawdza ¹⁾ wszystkie inne twierdzenia podane w § 169-tym, w grupach I, II, III i IV.

Jeżeli pewien zbiór liczb jest takim zbiorem liczb Desarguesa, który sprawdza i twierdzenie $(16, G_7)$ grupy II-giej, to Hilbert nazywa ten zbiór liczb zbiorem liczb Pascala.

Nareszcie każdemu takiemu zbiorowi liczb Desarguesa, który sprawdza tw. $(28, G_{12})$, Hilbert daje miano zbioru liczb Archimedes a.

Po przyjęciu powyższej terminologii, twierdzenia Hilberta opiewają jak następuje:

I. *Istnieją takie zbiory liczb Pascala, które nie są zbiorami liczb Archimedes a.*

II. *Każdy zbiór liczb Archimedes a jest zarazem zbiorem liczb Pascala.*

III. *Istnieją zbiory liczb Desarguesa, które jednak nie należą ani do klasy zbiorów liczb Pascala, ani Archimedes a.*

Pierwsze z tych twierdzeń uzasadniliśmy już w paragrafie poprzedzającym, gdyż zbiór liczb, któreśmy oznaczyli w rzeczonym paragrafie przez (NA) jest właśnie przykładem takiego zbioru liczb Pascala, który nie jest zbiorem liczb Archimedes a. Co się zaś tyczy tw. II i III, to uzasadnimy je w paragrafach następujących.

§ 173. *Zamiast tw. II-go paragrafu poprzedzającego, uzasadnimy twierdzenie nieco ogólniejsze, które opiewa jak następuje:*

¹⁾ Dla skrócenia omówimy tu, że oznaczony zbiór liczb (L) „sprawdza” takie a takie twierdzenia § 169-go, żeby wyrazić, iż rzeczone twierdzenie zachodzi, jeżeli pod wyrazem „liczba” rozumiemy element zbioru (L) .