

Jeżeli tylko nie każda z liczb (16) równa się zeru, to liczba x nie jest liczbą rzeczywistą. Zatem na podstawie twierdzenia § 158-go liczbie x odpowiadać będą dwie liczby rzeczywiste α i β , z których β będzie od zera odmienna, takie, żebyśmy mieli

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = 0,$$

czyli

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Ponieważ na podstawie wzoru (17) kwadrat x^2 liczby x jest liczbą rzeczywistą, przeto mamy

$$\alpha = 0.$$

Mamy więc

$$x^2 + \beta^2 = 0,$$

a ponieważ liczba β jest od zera odmienną liczbą, przeto mamy

$$x^2 < 0.$$

Zatem na podstawie równości (18), mamy

$$(19) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0.$$

Z tego wynika, że zachodzi twierdzenie następujące:

II. Wzorem (18) określony wielomian jednorodny drugiego stopnia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ liczb rzeczywistych (16) ma tę własność, iż sprawdza nierówność (19), jeżeli tylko nie wszystkie liczby (16) mają wartości zerowe.

Z teorii form kwadratowych wiemy, że warunek konieczny i wystarczający, ażeby forma kwadratowa $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ miała powyższą własność, polega na tem, żeby współczynniki δ_{ik} tej formy kwadratowej sprawdzały pewne nierówności. Wspomnianych nierówności nie piszemy, ponieważ fakt, że zachodzi wysłownione przed chwilą twierdzenie, stanowi dostateczną podstawę do dalszych rozważań; ale istnienie rzeczonych nierówności stanowi dowód na to, że zgodnie z tem, cośmy byli zapowiedzieli wyżej, liczby rzeczywiste δ_{ik} bynajmniej nie mogą przybierać jakichkolwiek wartości.

§ 161. Obecnie zamierzamy uzasadnić twierdzenie następujące:

Jeżeli rząd n zbioru (Z) większy jest od liczby 2, to w takim razie istnieje w zbiorze tym taki zasadniczy układ jednostek

$$(1) \quad i_1, i_2, \dots, i_n$$

że mamy nie tylko

$$i_1 = 1, \quad (2)$$

oraz

$$i_k^2 + 1 = 0, \quad (k = 2, 3, \dots, n), \quad (3)$$

co wątpliwości nie ulega na podstawie twierdzenia, uzasadnionego w § 159-tym, ale nadto

$$i_k i_t + i_t i_k = 0, \quad (4)$$

jeżeli tylko wskaźniki k i t sprawdzają nierówności

$$k > 1, \quad t > 1, \quad k \neq t. \quad (5)$$

Na podstawie twierdzenia § 159-go mamy pewność, że istnieje w zbiorze (Z) taki zasadniczy układ jednostek

$$l_1, l_2, \dots, l_n, \quad (6)$$

że mamy

$$l_1 = 1, \quad (7)$$

oraz

$$l_k^2 + 1 = 0. \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (8)$$

Przyjmijmy

$$i_1 = l_1, \quad i_2 = l_2, \quad (9)$$

oraz

$$i_3 = \lambda l_2 + \mu l_3, \quad (10)$$

oznaczając przez λ i μ dwie liczby rzeczywiste, które usiłujemy tak wyznaczyć, żebyśmy mieli

$$i_2 i_3 + i_3 i_2 = 0, \quad (11)$$

oraz

$$i_3^2 + 1 = 0. \quad (12)$$

Na podstawie wzoru (10) i równości (9) i (8) przy zachowaniu dla symbolów δ_k , znaczenia, nadanego im w § poprzedzającym, równanie (11) przybiera postać następującą:

$$-2\lambda + 2\delta_{23}\mu = 0. \quad (13)$$

Z drugiej znów strony na podstawie wzoru (10) równości (8) i równości (9) z równania (12) mamy

$$-f(\lambda, \mu, 0, 0 \dots 0) + 1 = 0, \quad (14)$$

gdzie znaczenie symbolu $f(\lambda, \mu, 0, 0 \dots 0)$ określone jest równaniem

(18) paragrafu powyższego. Podstawiając w równaniu (14) wartość na λ , wynikającą z równania (13), mamy

$$(15) \quad -\mu^2 f(\delta_{23}, 1, 0, 0, \dots 0) + 1 = 0.$$

Ponieważ na podstawie tw. II-go paragrafu poprzedzającego mamy

$$f(\delta_{23}, 1, 0, 0, \dots 0) > 0,$$

przeło równanie (15) da dwie wartości rzeczywiste na μ , a każdej z nich, na podstawie równania (13) taka odpowiadać będzie wartość na λ , iż wartość (10) na i_3 sprawdzać będzie równości (11) i (12). Z drugiej strony spostrzegamy natychmiast, że przy takiej wartości na i_3 układ liczb

$$i_1, i_2, i_3, l_4, l_5, \dots l_n$$

przedstawiać będzie jeden z zasadniczych układów liczb zbioru (Z).

Oznaczmy przez p liczbę całkowitą, sprawdzającą nierówności

$$2 < p \leq n,$$

i zbadajmy, czy liczby

$$i_1, i_2, \dots i_p$$

zbioru (Z) mogłyby być tak wyznaczone, żeby zachodziły okoliczności następujące:

1°. Układ liczb

$$(16) \quad i_1, i_2, \dots i_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \dots l_n,$$

który w razie równości $p = n$ uważany być winien za układ

$$i_1, i_2, \dots i_n,$$

jest zasadniczym układem jednostek zbioru (Z).

2°. Mamy

$$(17) \quad \begin{aligned} i_1 &= 1 \\ i_k^2 + 1 &= 0. \quad (k = 2, 3, \dots p) \end{aligned}$$

3°. Jeżeli wskaźniki k i t sprawdzają prócz nierówności (5) jeszcze związki

$$(18) \quad k \leq p, \quad t \leq p,$$

to w takim razie mamy

$$(19) \quad i_k i_t + i_t i_k = 0.$$

Dowiedliśmy wyżej, że liczby

$$i_1, i_2 \text{ i } i_3$$

rzeczywiście tak mogą być wyznaczone, żeby warunki poprzedzające zachodziły przy wartości

$$p = 3$$

liczby p . Załóżmy chwilowo, żeśmy liczby

$$i_1, i_2, \dots, i_q \quad (3 \leq q < n) \quad (20)$$

tak wyznaczyli, iż wspomniane warunki zachodzą przy wartości

$$p = q$$

liczby p i usiłujmy dołączyć do układu (20) taką liczbę i_{q+1} , żeby układ liczb (16) posiadał wysłowione wyżej własności przy wartości

$$p = q + 1$$

liczby p . Ponieważ mamy

$$q < n,$$

przeto liczba i_{q+1} niezawodnie istnieć będzie; możemy więc uczynić próbę wyznaczenia liczb rzeczywistych $\lambda_2 \dots \lambda_q$ i μ w taki sposób, żebyśmy mieli

$$i_{q+1} = \sum_{s=2}^q \lambda_s i_s + \mu i_{q+1}. \quad (21)$$

Żeby ta wartość na i_{q+1} czyniła zadość warunkom zadania, koniecznem jest i wystarcza, żeby zachodziły związki następujące:

$$i_k i_{q+1} + i_{q+1} i_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, q) \quad (22)$$

$$i_{q+1}^2 + 1 = 0 \quad (23)$$

oraz

$$\mu \neq 0. \quad (24)$$

Znaczenie nierówności (24) na tem polega, że nierówność ta stanowi oczywiście warunek konieczny i wystarczający, ażeby układ liczb

$$i_1, i_2, \dots, i_q, i_{q+1}, i_{q+2}, \dots, i_n$$

był zasadniczym układem jednostek zbioru (Z) .

Podstawiając wartość (21) na i_{q+1} w równaniach (22) i uwzględ-

dniając przytem związki (17) i (19), uzyskujemy równania następujące:

$$(25) \quad -2\lambda_k + 2\mu\delta_{k,q+1} = 0, \quad (k = 2, 3, \dots)$$

oznaczając ogólnie przez symbole δ_k liczby, w które przechodzą elementy, tymi samymi symbolami w paragrafie poprzedzającym przedstawione, gdy w układzie liczb

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

zastąpimy q pierwsze liczby, a więc

$$l_1, l_2, \dots, l_q$$

odpowiednio przez

$$i_1, i_2, \dots, i_q.$$

Przy takim rozumieniu symbolów δ_k możemy napisać wynik podstawienia wartości (21) na i_{q+1} w równaniu (23) w postaci następującej:

$$(26) \quad -f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, \mu, 0, 0, \dots, 0) + 1 = 0,$$

gdzie znaczenie symbolu $f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, \mu, 0, \dots, 0)$ należy uważać za określone przez wzór (18) paragrafu poprzedzającego.

Z równań (25) i (26) mamy

$$(27) \quad \mu^2 f(\delta_{2,q+1}, \delta_{3,q+1}, \dots, \delta_{q,q+1}, 1, 0, \dots, 0) - 1 = 0.$$

Ponieważ na podstawie tw. II-go paragrafu poprzedzającego mamy niezawodnie

$$f(\delta_{2,q+1}, \dots, \delta_{q,q+1}, 1, 0, \dots) < 0,$$

przeto równanie (27) da dwie od zera odmienne wartości na μ , a na podstawie równań (25) każdej z tych dwu wartości liczby μ odpowiadać będzie taki układ wartości na liczby

$$\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q,$$

iż wartość (21) na i_{q+1} czynić będzie zadość wszystkim warunkom zadania.

Z uzyskanych wyników wnosimy na podstawie zasady indukcji matematycznej, że przy każdej od liczby n nie większej, ani od liczby 3 nie mniejszej wartości liczby p można tak wyznaczyć liczby

$$i_1, i_2, \dots, i_p,$$

żeby układ (16) posiadał wyżej wysłowione własności. Z tego wynika bezpośrednio, że twierdzenie, które mieliśmy uzasadnić, zachodzi w podanem brzmieniu.

Żeby wyrazić, iż układ (1) liczb zbioru (Z) jest zasadniczym układem jednostek, sprawdzającym równości (2) i (3), oraz w razie nierówności

$$n > 2$$

(i w następstwie nierówności (5)) równości (4), orzekamy, że układ (1) przedstawia normalny układ jednostek zbioru liczb (Z).

Na podstawie twierdzenia dopiero co uzasadnionego, każdy zbiór liczb (Z), posiadający własności wyszczególnione w wykazie § 154-go, posiada jeden przynajmniej normalny układ jednostek. W rzeczywistości, w razie, ale tylko w razie, kiedy rząd n zbioru liczb (Z) większy jest od liczby 2, zbiór (Z) posiada nieskończenie wiele normalnych układów jednostek. Czytelnik sprawdzi z łatwością, że jeżeli układ (1) sprawdza warunki twierdzenia, to ogólne wzory na układ

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

jednostek normalnych zbioru (Z) możemy przedstawić w postaci następującej:

$$\varphi_1 = i_1$$

$$\varphi_k = \sum_{t=2}^n \alpha_{k,t} i_t, \quad (k = 2, 3, \dots, n),$$

oznaczając przez symbole $\alpha_{k,t}$ liczby rzeczywiste, sprawdzające związki następujące:

$$\sum_{t=2}^n \alpha_{k,t}^2 = 1 \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

oraz

$$\sum_{t=2}^n \alpha_{k,t} \alpha_{h,t} = 0 \quad \text{przy } k \neq h.$$

Wyniki, uzyskane w niniejszym paragrafie zostają w najściślejszym związku z teorią form kwadratowych i gdybyśmy chcieli się opierać na tej teorii, to moglibyśmy byli przedstawić wspomniane wyniki jako następstwa natychmiastowe twierdzenia następującego: wszelka forma kwadratowa rzeczywista określona (definita) i doda-

tnia może być przekształcona na sumę kwadratów drogą podstawienia liniowego ortogonalnego.

§ 162. Z wyników, uzyskanych w paragrafach poprzedzających, możemy wysnuć wnioski, które mają podstawowe znaczenie.

Uważajmy zbiór liczb (Z) posiadający własności, wyszczególnione w § 154-tym, i oznaczmy przez

$$(1) \quad i_1, i_2, \dots, i_n$$

jeden z układów normalnych jednostek tego zbioru. Jedna z liczb (1) będzie w takim razie równać się jedności rzeczywistej. Dobierając oznaczenia tak, jak w ustępach poprzednich, mamy

$$(2) \quad i_1 = 1.$$

Z łatwością stwierdzić możemy, że w razie nierówności

$$(3) \quad n > 2$$

mnożenie liczb zbioru (Z) własności przemienności posiadać nie może. Istotnie, ze względu na nierówność (3) ciąg (1) obejmować będzie przynajmniej trzy wyrazy, zatem liczby i_2 i i_3 istnieją i mamy

$$i_2 i_3 + i_3 i_2 = 0,$$

a gdyby mnożenie liczb zbioru (Z) posiadało własność przemienności, to mielibyśmy prócz tego

$$i_2 i_3 - i_3 i_2 = 0,$$

mielibyśmy więc

$$2i_2 i_3 = 2i_3 i_2 = 0.$$

Ponieważ zaś iloczyn liczb zbioru (Z) w takim tylko razie równać się może zeru, kiedy jeden czynnik przynajmniej równa się zeru, przeto na podstawie powyższych równości zachodziłaby jedna przynajmniej z równości:

$$i_2 = 0 \quad \text{albo} \quad i_3 = 0,$$

co jest niemożliwe, albowiem na podstawie definicyi zasadniczego układu jednostek zbioru (Z) żadna liczba takiego układu, a zatem w szczególności żadna liczba układu (1) zeru równać się nie może.

Z rozważań powyższych wynika, że w razie, kiedy mnożenie liczb zbioru (Z) ma własność przemienności, mamy

$$n \leq 2.$$

Już poprzednio mieliśmy sposobność zaznaczyć, że w przypadku, kiedy zachodzi równość

$$n = 1,$$

zbiór (Z) oczywiście izomorficzny jest zbiorowi liczb wymiernych, a w przypadku równości

$$n = 2$$

— zbiorowi liczb zespolonych pospolitych.

Z uwag tych wynika bezpośrednio ważne twierdzenie następujące:

I. Istnieją zbiory liczb, które prócz własności, wyszczególnionych w § 154-tym, posiadają jeszcze własność przemienności mnożenia, a każdy taki zbiór liczb izomorficzny jest albo zbiorowi liczb zespolonych pospolitych, albo tej części tego zbioru, którą stanowi zbiór liczb rzeczywistych.

Twierdzenie to możemy wyrazić krócej w postaci następującej:

Ia. Zbiór liczb zespolonych pospolitych jest typem najszerszego zbioru liczb, posiadającego prócz własności, wyszczególnionych w § 154, jeszcze i własność przemienności mnożenia.

Obeenie łatwo stwierdzić możemy, że przyjęcie umów, na których oparliśmy teorię liczb zespolonych pospolitych, nie jest rzeczą przypadku, lecz wynika z samej natury rzeczy. Istotnie, ponieważ wszelka liczba rzeczywista uważana być może za iloczyn dowolnie przyjętej, byle od zera odmiennej liczby rzeczywistej l przez stosownie dobraną drugą liczbę rzeczywistą, przeto pragnąc rozszerzyć pierwotnie do pojęcia liczby rzeczywistej zacieśnione pojęcie liczby przywiedzeni jesteśmy do rozważania takiego zbioru liczb, w którym każda liczba uważana mogłaby być za sumę iloczynów pewnych oznaczonych liczb

$$l_1, l_2, \dots l_n$$

przez czynniki rzeczywiste. Jeżeli tedy postawimy sobie problem rozszerzenia pojęcia liczby taką drogą w ten sposób, ażeby ogólne reguły przekształcania sum i iloczynów liczb rzeczywistych nie doznały zmiany przy przejściu od zbioru liczb rzeczywistych do nowego, szerszego zbioru liczb, to na podstawie twierdzenia poprzedzającego, z konieczności dochodzimy do teorii klasycznej liczb zespolonych pospolitych.

Ze względu na tw. I-sze i na to, że w razie, kiedy rząd zbioru

liczb (Z) równa się liczbie 2, zbiór ten izomorficzny jest zbiorowi liczb zespolonych pospolitych, pozostaje do zbadania przypadek, w którym mnożenie liczb tego zbioru własności przemienności nie posiada, a rząd jego n większy jest od liczby 2.

II. Jeżeli rząd n zbioru liczb (Z) większy jest od liczby 2, to w takim razie mamy albo

$$i_\alpha i_\beta i_\gamma = +1,$$

albo

$$i_\alpha i_\beta i_\gamma = -1,$$

jeżeli tylko wskaźniki α, β, γ sprawdzają nierówności następujące:

$$\begin{aligned} \alpha \neq \beta, \quad \beta \neq \gamma, \quad \gamma \neq \alpha \\ \alpha > 1, \quad \beta > 1, \quad \gamma > 1. \end{aligned}$$

Istotnie, przyjmijmy

$$Z = i_\alpha \cdot i_\beta \cdot i_\gamma.$$

W takim razie ze względu na własność łączności mnożenia, mamy

$$Z^2 = i_\alpha \cdot i_\beta \cdot (i_\gamma \cdot i_\alpha) \cdot i_\beta \cdot i_\gamma,$$

skąd

$$Z^2 = -i_\alpha \cdot i_\beta \cdot (i_\alpha \cdot i_\gamma) \cdot i_\beta \cdot i_\gamma,$$

a to na podstawie związku

$$(1) \quad i_\gamma i_\alpha + i_\alpha i_\gamma = 0.$$

Opierając się powtórnie na własności łączności mnożenia, mamy

$$Z^2 = -i_\alpha \cdot (i_\beta \cdot i_\alpha) \cdot i_\gamma \cdot i_\beta \cdot i_\gamma,$$

skąd ze względu na równość

$$i_\beta i_\alpha + i_\alpha i_\beta = 0$$

mamy

$$Z^2 = i_\alpha \cdot (i_\alpha \cdot i_\beta) \cdot i_\gamma \cdot i_\beta \cdot i_\gamma.$$

Uwzględniając jeszcze raz własność łączności mnożenia, otrzymujemy

$$Z^2 = i_\alpha^2 \cdot i_\beta \cdot i_\gamma \cdot i_\beta \cdot i_\gamma,$$

a ponieważ

$$i_\alpha^2 = -1,$$

przeto mamy

$$Z^2 = -i_\beta \cdot i_\gamma \cdot i_\beta \cdot i_\gamma.$$

Z uzyskanego wzoru na Z^2 i ze względu na równość

$$i_\beta \cdot i_\gamma + i_\gamma \cdot i_\beta = 0$$

mamy

$$Z^2 = i_\gamma \cdot i_\beta^2 \cdot i_\gamma = -i_\gamma^2 = 1,$$

a to na podstawie związków

$$i_\beta^2 + 1 = 0, \quad i_\gamma^2 + 1 = 0.$$

Ostatecznie mamy

$$Z^2 - 1 = 0.$$

Z drugiej strony mamy

$$Z^2 - 1 = (Z + 1)(Z - 1),$$

mamy więc

$$(Z + 1)(Z - 1) = 0,$$

skąd wynika (§ 154, własność 6^o zbioru (Z)), że zgodnie z brzmieniem twierdzenia zachodzi jedna z równości:

$$Z = +1 \quad \text{albo} \quad Z = -1.$$

III. *Rząd n zbioru (Z) nie może być większy od liczby 4.*

Istotnie, gdybyśmy mieli

$$n > 4,$$

to na podstawie tw. II-go zachodziłyby między innemi równości następujące:

$$i_2 i_3 i_4 = \zeta, \quad i_2 i_3 i_5 = \eta,$$

gdzie oznaczyliśmy przez ζ i η dwie liczby rzeczywiste, z których każda co do wartości bezwzględnej równałaby się jedności.

Z równości powyższych mamy

$$i_2 \cdot i_3 \cdot i_4^2 = \zeta i_4, \quad i_2 i_3 \cdot i_5^2 = \eta i_5$$

czyli

$$-i_2 \cdot i_3 = \zeta i_4, \quad -i_2 \cdot i_3 = \eta i_5.$$

Zatem mielibyśmy

$$\zeta i_4 - \eta i_5 = 0.$$

Innemi słowy zachodziłaby jedna z równości:

$$i_4 - i_5 = 0 \quad \text{albo} \quad i_4 + i_5 = 0.$$

Ponieważ każda z obu tych ewentualności w sprzeczności byłaby z założeniem, że liczby

$$i_1, i_2, \dots, i_n$$

stanowią zasadniczy układ jednostek zbioru (Z) , przeto stwierdzamy, że zgodnie z brzmieniem twierdzenia zachodzić musi związek

$$n \leq 4.$$

Na podstawie twierdzenia powyższego istnieją co najwięcej cztery, wartościom 1, 2, 3 i 4 liczby n odpowiadające klasy zbiorów liczb, posiadających wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym. Wiemy już, że każdej w wartości $n=1$ i $n=2$ liczby n odpowiada pewna rodzina izomorficznych pomiędzy sobą zbiorów, mianowicie w razie równości

$$n = 1$$

mamy zbiory liczb izomorficzne zbiorowi liczb rzeczywistych, a w razie równości

$$n = 2$$

zbiory liczb izomorficzne zbiorowi liczb zespolonych pospolitych. Pozostaje zatem z kolei zbadać następstwo założeń, z których jedno polegałoby na równości

$$n = 3,$$

a drugie na równości

$$n = 4.$$

IV. *Rząd zbioru liczb (Z) liczbie 3 równać się nie może.*

Istotnie, załóżmy wbrew brzmieniu twierdzenia, że mamy

$$n = 3.$$

Mielibyśmy tedy

$$i_2 i_3 = \alpha i_1 + \beta i_2 + \gamma i_3,$$

oznaczając przez α , β i γ liczby rzeczywiste.

Ponieważ mamy

$$i_1 = 1,$$

przeto wzór powyższy równoważny jest następującemu:

$$(1) \quad i_2 i_3 = \alpha + \beta i_2 + \gamma i_3,$$

skąd

$$i_2 i_3^2 = (\alpha + \beta i_2 + \gamma i_3) i_3 = \alpha i_3 + \beta i_2 i_3 + \gamma i_3^2,$$

czyli

$$-i_2 = \alpha i_3 + \beta i_2 i_3 - \gamma,$$

skąd znowuż na podstawie wzoru (1) wynika równość

$$-i_1 = \alpha i_3 + \beta (\alpha + \beta i_2 + \gamma i_3) - \gamma$$

czyli

$$-i_2 = \beta \alpha - \gamma + \beta^2 i_2 + (\alpha + \beta \gamma) i_3.$$

Z równości tej mamy

$$\beta \alpha - \gamma = 0, \quad \beta^2 = -1, \quad \alpha + \beta \gamma = 0.$$

Ponieważ liczba β jest liczbą rzeczywistą, przeto druga z równości powyższych zachodzić nie może. Zatem założenie, iż mamy

$$n = 3$$

doprowadza do następstwa niemożliwego. Przeto, zgodnie z brzmieniem twierdzenia liczba n liczbie 3 równać się nie może.

Z twierdzenia poprzedzającego wynika, że pozostaje tylko do zbadania przypadek, kiedy mamy

$$n = 4.$$

Przedmiotowi temu poświęcamy paragraf następujący.

§ 163. Założmy chwilowo, że pośród zbiorów liczb (Z), posiadających wszystkie własności wyszczególnione w § 154-tym, istnieje pewien zbiór liczb czwartego rzędu (Z_4), i oznaczmy przez

$$i_1, i_2, i_3, i_4 \tag{1}$$

normalny układ jednostek (§ 162) tego zbioru liczb.

Mamy tedy

$$i_1 = 1, \quad i_2^2 + 1 = 0, \quad i_3^2 + 1 = 0, \quad i_4^2 + 1 = 0 \tag{2}$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} i_2 i_3 + i_3 i_2 &= 0 \\ i_3 i_4 + i_4 i_3 &= 0 \\ i_4 i_2 + i_2 i_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Na podstawie tw. II-go § 162-go zachodzić będzie jeszcze jedna z równości:

$$i_2 i_3 i_4 = +1 \quad \text{albo} \quad i_2 i_3 i_4 = -1.$$