

### XVIII. Liczby zespolone o jakiejkolwiek, byle skończonej, liczbie jednostek zasadniczych.

§ 153. Główny cel rozdziału niniejszego polega na tem, żeby uwydatnić należycie naturę stosunku pojęcia liczby zespolonej pospolitej do ogólnego pojęcia liczby.

Żeby tego dokonać, zbadamy najpierw własności takiego zbioru liczb, który czyni zadość pewnym ogólnym warunkom. Dołączając później do rzeczonych warunków nowe jeszcze warunki, poznamy układ własności charakterystycznych zbioru liczb zespolonych pospolitych i uzyskamy przez to wiadomości, które dadzą nam możliwość zrozumienia wyjątkowego znaczenia, jakie mają obok liczb rzeczywistych liczby zespolone pospolite pośród innych typów liczb.

Rozważania, do których przystępujemy, oczywiście w znacznej mierze przyczynią się do pogłębienia ogólnego pojęcia liczby.

§ 154. Oznaczmy przez  $(Z)$  zbiór liczb, posiadający własności następujące:

1°. Zbiór  $(Z)$  może (choć nie musi) być zbiorem wielkości tylko w szerszem znaczeniu.

2°. Dodawanie liczb zbioru  $(Z)$  jest, zgodnie z ogólnymi zasadami rozdziału V-go, działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

3°. Dodawanie liczb zbioru  $(Z)$  posiada własność przemienności bez względu na liczbę składników.

Uwaga. W następstwie tej własności liczb zbioru  $(Z)$  zachodzą na podstawie ogólnych twierdzeń rozdziału V-go okoliczności następujące:

A) Dodawanie liczb zbioru  $(Z)$  posiada własność łączności (§ 28, tw. III).

B) W stosunku do liczb zbioru  $(Z)$  istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania (§ 31).

4°. W zbiorze  $(Z)$  istnieje moduł dodawania, innemi słowy, w zbiorze  $(Z)$  istnieje taka liczba  $\mu$ , żeby równość

$$x = \mu$$

i

$$l + x = l,$$

gdzie  $l$  i  $x$  oznaczają dwie liczby zbioru  $(Z)$ , były równoważne pomiędzy sobą bez względu na wartość liczby  $l$ .

5°. Mnożenie liczb zbioru  $(Z)$  jest, zgodnie z ogólnymi zasadami rozdziału V-go, działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

6°. Mnożenie liczb zbioru  $(Z)$  posiada własność rozdzielnosci w stosunku do dodawania.

7°. Mnożenie liczb zbioru  $(Z)$  posiada własność *łączności*, ale może nie posiadać własności przemienności.

8°. Iloczyn dwóch od modułu dodawania odmiennych liczb zbioru  $(Z)$  ma sam wartość zawsze od modułu dodawania odmienną.

9°. Wszystkie liczby rzeczywiste należą do zbioru  $(Z)$ .

10°. W przypadku szczególnym, kiedy **jeden przynajmniej** z czynników iloczynu dwóch liczb zbioru  $(Z)$  równa się liczbie **rzeczywistej**, mnożenie liczb zbioru  $(Z)$  posiada własność przemienności. Innemi słowy, jeżeli oznaczmy przez  $r$  liczbę rzeczywistą, a przez  $l$  jakąkolwiek liczbę zbioru  $(Z)$ , to w takim razie zachodzi równość

$$r \cdot l = l \cdot r.$$

11°. W zbiorze  $(Z)$  istnieje przynajmniej jeden taki skończoną liczbę  $n$  obejmujący układ liczb

$$(1) \quad l_1, l_2, l_3, \dots, l_n,$$

żeby na każdą liczbę  $l$  zbioru  $(Z)$  zachodził wzór postaci następującej:

$$(2) \quad l = \sum_{k=1}^n a_k l_k,$$

gdzie symbole

$$(3) \quad a_1, a_2, \dots, a_n$$

oznaczają liczby rzeczywiste o wartościach zależnych od liczby  $l$ .

Mamy z góry pewność, że zbiór liczb, posiadający wszystkie powyższe własności, istnieje, gdyż zbiór liczb zespolonych pospolitych jest właśnie przykładem takiego zbioru.

Gdybyśmy wymieniałając własności zbioru ( $Z$ ), zastąpili wyrażenie „zbiór liczb rzeczywistych“ przez wyrażenie „zbiór liczb izomorficzny zbiorowi liczb rzeczywistych“, tobyśmy podali własności zbioru ( $Z$ ) w postaci typowej czyli takiej, żeby każdy zbiór liczb, którego typ należałby do oznaczonej klasy ( $K$ ) typów liczb i tylko zbiór liczb typu klasy ( $K$ ) posiadał rzeczzone własności.

Ponieważ jednak taka zmiana w formułowaniu własności zbioru liczb ( $Z$ ) oczywiście nie wprowadziłaby żadnej zmiany w rozmaitości typów liczb, posiadających rzeczzone własności, a utrudniałaby natomiast wysławianie się, przeto sądzimy, że ta postać, w której wysłowiliśmy własności zbioru liczb ( $Z$ ) jest najwłaściwsza.

Zanim przystąpimy do bliższego zbadania zbioru liczb ( $Z$ ), pragniemy jeszcze uwydatnić znaczenie własności 11-tego zbioru liczb. W tym celu przyjmiemy chwilowo, że symbole (1) oznaczają  $n$  dowolnie przyjętych liczb zbioru ( $Z$ ). W takim razie bez względu na to, że zbiór liczb ( $Z$ ) posiada własność 11<sup>o</sup>, a więc wyłącznie na podstawie innych, w powyższym wykazie wyszczególnionych własności zbioru ( $Z$ ) wzór

$$\sum_{k=1}^n a_k l_k$$

przedstawiałby, przy dowolnie przyjętych wartościach na liczby rzeczywiste (3), oznaczonej wartości liczbę zbioru ( $Z$ ); ale gdybyśmy nie zakładali, że zbiór ( $Z$ ) posiada własność 11<sup>o</sup>, to nie mielibyśmy pewności, że przyjąwszy stosownie liczbę całkowitą i dodatnią  $n$  oraz wartości liczb (1), można będzie dobrać do dowolnie przyjętej liczby  $l$  ze zbioru ( $Z$ ) taki układ wartości na liczby rzeczywiste (3), żeby zachodziła równość (2).

§ 155. I. *Moduł dodawania liczb zbioru ( $Z$ ) równa się zeru.*

Istotnie, ponieważ na podstawie własności 4<sup>o</sup> liczb zbioru ( $Z$ ) moduł dodawania  $\mu$  liczb tego zbioru istnieje, przeto

$$(1) \quad l + x = l,$$

gdzie oznaczyliśmy przez  $l$  i  $x$  dwie liczby zbioru ( $Z$ ), równoważna jest równości

$$(2) \quad x = \mu,$$

bez względu na wartość liczby  $l$ .

Zatem, jeżeli tylko równość (1) zachodzi, zachodzi także i równość (2). Ale równość (1) zachodzić będzie niezawodnie, jeżeli tylko oznaczmy przez  $x$  liczbę zero, a przez  $l$  jakąkolwiek liczbę rzeczywistą. Mamy więc równość

$$0 = \mu,$$

która właśnie wyraża twierdzenie, o które chodziło.

II. Jeżeli oznaczmy przez  $a$  i  $b$  dwie liczby zbioru ( $Z$ ), to równość

$$a = b \tag{1}$$

równoważna będzie równości<sup>1)</sup>

$$a - b = 0. \tag{2}$$

Istotnie, jeżeli jakąkolwiek liczbą  $x$  zbioru ( $Z$ ) sprawdza równanie

$$a = b + x,$$

jeżeli, innemi słowy, liczba  $x$  uważana być może za resztę odejmowania liczby  $b$  od liczby  $a$ , to w następstwie równości (1) liczba  $x$  sprawdzać będzie równanie

$$a = a + x$$

i z tego powodu na podstawie tw. I-go równać się będzie zeru. Zatem równość (1) pociąga za sobą równość (2). Odwrotnie, jeżeli zachodzi równość (2), to w takim razie mamy

$$(a - b) + b = 0 + b,$$

a ponieważ ze względu na definicję odejmowania i na tw. I-sze z równości tej wynika równość

$$a = b,$$

przeto równość (2) pociąga za sobą równość (1).

Stwierdzamy więc, że równości (1) i (2) są rzeczywiście pomiędzy sobą równoważne

III. *Odejmowanie liczb zbioru ( $Z$ ) jest działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.*

Istotnie:

1°. Odejmowanie liczb zbioru ( $Z$ ) jest wykonalne bez zastrzeżeń. Żeby przekonać się o tem, oznaczmy przez  $l$  i  $l'$  dwie jakie-

<sup>1)</sup> Zamiast podawania dowodu tego twierdzenia moglibyśmy powołać się na § 97-ty; ale żeby ułatwić czytelnikowi zrozumienie omawianej teorii, rozwiniemy cały dowód na tem miejscu.

kolwiek liczby zbioru  $(Z)$ . Na podstawie własności 11<sup>o</sup> zbioru  $(Z)$  mamy

$$l = \sum_{k=1}^n a_k l_k$$

$$l' = \sum_{k=1}^n a'_k l_k,$$

gdzie

$$a_1, a_2, \dots a_n; a'_1, a'_2, \dots a'_n,$$

oznaczają liczby rzeczywiste. Przyjmijmy

$$x = \sum_{k=1}^n (a_k - a'_k) l_k.$$

Opierając się na własnościach 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, 5<sup>o</sup> i 6<sup>o</sup> zbioru  $(Z)$ , stwierdzamy z łatwością, że mamy

$$l' + x = l,$$

skąd wynika, że odejmowanie liczb zbioru  $(Z)$  jest rzeczywiście wykonalne bez żadnych zastrzeżeń.

2<sup>o</sup>. Odejmowanie liczb zbioru  $(Z)$  jest działaniem jednoznaczem. Żeby wykazać, że okoliczność ta zachodzi, oznaczmy przez  $l$  i  $l'$  dwie jakiekolwiek liczby zbioru  $(Z)$  i założmy, że pewne liczby  $x$  i  $y$  tegoż zbioru sprawdzają odpowiednio równania następujące:

$$\begin{aligned} l' + x &= l \\ l' + y &= l. \end{aligned}$$

Z równań tych mamy

$$l' + x = l' + y. \quad (1)$$

Ze względu na bezwarunkową wykonalność odejmowania liczb zbioru  $(Z)$  istnieje będzie jedna przynajmniej taka liczba  $\varphi$  w zbiorze  $(Z)$ , żebyśmy mieli

$$l' + \varphi = 0. \quad (2)$$

Otóż z równości (1) mamy

$$(l' + x) + \varphi = (l' + y) + \varphi,$$

skąd

$$(l' + \varphi) + x = (l' + \varphi) + y$$

na podstawie własności 3<sup>o</sup> zbioru ( $Z$ ). Uwzględniając równość (2) i tw. I-sze, wnosimy natychmiast z równości (3), że mamy

$$x = y,$$

która właśnie wyraża jednoznaczność odejmowania liczb zbioru ( $Z$ ).

Spostrzegamy taraz z największą łatwością, że teorię sum algebraicznych, rozwiniętą w § 83-cim, możemy bezpośrednio przenieść do teorii liczb zbioru ( $Z$ ), przyjąwszy umowy następujące:

1<sup>o</sup>. Żeby wyrazić, iż suma dwóch liczb zbioru ( $Z$ ) równa się modułowi dodawania, orzekamy, że te dwie liczby są pomiędzy sobą symetryczne.

2<sup>o</sup>. Znakom  $(+)$  i  $(-)$  nadajemy obok znaczenia znaków dobrze znanych działań jeszcze znaczenie jakościowe, umawiając się, że jeżeli jakikolwiek symbol  $l$  oznacza pewną liczbę zbioru ( $Z$ ), to symbol

$$+l$$

uważać będziemy za symbol tejże liczb  $l$ , a symbol

$$-l$$

za symbol liczby symetrycznej liczbie  $l$ .

IV. Warunek konieczny i wystarczający, ażeby iloczyn iluokolwiek liczb zbioru ( $Z$ ) równał się zeru, polega na tem, żeby jeden przynajmniej z czynników rozważanego iloczynu sam równał się zeru.

Zwróćmy się najpierw do przypadku, kiedy chodzi o iloczyn dwóch tylko czynników, i oznaczmy przez  $l$  i  $b$  dwie jakiekolwiek liczby zbioru ( $Z$ ). Na podstawie własności 6<sup>o</sup> zbioru ( $Z$ ) mamy

$$l \cdot 0 + l \cdot b = l \cdot (0 + b),$$

a ponieważ (tw. I) mamy

$$0 + b = b,$$

przeto zachodzi równość

$$l \cdot 0 + l \cdot b = l \cdot b,$$

skąd

$$(1) \quad x + a = a,$$

jeżeli przyjmiemy

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= l \cdot 0 \\ a &= l \cdot b. \end{aligned}$$

Z równości (1) wynika, że liczba  $x$  równa się modułowi dodawania. Zatem

$$x = 0,$$

skąd ze względu na równość (2) wynika równość

$$l \cdot 0 = 0. \quad (3)$$

Ponieważ na podstawie własności  $10^0$  zbioru  $(Z)$  mamy

$$0 \cdot l = l \cdot 0,$$

przeto, prócz równości (3), mamy jeszcze

$$0 \cdot l = 0. \quad (4)$$

Uwzględniając własność  $8^0$  zbioru  $(Z)$  oraz tw. I-sze, wnosimy z równości (3) i (4), że przy dwóch czynnikach twierdzenie zachodzi. Opierając się na tem, stwierdzamy łatwo, drogą indukcji matematycznej, że twierdzenie zachodzi bez względu na liczbę czynników, o co właśnie chodziło.

V. *Jakiegokolwiek liczby zbioru  $(Z)$  oznaczylibyśmy przez  $a$  i  $b$ , mamy zawsze*

$$\begin{aligned} a \cdot (-b) &= -a \cdot b \\ (-a) \cdot b &= -a \cdot b. \end{aligned}$$

Istotnie mamy

$$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot \{(-b) + b\} = a \cdot 0 = 0$$

oraz

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = \{(-a) + a\} \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Zatem każdy z iloczynów

$$a \cdot (-b) \quad \text{i} \quad (-a) \cdot b$$

symetryczny jest iloczynowi

$$a \cdot b,$$

a twierdzenie, o uzasadnienie którego chodziło, właśnie na tem polega.

VI. *W zbiorze liczb  $(Z)$  istnieje moduł mnożenia (str. 292) i równa się jedności, innemi słowy, w zbiorze  $(Z)$  istnieje taka liczba  $m$ , żeby każda liczba  $l$  zbioru  $(Z)$  sprawdzała równości*

$$m \cdot l = l \quad (1)$$

oraz

$$l \cdot m = l, \quad (2)$$

a okoliczności te zachodzą tylko przy wartości

$$(3) \quad m = 1$$

liczby  $m$ .

Istotnie, jeżeli wogóle istnieje w zbiorze  $(Z)$  taka liczba  $m$ , żeby równości (1) i (2) zachodziły bez względu na wartość liczby  $l$ , to ta liczba sprawdza równanie (3), gdyż równanie to jest koniecznym następstwem równości (1) i (2) w tym przypadku szczególnym, kiedy na  $l$  przyjmujemy wartość rzeczywistą od zera odmienną. Pozostaje więc tylko do wykazania, że przy wartości (3) na  $m$  równości (1) i (2) rzeczywiście zachodzą bez względu na wartość liczby  $l$ . Otóż na podstawie własności 11<sup>o</sup> zbioru  $(Z)$  mamy

$$(4) \quad l = \sum_{k=1}^n a_k l_k,$$

oznaczając przez

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

stosownie dobrane liczby rzeczywiste.

Zatem na podstawie własności 6<sup>o</sup> zbioru  $(Z)$  mamy

$$1 \cdot l = \sum_{k=1}^n 1 \cdot (a_k \cdot l_k),$$

skąd ze względu na własność 7<sup>o</sup> rozważanego zbioru liczb wynika równość

$$(5) \quad 1 \cdot l = \sum_{k=1}^n (1 \cdot a_k) \cdot l_k.$$

Ale ponieważ liczby  $a_k$  są liczbami rzeczywistymi, przeto mamy

$$1 \cdot a_k = a_k,$$

zatem z równości (5) mamy

$$1 \cdot l = \sum_{k=1}^n a_k \cdot l_k.$$

Z równości tej i równości (4) wynika równość (1), a ponieważ ze względu na własność 10<sup>o</sup> zbioru  $(Z)$  mamy

$$l \cdot 1 = 1 \cdot l,$$

przeto zachodzi i równość (2). Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.



VII. Oznaczmy przez  $\lambda, l$  i  $l'$  trzy jakiekolwiek liczby zbioru  $(Z)$ . W takim razie warunek konieczny i wystarczający, ażeby którakolwiek z równości

$$\lambda \cdot l = \lambda \cdot l' \quad (1)$$

i

$$l \cdot \lambda = l' \cdot \lambda \quad (2)$$

równoważna była równości

$$l = l' \quad (3)$$

polega na nierówności

$$\lambda \neq 0. \quad (4)$$

Istotnie, ze względu na tw. II-gie równość (1) równoważna jest równości

$$\lambda \cdot l - \lambda \cdot l' = 0, \quad (5)$$

a równość (2) równości

$$l \cdot \lambda - l' \cdot \lambda = 0. \quad (6)$$

Na podstawie własności 6<sup>o</sup> zbioru  $(Z)$  i tw. II-go, str. 73, mamy

$$\lambda \cdot l - \lambda \cdot l' = \lambda \cdot (l - l')$$

$$l \cdot \lambda - l' \cdot \lambda = (l - l') \cdot \lambda.$$

Zatem równości (5) i (6) są odpowiednio równoważne równościom

$$\lambda \cdot (l - l') = 0 \quad (7)$$

$$(l - l') \cdot \lambda = 0, \quad (8)$$

a ponieważ równości (1) i (2) są odpowiednio równoważne równościom (5) i (6), przeto równość (1) równoważna jest równości (7), a równość (2) — równości (8). Ale ze względu na tw. IV-te, w razie nierówności (4), każda z równości (7) i (8) równoważna jest równości

$$l - l' = 0,$$

równoważnej znów (tw. II) równości (3).

Zatem, jeżeli zachodzi nierówność (4), to każda z równości (1) i (2) równoważna jest równości (3). Z drugiej strony, gdyby nierówność (4) nie zachodziła, gdybyśmy więc mieli

$$\lambda = 0,$$

to żadna z równości (1) lub (2) nie byłaby równoważna równości (3), gdyż, ze względu na tw. IV-te, każda z równości (1) i (2) zachodziłaby bez względu na wartości liczb  $l$  i  $l'$ .

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Z powyższego twierdzenia wynika bezpośrednio twierdzenie następujące:

VIII. Jakikolwiek liczby zbioru ( $Z$ ) oznaczilibyśmy przez  $\lambda$ ,  $l$  i  $l'$ , warunek konieczny i wystarczający, ażeby którakolwiek z nierówności

$$\lambda \cdot l \neq \lambda \cdot l'$$

i

$$l \cdot \lambda \neq l' \cdot \lambda$$

równoważna była nierówności

$$l \neq l'$$

polega na nierówności

$$\lambda \neq 0.$$

IX. Jeżeli przy dzieleniu liczb zbioru ( $Z$ ) liczba przyjęta za dzielnik jest liczbą rzeczywistą, to jedyny rodzaj dzielenia, który w takim razie ze względu na własność  $10^0$  zbioru ( $Z$ ) istnieje, jest wykonalne i jednoznaczne, byleby dzielnik był od zera odmienny.

Istotnie, jeżeli warunki twierdzenia są spełnione, to ze względu na tw. V-te dzielenie w razie wykonalności jest niezawodnie działaniem jednoznaczne.

Z drugiej znów strony, jeżeli oznaczymy przez  $l$  liczbę zbioru ( $Z$ ), przyjętą za dzielną, to na podstawie własności  $11^0$  zbioru ( $Z$ ) mamy

$$l = \sum_{k=1}^n a_k l_k,$$

gdzie

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

oznaczają liczby rzeczywiste. Jeżeli więc, oznaczając przez  $r$  liczbę rzeczywistą od zera odmienną, przyjętą za dzielnik, przyjmiemy

$$x = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{r} \cdot l_k,$$

to na podstawie własności  $6^0$ ,  $7^0$  i  $10^0$  zachodzić będzie równość

$$x \cdot r = r \cdot x = l,$$

skąd wynika, że przy warunkach twierdzenia dzielenie jest wykonalne. Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

§ 156. Jeżeli pewien układ liczb zbioru ( $Z$ )

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \quad (1)$$

obejmujący skończoną liczbę  $m$  tychże, nie sprawdza żadnego równania postaci

$$\sum_{k=1}^m C_k \varphi_k = 0,$$

gdzie

$$C_1, C_2, \dots, C_m$$

oznaczają liczby rzeczywiste, z których jedna przynajmniej jest od zera odmienna, to ten stan rzeczy wyrażamy, orzekając, że liczby układu (1) są pomiędzy sobą liniowo niezależne. Nie wykluczając przypadku, w którymby liczba  $m$  liczb układu (1) równała się jedności, zaznaczamy, że na podstawie definicyi powyższej orzeczenie, iż układ (1) jest układem liczb zbioru ( $Z$ ) liniowo niezależnych, wyraża (tw. IV-te paragrafu poprzedzającego) w przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$m = 1,$$

co następuje: jedyna liczba  $\varphi_1$ , do której sprowadza się wówczas układ (1), jest od zera odmienna.

Uważajmy znowu pewien układ

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m, \quad (2)$$

obejmujący skończoną liczbę  $m$  liczb zbioru ( $Z$ ).

Jeżeli każda liczba zbioru ( $Z$ ) uważana być może za sumę iloczynów tych liczb przez pewne stosownie dobrane liczby rzeczywiste, to układ (2) zowiemy układem zupełnym jednostek zbioru ( $Z$ ), a liczby  $\psi_1, \psi_2, \dots$  jednostkami tego układu.

Własność 11<sup>o</sup> zbioru ( $Z$ ) polega oczywiście na tem, że zbiór ( $Z$ ) posiada jeden przynajmniej zupełny układ jednostek. W rzeczywistości zbiór ( $Z$ ) posiada nieskończenie wiele zupełnych układów jednostek, jak to wynika z twierdzenia następującego:

I. Jeżeli pewien układ liczb

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

uważany być może za zupełny układ jednostek zbioru ( $Z$ ), to układ obejmujący  $m$  ( $m \geq n$ ) liczb zbioru ( $Z$ )

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \quad (3)$$

także uważany być może za zupełny układ jednostek zbioru ( $Z$ ), jeżeli tylko liczby  $\varphi_i$  wyznaczone być mogą ze wzorów

$$(4) \quad \varphi_t = \sum_{k=1}^n a_{tk} l_k, \quad (t = 1, 2, 3, \dots, m)$$

gdzie przez  $a_{kt}$  oznaczamy takie liczby rzeczywiste, żeby rząd macierzy

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & a_{m,3}, & \dots & a_{m,n} \end{cases}$$

równał się liczbie  $n$ .

Istotnie, przypuścimy, że założenia twierdzenia są spełnione. W takim razie pośród liczb

$$1, 2, 3, \dots, m,$$

istnieć będzie jeden przynajmniej taki układ nierównych pomiędzy sobą liczb

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m,$$

żeby zachodziła nierówność

$$(6) \quad \Delta \neq 0,$$

gdzie

$$\Delta = |a_{\alpha_i, k}|. \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

Oznaczmy ogólnie przez  $\beta_{i,k}$  iloraz podziału współczynnika elementu  $a_{\alpha_i, k}$  w wyznaczniku  $\Delta$  przez ten wyznacznik i uważajmy następujące, do układu (4) należące równanie

$$(7) \quad \varphi_{\alpha_i} = \sum_{k=1}^n a_{\alpha_i, k} l_k. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Na podstawie twierdzeń, uzasadnionych w paragrafie poprzedzającym, możemy, powtarzając dokładnie znane rozumowanie z teorii równań liniowych, w których niewiadome są liczbami rzeczywistymi, stwierdzić, że układ (7) równoważny jest układowi następującemu:

$$(8) \quad l_k = \sum_{i=1}^n \beta_{i,k} \varphi_{\alpha_i}. \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Zatem układ równości (4) pociąga za sobą układ równości (8). Ponieważ zaś na każdą liczbę  $l$  zbioru  $(Z)$  mamy wzór postaci

$$l = \sum_{k=1}^n a_k l_k,$$

gdzie symbole  $a_n$  oznaczają liczby rzeczywiste, przeto opierając się na wzorach (8) i na twierdzeniach paragrafu poprzedzającego, stwierdzamy łatwo, że liczba  $l$  może być uważana za sumę iloczynów liczb

$$\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \dots, \varphi_{\alpha_n} \quad (9)$$

przez liczby rzeczywiste. Ale w razie nierówności

$$m > n,$$

możemy dodać do takiej sumy, nie powodując zmiany jej wartości, sumę iloczynów przez zero tych  $l$  z liczb (3), które do układu (9) nie należą.

Zatem w każdym razie możemy przedstawić dowolnie przyjętą liczbę  $l$  ze zbioru  $(Z)$  w postaci sumy iloczynów liczb (3) przez pewne liczby rzeczywiste, a na tem właśnie polega właściwa treść twierdzenia, które zamierzaliśmy uzasadnić.

Jeżeli jednostki

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

pewnego zupełnego układu jednostek zbioru  $(Z)$  są liniowo niezależnymi liczbami tego układu, jeżeli, innymi słowy, nie zachodzi żaden związek postaci

$$\sum_{k=1}^n C_k l_k = 0,$$

gdzie symbole  $C_k$  oznaczają liczby rzeczywiste, z których jedna przynajmniej jest od zera odmienna, to w takim razie rzeczony układ zupełny jednostek zowie się *zasadniczym* układem jednostek, a same jednostki — *jednostkami zasadniczymi*.

II. *Każdy zbiór liczb, posiadający wszystkie własności wyszczególnione w § 154-tym, posiada nieskończenie wiele zasadniczych układów jednostek, ale liczba jednostek, które razem tworzą którykolwiek z zasadniczych układów jednostek oznaczonego zbioru liczb  $(Z)$  o rzeczywistych własnościach, ma całkiem oznaczoną wartość i równa się naj-*

mniejszej liczbie  $n$  liczb zbioru  $(Z)$ , mogących stanowić razem zupełny układ jednostek tegoż zbioru. Jeżeli pewien zupełny układ jednostek zbioru  $(Z)$  obejmuje dokładnie  $n$  liczb, to ten układ jest jednym z zasadniczych układów jednostek zbioru  $(Z)$ .

Jeżeli oznaczymy przez

$$(1) \quad l_1, l_2, \dots, l_n$$

jeden zasadniczy układ jednostek zbioru  $(Z)$ , to warunek konieczny i wystarczający, ażeby  $n$  liczb

$$(2) \quad \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

stanowiło drugi zasadniczy układ jednostek zbioru  $(Z)$ , polega na tem, żebyśmy mieli

$$(3) \quad \varphi_t = \sum_{k=1}^n a_{kt} l_k, \quad (t = 1, 2, \dots, n)$$

oznaczając przez symbole  $a_{kt}$  liczby rzeczywiste, sprawdzające nierówność

$$(4) \quad \Delta \neq 0,$$

gdzie przyjąłszy

$$(5) \quad \Delta = |a_{kt}|. \quad (k, t = 1, 2, \dots, n)$$

Istotnie, stwierdzamy z łatwością, że liczba całkowita, którą oznaczyliśmy w twierdzeniu przez  $n$ , niezawodnie istnieć będzie. Załóżmy, że układ liczb

$$(6) \quad \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$$

jest zupełnym układem jednostek zbioru  $(Z)$ . W takim razie układ ten będzie układem zasadniczym, albowiem w razie równości  $n=1$  spostrzegamy natychmiast, że okoliczność ta zachodzi, a gdyby w przypadku nierówności

$$n > 1$$

liczby (6) nie były liniowo niezależne od siebie, to na jedną z nich, powiedzmy  $\psi_n$ , mielibyśmy wzór

$$(7) \quad \psi_n = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots + c_{n-1} \psi_{n-1},$$

oznaczając przez  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  pewne liczby rzeczywiste.

Ponieważ zaś każda liczba zbioru  $(Z)$  uważana być może za sumę iloczynów liczb (6) przez liczby rzeczywiste, przeto na pod-

stawie wzoru (7) każda liczba zbioru  $(Z)$  mogłaby być uważana za sumę iloczynów liczb

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}, \quad (8)$$

skąd wynika, że ten układ liczb byłby zupełnym układem jednostek zbioru  $(Z)$ . Ale układ (8), jako obejmujący tylko  $n-1$  liczb, nie może być zupełnym układem jednostek zbioru  $(Z)$ , gdyż oznaczyliśmy właśnie przez  $n$  najmniejszą liczbę jednostek, jaką obejmować może zupełny układ jednostek zbioru  $(Z)$ . Zatem liczby (7) są liniowo niezależne i stanowią zasadniczy układ jednostek zbioru  $(Z)$ . Stwierdzamy więc, że w zbiorze  $(Z)$  istnieje przynajmniej jeden układ zasadniczy.

Założmy, że pewien układ liczb

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p \quad (9)$$

jest zasadniczym układem jednostek zbioru  $(Z)$ . Ponieważ liczba  $n$  oznacza najmniejszą ilość liczb, mogących tworzyć razem jeden układ zasadniczy zbioru  $(Z)$ , przeto liczba  $p$  sprawdzać będzie nierówność

$$p \geq n.$$

W rzeczywistości jednak nierówność

$$p > n \quad (10)$$

zachodzić nie może, gdyż, oznaczywszy przez symbole  $a_{ik}$  pewne liczby rzeczywiste, mielibyśmy w każdym razie

$$\theta_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \psi_k, \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (11)$$

a w razie nierówności (10) ze wzorów tych wynikałoby (na tej samej drodze, co w teorii form liniowych zmiennych rzeczywistych), że liczby (9) wbrew założeniu nie są liniowo niezależne.

Zatem liczba liczb, stanowiących razem jeden zasadniczy układ jednostek zbioru  $(Z)$ , w każdym razie równa się zgodnie z brzmieniem twierdzenia liczbie  $n$ .

Upewnijmy się teraz, że warunek konieczny i wystarczający, ażeby układ (2) stanowił zasadniczy układ jednostek zbioru  $(Z)$ , polega na związkach (3) i (4). Otóż, jeżeli liczby (2) stanowią zasadniczy układ jednostek zbioru  $(Z)$ , to te liczby muszą należeć do zbioru  $(Z)$ , zatem na liczby te muszą zachodzić wzory postaci (3)

przy wartościach rzeczywistych liczb  $a_k$ ; nadto zachodzić musi nierówność (4), gdyż w przeciwnym razie liczby (1) nie byłyby liniowo niezależne od siebie. Z drugiej zaś strony, gdy warunki te są spełnione, to na podstawie tw. I-go układ (2) jest zupełnym układem jednostek zbioru ( $Z$ ). Ponieważ zaś układ ten obejmuje  $n$  liczb, przeto na podstawie pierwszego ustępu niniejszego dowodu, układ (2) jest zasadniczym układem jednostek zbioru ( $Z$ ). Zatem podane w twierdzeniu warunki, ażeby układ (2) był zasadniczym układem jednostek zbioru ( $Z$ ), są rzeczywiście konieczne i dostateczne.

Ponieważ istnieje nieskończenie wiele takich układów wartości rzeczywistych na elementy wyznacznika (5), ażeby nierówność (4) zachodziła, przeto na podstawie dopiero co uzyskanego wyniku, istnieje nieskończenie wiele zasadniczych układów jednostek w zbiorze ( $Z$ ). Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Liczba, którą oznaczyliśmy przez  $n$  w uzasadnionem dopiero co twierdzeniu, zowie się rzędem zbioru ( $Z$ ).

### III. Jeżeli oznaczymy przez

$$(1) \quad l_1, l_2, \dots, l_n$$

*k którykolwiek z zasadniczych układów jednostek zbioru ( $Z$ ), to każdej liczbie  $l$  tego zbioru odpowiadać będzie dokładnie jeden taki układ wartości na liczby rzeczywiste*

$$(2) \quad a_1, a_2, \dots, a_n,$$

*żebyśmy mieli*

$$(3) \quad l = \sum_{k=1}^n a_k l_k.$$

Ponieważ istnienie układu wartości na liczby (2), sprawdzającego równania (3), jest pewne ze względu na definicyę układu (1), przeto mamy jeszcze tylko udowodnić, że nie istnieje więcej ponad jeden taki układ wartości na liczby (1). W tym celu założmy, że zachodzi równość

$$(4) \quad l = \sum_{k=1}^n a'_k l_k,$$

gdzie symbole  $a'_k$  oznaczają liczby rzeczywiste.

Z równości (3) i (4) mamy

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a'_k) l_k = 0,$$



a ponieważ liczby (1) są pomiędzy sobą liniowo niezależne, przeto mamy

$$a_k - a'_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

skąd już bezpośrednio wynika to, cośmy mieli wykazać.

§ 157. Przy dalszem badaniu zbioru ( $Z$ ) założymy, że pewien zasadniczy układ jednostek

$$l_1, l_2, \dots, l_n \quad (1)$$

został w jakikolwiek bądź sposób oznaczony, i określać będziemy każdą liczbę  $l$  zbioru ( $Z$ ), którą zapagniemy oznaczyć, przez taki układ liczb rzeczywistych

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \quad (2)$$

który sprawdza równanie

$$l = \sum_{k=1}^n a_k l_k. \quad (3)$$

Przy tych warunkach nadamy zasadniczemu układowi jednostek (1) nazwę układu referencyjnego, a liczbom rzeczywistym (2) — nazwę współrzędnych liczby  $l$ .

W dalszych rozważaniach założymy, że jednostki zasadnicze, które razem tworzą układ referencyjny, zostały w jakiś sposób uszeregowane. Wobec tego każda jednostka układu referencyjnego posiadać będzie pewną liczbę porządkową; tę liczbę porządkową nazwiemy rzędem odnośnej jednostki. Współrzędne liczby zbioru ( $Z$ ) także uważać będziemy jako uszeregowane w pewnym porządku, a mianowicie w takim, żeby w każdym iloczynie, stanowiącym jeden ze składników we wzorze postaci (3) na liczbę  $l$  zbioru ( $Z$ ), liczba porządkowa współrzędnej równała się liczbie porządkowej jednostki układu referencyjnego. Liczby porządkowe współrzędnych liczby zbioru ( $Z$ ) nazywać będziemy rzędami tychże

Posługując się oznaczeniami, użytymi we wzorze (3), naturalnie przyjmować będziemy, o ile wyraźnie nie zaznaczymy rzeczy przeciwnej, że wskaźnik w symbolach  $l_k$  i  $a_k$  oznacza wspólny rząd jednostki  $l_k$  i współrzędnej  $a_k$ .

Usprawiedliwienie powyższych definicyi polega oczywiście na