

Jakąkolwiek wartość miałaby liczba  $k$ , możemy zawsze przyjąć

$$(6) \quad k = nt + \nu,$$

oznaczając przez  $t$  i  $\nu$  dwie liczby całkowite, z których druga,  $\nu$ , sprawdza nierówności

$$(7) \quad 0 \leq \nu < n.$$

Na podstawie wzoru (6) równość (5) równoważna jest następującej:

$$(8) \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{\nu}{n} 2\pi + 2t\pi.$$

Ponieważ równanie (4) określa liczbę dodatnią  $R$  jednoznacznie, a z drugiej strony wartość liczby całkowitej  $t$  na wartość liczby  $x$  pozostaje bez wpływu, przeto wszelką taką wartość liczby  $x$ , która sprawdza równanie (2), możemy przedstawić przez wzór następujący:

$$(9) \quad x = R \left\{ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{\nu}{n} 2\pi \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + \frac{\nu}{n} 2\pi \right) \right\},$$

gdzie  $\nu$  oznacza liczbę całkowitą, sprawdzającą związki (7). Z drugiej strony wzór (9) daje na  $x$  wartość sprawdzającą równanie (2), jakąkolwiek wartość całkowitą przyjęlibyśmy  $\nu$ , a nadto różnica dwóch takich wartości na  $\varphi$ , które wynikają ze wzoru (8), przyjmując kolejno na  $\nu$  dwa związki (7), sprawdzające odmienne pomiędzy sobą wartości, w żadnym razie wielokrotnością liczby  $2\pi$  być nie może. Zatem mamy dokładnie tyle równości (2) sprawdzających wartości liczby  $x$ , ile tychże dostarcza wzór (8), przyjmując kolejno na  $\nu$  wartości

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Przeto zgodnie z brzmieniem twierdzenia równanie (2) posiada dokładnie  $n$  rozwiązań w stosunku do niewiadomej  $x$ .

Uwaga. Pierwiastek  $n$ -tego stopnia liczby zespolonej równej zeru oczywiście ma jedną tylko wartość, która równa się zeru.

§ 150. Obecnie pragniemy podać geometryczną interpretację liczb zespolonych, zastosowując te liczby do problemu mierzenia wektorów w płaszczyźnie. Ale w tym celu koniecznem jest wprowadzenie pojęcia płaszczyzny zorientowanej i temu przedmiotowi poświęcamy niniejszy paragraf.

Przyjąwszy w oznaczonej płaszczyźnie ( $P$ ) oznaczoną oś ( $x$ )

za oś odciętych, a drugą prostopadłą do tej osi, oś ( $y$ ) za oś rzędnych, uzyskujemy pewien układ współrzędnych prostokątnych ( $x, y$ ) w płaszczyźnie ( $P$ ). Jeżeli tedy w tejże płaszczyźnie przyjmujemy jakikolwiek drugi układ współrzędnych prostokątnych i oznaczmy przez  $\alpha$  i  $\alpha'$  dostawy kierunkowe osi odciętych ( $x'$ ), a przez  $\beta$  i  $\beta'$  dostawy kierunkowe osi rzędnych ( $y'$ ) tego układu względem układu ( $xy$ ), to wartość bezwzględna wyrażenia

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta, \quad (1)$$

czyli wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix},$$

równać się będzie na podstawie znanego twierdzenia z elementów geometrii analitycznej jednostki, ale zależnie od wyboru układu ( $x', y'$ ) mieć będziemy albo

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1, \quad (2)$$

albo

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = -1. \quad (3)$$

W razie równości (2) orzekamy, że układ ( $x', y'$ ) jest równoskrętny układowi ( $x, y$ ), a w razie równości (3) — że układ ( $x', y'$ ) jest przeciwnieskrętny układowi ( $x, y$ ).

Symbole  $\alpha$ ,  $\beta'$ ,  $\alpha'$  i  $\beta$ , które wchodzą do wyrażenia (1), mają oczywiście znaczenie następujące:

$\alpha$  — przedstawia dostawę kątu osi odciętych obu układów,

$\beta'$  — przedstawia dostawę kątu osi rzędnych tychże,

$\alpha'$  — przedstawia dostawę kątu, utworzonego przez osie  $y$  i  $x'$ ,

$\beta$  — przedstawia dostawę kątu, utworzonego przez osie  $x$  i  $y'$ .

Zatem, gdybyśmy przy zachowaniu tych definicji symbolów  $\alpha$ ,  $\beta'$ ,  $\alpha'$  i  $\beta$  zamienili pomiędzy sobą jednocześnie z jednej strony znaczenie symbolów  $x$  i  $x'$ , a z drugiej — symbolów  $y$  i  $y'$ , to, przez taką zmianę oznaczeń wartości liczb  $\alpha$  i  $\beta'$  nie uległyby żadnej zmianie, a wartości liczb  $\alpha'$  i  $\beta$  uległyby prostej zamianie. Z tego wynika, że w rozważanych warunkach wartość wyrażenia (2) nie uległaby żadnej zmianie. Możemy więc wysłowić twierdzenia następujące:

1<sup>o</sup>. Jeżeli w oznaczonej płaszczyźnie pewien układ ( $U'$ ) współrzędnych prostokątnych jest równoskrętny pewnemu drugiemu układowi ( $U$ ) współrzędnych prostokątnych, to układ ( $U$ ) równoskrętny jest układowi ( $U'$ ).

2°. Jeżeli w oznaczonej płaszczyźnie pewien układ ( $U'$ ) współrzędnych prostokątnych jest przeciwskrętny pewnemu układowi ( $U$ ), to układ ( $U$ ) jest przeciwskrętny układowi ( $U'$ ).

Twierdzenia powyższe wyrażają to, co nazywamy własnością symetrii pojęcia układów współrzędnych równoskrętnych i pojęcia układów współrzędnych przeciwskrętnych, położonych w tej samej płaszczyźnie. Na podstawie twierdzeń tych orzeczenie, iż pewien układ współrzędnych prostokątnych jest równoskrętny albo przeciwnieskrętny pewnemu innemu układowi współrzędnych prostokątnych, położonych w tej samej płaszczyźnie, możemy wyrazić prościej, orzekając, że rozważane układy współrzędnych są równoskrętne albo przeciwnieskrętne.

Spostrzegamy natychmiast, że każdy układ współrzędnych prostokątnych jest sam sobie równoskrętny; jeżeli bowiem układ ( $x'y'$ ) zlewa się z układem ( $x, y$ ), to mamy  $\alpha=1$ ,  $\alpha'=0$ ,  $\beta=0$ ,  $\beta'=1$ , mamy więc

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1.$$

Jeżeli, zachowując oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się wyżej, nadamy wyrażeniu (1) nazwę wskaźnika każdego z układów współrzędnych ( $x, y$ ) i ( $x'y'$ ), względem układu drugiego, w takim razie zachodzi twierdzenie następujące:

*Wskaźnik któregośkolwiek z dwóch układów ( $x_1, y_1$ ) i ( $x_2, y_2$ ) współrzędnych prostokątnych położonych w oznaczonej płaszczyźnie ( $P$ ), względem drugiego, równa się iloczynowi wskaźników każdego z tych układów względem jakiegokolwiek trzeciego układu ( $x, y$ ) współrzędnych prostokątnych, położonego także w płaszczyźnie ( $P$ ).*

Żeby twierdzenie to udowodnić, przyjmijmy na dostawy kątów, jakie tworzą pomiędzy sobą parami osie, należące do rozważanych układów współrzędnych, oznaczenia, które jak się to zwykle robi w geometrii analitycznej, określimy przez tabliczki następujące:

	$x$	$y$
$x_1$	$\alpha_1$	$\alpha'_1$
$y_1$	$\beta_1$	$\beta'_1$

	$x$	$y$
$x_2$	$\alpha_2$	$\alpha'_2$
$y_2$	$\beta_2$	$\beta'_2$

	$x_1$	$y_1$
$x_2$	$\alpha$	$\alpha'$
$y_2$	$\beta$	$\beta'$

Mamy tedy

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha'_1 \alpha'_2 \\ \alpha' &= \beta_1 \alpha_2 + \beta'_1 \alpha'_2 \\ \beta &= \alpha_1 \beta_2 + \alpha'_1 \beta'_2 \\ \beta' &= \beta_1 \beta_2 + \beta'_1 \beta'_2. \end{aligned}$$

Na podstawie tych wzorów stwierdzamy (najprościej — posługując się teorią mnożenia wyznaczników), iż mamy

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = (\alpha_1\beta'_1 - \alpha'_1\beta_1)(\alpha_2\beta'_2 - \alpha'_2\beta_2).$$

Równość ta wyraża właśnie twierdzenie, o które chodziło.

Z twierdzenia tego wynikają natychmiast wnioski następujące:

1°. Jeżeli każdy z pewnych dwóch układów współrzędnych prostokątnych, położonych w oznaczonej płaszczyźnie, jest równoskrętny albo przeciwnieskrętny pewnemu trzeciemu układowi współrzędnych prostokątnych, to rozważane dwa układy współrzędnych są pomiędzy sobą równoskrętne.

2°. Jeżeli pewien układ współrzędnych prostokątnych, położony w oznaczonej płaszczyźnie ( $P$ ), jest równoskrętny pewnemu drugiemu układowi współrzędnych prostokątnych, położonemu w tejże płaszczyźnie, a pewien trzeci układ współrzędnych prostokątnych, także położony w płaszczyźnie ( $P$ ), jest przeciwnieskrętny drugiemu, to pierwszy i trzeci układ współrzędnych są pomiędzy sobą przeciwnieskrętne.

Zbiór wszystkich układów współrzędnych prostokątnych, położonych w oznaczonej płaszczyźnie ( $P$ ), możemy podzielić na dwie kategorie ( $K_1$ ) i ( $K_2$ ) w taki sposób, żeby każde dwa układy tej samej kategorii były równoskrętne pomiędzy sobą, a każdy układ jednej kategorii i każdy układ drugiej — przeciwnieskrętnymi. Istotnie, przyjmijmy w płaszczyźnie ( $P$ ) oznaczony układ współrzędnych prostokątnych ( $x, y$ ). Jeżeli tedy przyjmujemy, że kategorię ( $K_1$ ) tworzą wszystkie układy równoskrętne układowi ( $x, y$ ), a kategorię ( $K_2$ ) wszystkie inne układy współrzędnych prostokątnych, położone w rozważanej płaszczyźnie, to ze względu na wnioski, dopiero co wysnute z twierdzenia poprzedzającego, uzyskamy zapowiedzianego rodzaju podział wszystkich układów współrzędnych prostokątnych, położonych w płaszczyźnie ( $P$ ).

Przy powyższym podziale na dwie kategorie układów współrzędnych, położonych w oznaczonej płaszczyźnie, zwiemy układy współrzędnych pewnej jednej z tych dwu kategorii układami

prawoskrętnymi, a układy drugiej kategorii — lewoskrętnymi; której mianowicie kategorii układy mają być zwanymi prawoskrętnymi, jest rzeczą specjalnego określenia dla każdej oznaczonej płaszczyzny; w każdym jednak razie możemy usunąć wszelką dwuznaczność w tym względzie dla oznaczonej płaszczyzny, jeżeli oświadczymy, że pewien oznaczony układ współrzędnych prostokątnych, położony w rozważanej płaszczyźnie, postanawiamy uważać za układ prawoskrętny (albo za układ lewoskrętny).

Oznaczona płaszczyzna zowie się zorientowaną, skoro tylko ustalone są postanowienia, podające kryterium do rozpoznania, czy jakikolwiek układ współrzędnych prostokątnych, przyjęty w rozważanej płaszczyźnie, jest układem prawoskrętnym, czy też lewoskrętnym.

§ 151. Opierając się na wynikach, uzyskanych w paragrafie poprzedzającym, możemy już łatwo rozwiązać problem mierzenia wektorów, położonych w oznaczonej płaszczyźnie ( $P$ ). Zorientowawszy tę płaszczyznę, uważajmy jakikolwiek, byle nie zerowy, wektor  $\overline{OA}$ , w tej płaszczyźnie położony. Temu wektorowi odpowiadać będzie oczywiście jeden, i tylko jeden w płaszczyźnie ( $P$ ) położony układ współrzędnych ( $U$ ), sprawdzający warunki następujące:

1°. Początek  $O$  wektora  $\overline{OA}$  jest początkiem układu współrzędnych ( $U$ ).

2°. Oś odciętych w układzie ( $U$ ) jest osią współkierunkową wektorowi  $\overline{OA}$ .

3°. Układ współrzędnych ( $U$ ) jest układem prawoskrętnym.

4°. Przy mierzeniu współrzędnych punktu w układzie ( $U$ ) przyjmuje się za jednostkę długości długość wektora  $\overline{OA}$ .

Układ współrzędnych ( $U$ ) nazywać będziemy układem zespolonym z wektorem  $\overline{OA}$ .

Przyjmijmy obecnie definicję następującą:

Miarą jakiegokolwiek wektora  $w$ , położonego w płaszczyźnie ( $P$ ), w razie przyjęcia za jednostkę jakiegokolwiek, byle nie zerowego wektora  $u$ , położonego w rozważanej płaszczyźnie, nazywamy liczbę zespoloną

$$x + iy,$$

której część rzeczywista  $x$  i współczynnik  $y$  jednostki urojonej równają się odpowiednio odciętej i rzędnej końca wektora, równego

wektorowi  $w$ , a współpoczątkowego wektorowi  $u$  w układzie współrzędnych, zespolonym z wektorem  $u$ .

Spostrzegamy natychmiast, że liczby  $x$  i  $y$  równają się odpowiednio miarom rzutów prostokątnych wektora  $w$  na oś odciętych i na oś rzędnych układu współrzędnych, zespolonego z wektorem  $u$ .

Problem mierzenia w postaci ogólnej omówiliśmy w rozdziale XII-tym, a w § 102-gim tegoż rozdziału podaliśmy ogólne zasady, do których zastosowujemy się zawsze przy rozwiązywaniu problemu mierzenia. Zastrzeżyliśmy wprawdzie, że warunki te uważamy za ściśle obowiązujące tylko w przypadkach, kiedy posługujemy się liczbami rzeczywistymi; ale rzecz godna uwagi, że powyższa definicya miary wektora, położonego w oznaczonej płaszczyźnie, w razie przyjęcia za jednostkę dowolnie oznaczonego drugiego wektora, w tejże płaszczyźnie położonego, czyni zadość w zupełności wspomnianym wymaganiom. Upewnimy się, że okoliczność powyższa rzeczywiście zachodzi, skoro tylko sprawdzimy, że zachodzą twierdzenia następujące:

I. *Jeżeli po przyjęciu oznaczonego wektora  $u$  w płaszczyźnie zorientowanej pewna liczba zespolona  $z$  jest miarą oznaczonego wektora  $w$ , położonego w rozważanej płaszczyźnie, to każda liczba zespolona, równa liczbie  $z$ , jest także miarą wektora  $w$  w razie zachowania tejże jednostki.*

II. *Jeżeli oznaczymy przez  $u'$ ,  $u$  i  $w$  trzy wektory, położone w pewnej płaszczyźnie zorientowanej, przez  $\gamma$  miarę wektora  $u$ , przyjęwszy wektor  $u'$  za jednostkę, przez  $c$  miarę wektora  $w$ , przyjęwszy wektor  $u$  za jednostkę, a przez  $c'$  miarę wektora  $w$ , w razie przyjęcia wektora  $u'$  za jednostkę, to wówczas zachodzi związek następujący:*

$$c' = \gamma \cdot c.$$

III. *Przy oznaczonej jednostce miary wektorów, położonych w płaszczyźnie zorientowanej ( $P$ ), miary równych pomiędzy sobą wektorów, położonych w tejże płaszczyźnie, są pomiędzy sobą równe i odwrotnie, wektory, których miary są pomiędzy sobą równe, są także pomiędzy sobą równe.*

IV. *Przy założeniach twierdzenia poprzedzającego, miara sumy skończonej liczby wektorów równa się sumie miar tychże wektorów.*

Pierwsze z twierdzeń poprzedzających zachodzi oczywiście. Przechodzimy zatem wprost do dowodu drugiego twierdzenia. —

Oznaczmy w tym celu przez  $x'$  i  $y'$  oś odciętych i oś rzędnych w układzie współrzędnych prostokątnych zespolonym z wektorem  $u'$ , a przez  $x$  i  $y$  analogiczne elementy odnoszące się do układu współrzędnych, zespolonego z wektorem  $u$ <sup>1)</sup>. Ponieważ natychmiast spostrzegamy, że proste translacje wektorów  $u'$ ,  $u$  i  $w$  nie mają żadnego wpływu na liczby, z którymi mamy do czynienia, przeto bez szkody dla ogólności możemy założyć, że rzeczzone wektory są współpoczątkowe. Przyjmijmy to założenie, które uprości cokolwiek wzory i, uwidoczniając w liczbach zespolonych  $\gamma$ ,  $c$  i  $c'$  części rzeczywiste i współczynniki jednostki urojonej  $i$ , przyjmijmy

$$\begin{aligned} (1) \quad & \gamma = \alpha + i\beta. \\ (2) \quad & c = a + ib. \\ (3) \quad & c' = a' + ib'. \end{aligned}$$

Liczby  $\alpha$  i  $\beta$  przedstawiają współrzędne w układzie współrzędnych  $(x', y')$  takiego punktu osi  $x$ -ów układu  $(x, y)$ , którego odcięta w układzie  $(x, y)$  równa się liczbie  $+1$ , a więc liczbie dodatniej. Zatem dostawy kierunkowe osi  $x$ -ów w stosunku do układu  $(x', y')$  równają się liczbom

$$\frac{\alpha}{\varrho} \quad \text{ i } \quad \frac{\beta}{\varrho},$$

gdzie  $\varrho$  oznacza moduł liczby  $\gamma$ . Z tego zaś wynika, że dostawy kierunkowe osi  $y$ -ków w stosunku do układu  $(x', y')$  równają się

$$-\frac{\beta}{\varrho} \quad \text{ i } \quad \frac{\alpha}{\varrho}.$$

Z tego wynika dalej, że względu na znane twierdzenie z geometrii analitycznej, że pomiędzy współrzędnymi  $x', y'$  punktu płaszczyzny w układzie  $(x', y')$  a współrzędnymi  $(x, y)$  tegoż punktu w układzie  $(x, y)$  mielibyśmy, w razie mierzenia tą samą jednostką długości współrzędnych punktu w obu układach współrzędnych, związki następujące:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha}{\varrho} x - \frac{\beta}{\varrho} y \\ y' &= \frac{\alpha}{\varrho} x + \frac{\beta}{\varrho} y. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Żeby należycie rozumieć dalsze rozważania, należy nie zapominać, że jednostka długości przy wyznaczaniu współrzędnych punktu — inna jest przy układzie  $(x', y')$ , a inna przy układzie  $(x, y)$ ; w pierwszym przypadku rzeczoną jednostką jest odcinek długości wektora  $u'$ , a w drugim — odcinek długości wektora  $u$ .

Ponieważ jednak przy mierzeniu współrzędnych punktu w układzie  $(x, y)$  przyjmujemy za jednostkę długości długość wektora  $u$ , a nie długość wektora  $u'$ , która służy za jednostkę przy mierzeniu współrzędnych w układzie  $(x', y')$ , ponieważ nadto miara długości wektora  $u$ , gdy przyjmujemy długość wektora  $u'$  za jednostkę, oczywiście równa się liczbie  $\varrho$ , przeto w powyższych równaniach należy zastąpić  $x$  i  $y$  odpowiednio przez  $\varrho x$  i  $\varrho y$ . Zatem w rzeczywistości mamy

$$\begin{aligned}x' &= \alpha x - \beta y \\ y' &= \alpha x + \alpha y.\end{aligned}$$

Na podstawie równań tych mamy

$$\left. \begin{aligned}a' &= \alpha a - \beta b \\ b' &= \beta a + \alpha b,\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

zważywszy, że ze względu na równości (2) i (3) liczby  $a'$  i  $b'$  przedstawiają współrzędne w układzie  $(x', y')$  tego punktu, którego współrzędne w układzie  $(x, y)$  równają się odpowiednio  $a$  i  $b$ .

Równania (4) oczywiście równoważne są równości

$$c' = \gamma \cdot c,$$

którą właśnie pragnęliśmy udowodnić.

Ponieważ widoczną jest rzeczą, że tw. III-cie zachodzi, przeto pozostaje tylko do udowodnienia tw. IV-te. W tym celu oznaczmy przez  $(x, y)$  układ współrzędnych zespolony z wektorem, przyjętym za jednostkę przy mierzeniu wektorów, położonych w płaszczyźnie  $(P)$ , i uważajmy dwa jakiekolwiek w płaszczyźnie tej położone wektory  $w_1$  i  $w_2$ . Oznaczmy przez  $c_1$  i  $c_2$  miary wektorów  $w_1$  i  $w_2$ , przez  $O$  początek współrzędnych  $(x, y)$ , przez  $A_1$  i  $A_2$  końce z punktu  $O$  wychodzących, wektorom  $w_1$  i  $w_2$  odpowiednio równych wektorów, a przez  $(a_1, b_1)$  i  $(a_2, b_2)$  współrzędne punktów  $A_1$  i  $A_2$ . Mamy tedy

$$\begin{aligned}c_1 &= a_1 + ib_1 \\ c_2 &= a_2 + ib_2.\end{aligned}$$

Jeżeli zbudujemy wektor  $\overline{A_1 A}$  równy wektorowi  $\overline{OA_2}$ , i oznaczmy przez  $x$  i  $y$  współrzędne punktu  $A$ , to mamy

$$\begin{aligned}x - a_1 &= a_2 \\ y - b_1 &= b_2,\end{aligned}$$



skąd

$$\begin{aligned}x &= a_1 + a_2 \\ y &= b_1 + b_2,\end{aligned}$$

a ponieważ mamy

$$z = x + iy$$

oznaczając przez  $z$  miarę sumy wektorów  $w_1$  i  $w_2$ , przeto mamy

$$z = c_1 + c_2.$$

Zatem uzasadniliśmy twierdzenie w razie dwóch wektorów. Stąd zaś drogą indukcji matematycznej wnosimy łatwo, że twierdzenie zachodzi we wszystkich przypadkach.

Ostatecznie rozwiązaliśmy problem mierzenia wektorów, położonych w płaszczyźnie w sposób zgodny z zasadami § 102-go i uzyskaliśmy w teorii wektorów obraz geometryczny liczb zespolonych.

Wyniki powyższe możemy uzupełnić bardzo łatwo do usprawiedliwienia uwagi następującej: Jeżeli oznaczymy przez  $(x, y)$  układ współrzędnych prostokątnych, zespolonych z wektorem  $u$ , przyjętym za jednostkę w oznaczonej płaszczyźnie zorientowanej, a przez  $z$  miarę jakiegokolwiek w tej płaszczyźnie położonego wektora  $w$ , to moduł liczby  $z$  przedstawia stosunek długości wektora  $w$  do długości wektora  $u$ , a argument — miarę kąta, którego pierwszym bokiem jest wektor  $u$ , a drugim — wektor  $w$ .

Operując liczbami zespolonemi, kojarzymy często każdą liczbę zespoloną  $z$ , której część rzeczywistą oznaczymy przez  $x$ , a współczynnik jednostki urojonej — przez  $y$ , z punktem  $A$ , którego odcięta i rzędna w oznaczonym układzie współrzędnych, położonych w oznaczonej płaszczyźnie, równają się odpowiednio liczbom  $x$  i  $y$ . Punkt  $A$  zowie się w takim razie obrazem geometrycznym liczby zespolonej  $z$ . Ze stanowiska dopiero co wyłożonej teorii mierzenia wektorów, położonych w płaszczyźnie, liczba  $z = x + iy$  przedstawia miarę wektora, którego początek zlewa się z początkiem  $O$  współrzędnych  $(x, y)$ , a koniec — z punktem  $A$ , w razie, kiedy za jednostkę przyjmujemy wektor  $OB$  współkierunkowy z osią  $x$ -ów i taki, żeby długość jego równała się jednostce, którą posługujemy się przy mierzeniu współrzędnych.

Przy tych warunkach odległość punktu  $A$  od początku współrzędnych  $O$  przedstawia oczywiście moduł liczby  $z$ , a kąt od osi  $x$ -ów rachowany, kierunku  $\overline{OA}$  z tą osią — argument rozważanej liczby zespolonej.

§ 152. Żeby zakończyć rzecz o elementarnej teorii liczb zespolonych, jeszcze omówimy tylko pojęcie zbieżności ciągów i szeregów, których wyrazy są liczby zespolone.

Uważajmy ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (1)$$

którego wyrazy są jakimikolwiek liczbami zespolonemi. Jeżeli istnieje pewna taka liczba zespolona  $g$ , iż do każdej, byle od zera większej liczby bezwzględnej możebnem jest dobranie takiej liczby całkowitej i dodatniej  $N$ , żeby nierówność

$$k \geq N \quad (2)$$

pociągała za sobą nierówność

$$|u_k - g| < \varepsilon, \quad (3)$$

to orzekamy, że ciąg (1) jest zbieżny, a liczba  $g$  jest granicą jego.

Z łatwością przekonujemy się, że *wartość granicy ciągu zbieżnego liczb zespolonych oznaczona jest w zupełności*, innemi słowy, że *dwie nierówne pomiędzy sobą liczby nie mogą być obie granicami tego samego ciągu*. Istotnie, załóżmy, że każda z pewnych dwóch liczb  $g$  i  $g'$  uważana być może za granicę ciągu (1). W takim razie do danej, byle od zera większej liczby bezwzględnej  $\varepsilon$  możliwem jest dobrać taką liczbę całkowitą i dodatnią  $N$ , żeby nierówność (2) pociągała za sobą jednocześnie nierówność (3) i nierówność

$$|u_k - g'| < \varepsilon. \quad (4)$$

Z równości

$$(u_k - g) - (u_k - g') = g' - g,$$

mamy

$$|g' - g| \leq |u_k - g| + |u_k - g'|, \quad (5)$$

a ponieważ, w razie nierówności (2) zachodzą jednocześnie nierówności (3) i (4), przeto mamy

$$|g' - g| < 2\varepsilon.$$

Zatem moduł różnicy

$$g' - g$$

mniejszy jest od każdej, byle od zera większej liczby rzeczywistej. Z tego znów wynika, że część rzeczywista i współczynnik jednostki urojonej w liczbie  $g' - g$  są co do wartości bezwzględnej mniejsze

od każdej, byle od zera większej liczby rzeczywistej, skąd nareszcie wynika, że mamy

$$g - g' = 0$$

czyli

$$g = g',$$

o co właśnie chodziło.

Przyjmijmy

$$u_k = a_k + ib_k \quad \text{oraz} \quad g = a + ib,$$

oznaczając przez  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $a$  i  $b$  liczby rzeczywiste, a przez  $i$  jednostkę urojoną. Ponieważ mamy

$$\begin{aligned} |a_k - a| &\leq |u_k - g| \\ |b_k - b| &\leq |u_k - g|, \end{aligned}$$

przeto, jeżeli nierówność (2) pociąga za sobą nierówność (3), to nierówność (2) pociąga za sobą obie nierówności następujące:

$$\begin{aligned} |a_k - a| &< \varepsilon \\ |b_k - b| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem w razie zbieżności ciągu (1) obydwa ciągi

$$(6) \quad \begin{cases} a_1, a_2, a_3, \dots \\ b_1, b_2, b_3, \dots \end{cases}$$

są zbieżne.

Odwrotnie, jeżeli ciągi (6) są zbieżne, to ciąg (1) także jest zbieżny. Istotnie, oznaczmy przez  $\mu$  dowolnie przyjętą, byle od zera większą liczbę rzeczywistą. W razie zbieżności ciągów (6) możemy liczbę całkowitą i dodatnią  $N$  tak wyznaczyć w zależności od  $\mu$ , żeby nierówność (2) pociągała za sobą jednocześnie nierówności

$$(7) \quad |a_k - a| < \mu, \quad |b_k - b| < \mu,$$

gdzie  $a$  i  $b$  oznaczają odpowiednio granice ciągów (6). Przyjawszy

$$g = a + ib,$$

spostrzegamy natychmiast, że nierówności (7) pociągają za sobą nierówność

$$(8) \quad |u_k - g| < 2\mu.$$

Oczywiście możemy przyjąć

$$2\mu = \varepsilon,$$

oznaczając przez  $\varepsilon$  dowolnie daną, byle od zera większą liczbę rzeczywistą, a następnie tak wyznaczyć liczbę  $N$ , żeby nierówność (2) pociągała za sobą nierówności (7), a więc i (8). W takim razie nierówność (2) pociągać będzie za sobą nierówność (3). Stąd zaś wynika, że ciąg (1) rzeczywiście będzie zbieżny.

Na podstawie uzyskanych wyników mamy twierdzenie następujące: *Żeby ciąg (1) był zbieżny, koniecznem jest i wystarczającem, żeby zbieżne były oba ciągi (6); oznaczywszy przez  $a$  i  $b$  granice ciągów (6), a przez  $g$  granicę ciągu (1), mamy*

$$g = a + ib.$$

Stwierdzamy natychmiast, że twierdzenia, dotyczące sumy różnicy, iloczynu i ilorazu granic dwóch ciągów zbieżnych o wyrazach rzeczywistych przeniesione być mogą bez zmiany do teorii ciągów o wyrazach zespolonych.

Definicje zbieżności i sumy szeregów przenosimy bez żadnej zmiany z teorii szeregów o składnikach rzeczywistych do teorii szeregów o składnikach zespolonych, a na podstawie wyników, dopiero co uzyskanych, możemy wysłowić twierdzenie następujące: *Z dwóch nierównych pomiędzy sobą liczb zespolonych co najwięcej jedna może być sumą szeregu zbieżnego o składnikach zespolonych; żeby szereg o składnikach zespolonych*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (1)$$

*był zbieżny, koniecznem jest i wystarcza, żeby każdy z szeregów*

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + \dots \\ b_1 + b_2 + b_3 + \dots, \end{array} \right\} \quad (2)$$

*gdzie symbole  $a_k$  i  $b_k$  oznaczają część rzeczywistą, i współczynnik jednostki urojonej w wyrazie  $k$ -tym szeregu (1), był zbieżny; w razie zbieżności tych szeregów mamy*

$$s = a + ib,$$

*oznaczając przez  $s$  sumę szeregu (1), przez  $a$  sumę pierwszego, a przez  $b$  sumę drugiego z szeregów (2).*

Przyjmijmy ogólnie

$$\varrho_k = |u_k|$$

i uważajmy szereg o składnikach dodatnich

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots \quad (3)$$

Ponieważ składniki każdego z szeregów (2) są co do wartości bezwzględnej nie większe od równorzędnych składników szeregu (3), przeto w razie zbieżności szeregu (3) oba szeregi (2) są zbieżne. Zatem zbieżność szeregu (3) pociąga za sobą zbieżność szeregu (1). Natomiast zbieżność szeregu (3) bynajmniej nie należy do koniecznych następstw zbieżności szeregu (1), albowiem, jeżeli szeregi (2) są zbieżne tylko warunkowo, to szereg (3) będzie rozbieżny, jakkolwiek szereg (1) jest w rozważanym przypadku zbieżny. W razie zbieżności szeregu (3) orzekamy, że szereg (1) zbieżny jest bezwzględnie. Jeżeli zaś szereg (1) jest zbieżny, a szereg (3) rozbieżny, to wówczas orzekamy, że szereg (1) zbieżny jest warunkowo.

Z łatwością spostrzegamy, że twierdzenie § 128-go o iloczynie dwóch szeregów przeniesione być może bez żadnej zmiany do teorii szeregów o składnikach zespolonych.

Wogóle podstawowe twierdzenia i ich dowody z teorii zbieżności ciągów nieskończonych i szeregów o wyrazach rzeczywistych mogą być przeniesione do teorii ciągów i szeregów o wyrazach zespolonych, z tą tylko zmianą, iż wyrażenie „wartość bezwzględna“ należy zastąpić przez wyrażenie „moduł“, albo uważać za równoznaczne temuż wyrażeniu moduł.

---