

Uwzględniając definicyę ułamka łańcuchowego, stanowiącego prawą stronę równania (22), wnosimy z równości (23), że równość (3) zachodzić będzie dla wszystkich od zera nie mniejszych wartości całkowitych liczby  $t$ , jeżeli tylko przyjmiemy

$$p = i, \quad q = s + 1.$$

Zatem warunek, podany w twierdzeniu, jest rzeczywiście dostatecznym warunkiem okoliczności, wyrażonej w twierdzeniu. Uzasadniliśmy zatem w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

§ 143. W paragrafie tym przypuszczamy, że elementarna teoria równania drugiego stopnia znana jest czytelnikowi, i zbadamy bliżej okoliczności, które zachodzą przy rozwijaniu pierwiastków równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych na ułamki łańcuchowe arytmetyczne.

Wprowadzamy najpierw pojęcie ułamka łańcuchowego arytmetycznego peryodycznego.

Uważajmy ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieskończony

$$(1) \quad \left\{ a_0; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Żeby wyrazić, iż istnieją dwie takie liczby całkowite  $m$  i  $p$  ( $p \geq 1$ ), żeby związek

$$(2) \quad i \geq m$$

pociągał za sobą równość

$$(3) \quad a_{i+p} = a_i,$$

orzekamy, że ułamek łańcuchowy (1) jest peryodyczny. Każdy ciąg postaci

$$a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+p-1},$$

który w razie równości  $p=1$  sprowadza się do jedynego wyrazu

$$a_i,$$

zowie się, jeżeli tylko liczba  $i$  sprawdza związek (2), peryodem ułamka łańcuchowego (1).

Wprowadziwszy w § 54-tym pojęcie ułamka dziesiętnego peryodycznego, uzasadniliśmy między innemi twierdzenia, które jakkolwiek wyrażone były w terminologii liczb dziesiętnych, stanowią w rzeczywistości ogólne twierdzenia o ciągach nieskończonych, tę wła-

sność mających, iż przy oznaczeniu ogólnem przez  $a_i$  wyrazu rzędu  $i+1$  związek postaci (2) pociąga za sobą związek postaci (3)

Nie powracając już do dowodu twierdzeń, które mamy na myśli, porzucamy na wysłowieniu tychże:

1°. Jeżeli wogóle istnieje taki układ wartości całkowitych liczb  $m$  i  $p$ , żeby związek (2) pociągał za sobą związek (3), to istnieje w rzeczywistości nieskończenie wiele układów wartości liczb  $m$  i  $p$ , przy których ta sama okoliczność zachodzi, albowiem, jeżeli przy pewnych oznaczonych wartościach liczb  $m$  i  $p$  związek (2) pociąga za sobą związek (3), to okoliczność ta zachodzić nie przestanie, jeżeli zwiększymy liczbę  $m$  o dowolną liczbę jedności i zastąpimy liczbę  $p$  przez jakąkolwiek, od zera większą jej wielokrotność.

2°. Jeżeli założenie twierdzenia poprzedzającego jest spełnione, to istnieje pewna najmniejsza wartość  $p_0$  liczby  $p$ , której wogóle odpowiada taka wartość liczby  $m$ , żeby związek (2) pociągał za sobą równość (3); tej najmniejszej wartości liczby  $p$  odpowiada pewna najmniejsza taka wartość  $m_0$  liczby  $m$ , żeby związek (1) pociągał za sobą równość (3). Każda wartość liczby  $p$ , której wogóle odpowiada taka wartość liczby  $m$ , żeby nierówność (2) pociągała za sobą równość (3), tem jest nacechowana, iż stanowi od zera większą wielokrotność liczby  $p_0$ . Jeżeli pewnej liczbie od zera większej  $p$  odpowiada taka liczba całkowita  $m$ , iżby związek (2) pociągał za sobą równość (3), to najmniejsza w taki sposób liczbie  $p$  odpowiadająca wartość liczby  $m$  równa się liczbie  $m_0$ .

Żeby wyrazić, iż liczba  $m_0$  równa jest zeru, orzekamy, że ułamek łańcuchowy (1) jest czysto peryodyczny.

Żeby wyrazić, iż wskaźnik  $i$  wyrazu  $a_i$  ułamka łańcuchowego peryodycznego (1) sprawdza związek

$$i \geq m_0,$$

orzekamy, że wyraz  $a_i$  stanowi  $(i - m_0 + 1)$ -szy wyraz peryodyczny rozważanego ułamka łańcuchowego.

I. Jeżeli pewna liczba  $x$  rozwijalna jest na ułamek łańcuchowy arytmetyczny peryodyczny, to ta liczba równa się jednemu z pierwiastków oznaczonego równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych.

Założmy, że mamy

$$x = \left\{ a_0; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=1}^{\infty}, \quad (1)$$

gdzie ułamek łańcuchowy, stanowiący prawą stronę równości, jest ułamkiem łańcuchowym arytmetycznym peryodycznym.

Oznaczmy przez  $a_m$  jeden z wyrazów peryodycznych tego ułamka łańcuchowego, przez  $p$  liczbę wyrazów stanowiących jeden z peryodów, a ogólnie przez  $x_i$  uzupełniony mianownik ogniwa rzędu  $i$ .

Zachowując dla symbolów  $P_k$  i  $Q_k$  znaczenie, w którym posługiwaliśmy się tymi symbolami poprzednio, mamy

$$(2) \quad x = \frac{P_{m-1}x_m + P_{m-2}}{Q_{m-1}x_m + Q_{m-2}}$$

$$(3) \quad x = \frac{P_{m+p-1}x_{m+p} + P_{m+p-2}}{Q_{m+p-1}x_{m+p} + Q_{m+p-2}},$$

$$(4) \quad x_m = \left\{ a_m; \frac{1}{a_{m+i}} \right\}_{i=1}^{\infty},$$

$$(5) \quad x_{m+p} = \left\{ a_{m+p}; \frac{1}{a_{m+p+i}} \right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Uwzględniając tę okoliczność, iż mamy przy każdej od zera większej wartości całkowitej wskaźnika  $i$

$$a_{m+p+i} = a_{m+i},$$

wnosimy ze wzorów (4) i (5), iż mamy

$$x_{m+p} = x_m,$$

zatem

$$(6) \quad x = \frac{P_{m+p-1}x_m + P_{m+p-2}}{Q_{m+p-1}x_m + Q_{m+p-2}}$$

na podstawie wzoru (3).

Z równości (2) mamy

$$x_m = \frac{-Q_{m-2}x + P_{m-2}}{Q_{m-1}x - P_{m-1}},$$

a podstawiając tę wartość liczby  $x_m$  we wzorze (6), otrzymujemy

$$x = \frac{(P_{m+p-2}Q_{m-1} - P_{m+p-1}Q_{m-2})x + P_{m+p-1}P_{m-2} - P_{m+p-2}P_{m-1}}{(Q_{m+p-2}Q_{m-1} - Q_{m+p-1}Q_{m-2})x + Q_{m+p-1}P_{m-2} - Q_{m+p-2}P_{m-1}},$$

skąd

$$\begin{aligned} & (Q_{m+p-2}Q_{m-1} - Q_{m+p-1}Q_{m-2})x^2 + \\ & + (Q_{m+p-1}P_{m-2} - Q_{m+p-2}P_{m-1} - P_{m+p-2}Q_{m-1} + P_{m+p-1}Q_{m-2})x - \\ & - (P_{m+p-1}P_{m-2} - P_{m+p-2}P_{m-1}) = 0. \end{aligned}$$

Zatem zgodnie z brzmieniem twierdzenia liczba  $x$  sprawdza rzeczywiście pewne równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych.

Zastanówmy się bliżej nad zagadnieniem rozwijania pierwiastków równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych na ułamki łańcuchowe arytmetyczne. Spostrzegamy przedewszystkiem, że problem ten równoważny jest problemowi na pozór ogólniejszemu, polegającemu na rozwijaniu na ułamki łańcuchowe arytmetyczne pierwiastków równania drugiego stopnia o współczynnikach wymiernych, albowiem równanie takie możemy oczywiście przekształcić na równanie równoważne o współczynnikach całkowitych, pomnożywszy je przez liczbę całkowitą, która równałaby się wspólnej wielokrotności mianowników liczb ułamkowych, stanowiących współczynniki rozważanego równania.

Uważajmy równanie drugiego stopnia

$$A_0 x^2 + 2B_0 x + C_0 = 0 \quad (A_0 \neq 0) \quad (7)$$

o współczynnikach całkowitych  $A_0$ ,  $B_0$  i  $C_0$ .

Ponieważ problem rozwijania pierwiastków równania (7) na ułamki łańcuchowe arytmetyczne oczywiście w takim, i tylko w takim przypadku posiada rozwiązanie, kiedy rozważane równanie, posiada pierwiastki rzeczywiste, przeto zakładamy, że zachodzi związek

$$B_0^2 - A_0 C_0 \geq 0.$$

Oznaczmy przez  $x_1$  i  $x_2$  pierwiastki równania (7). Zważywszy, że liczby  $A_0$  i  $B_0$  są liczbami całkowitemi, wnosimy natychmiast ze znanego związku

$$A_0 (x_1 + x_2) + 2B_0 = 0,$$

iż dwa tylko przypadki są możliwe.

1°. Każdy pierwiastek równania (1) równa się liczbie wymiernej.

2°. Żaden pierwiastek równania (7) nie jest liczbą wymierną.

W pierwszym przypadku pierwiastki równania (7) rozwijalne są na ułamki łańcuchowe arytmetyczne skończone (§ 140, tw. IV), które poza tem nie podlegają żadnemu ogólnemu ograniczeniu, gdyż przyjąwszy dowolnie dwie liczby wymierne jakiekolwiek, możemy oczywiście zawsze ustawić takie równanie drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych, żeby pierwiastki jego równały się właśnie

tym liczbom. Zatem mamy do bliższego zbadania tylko przypadek, kiedy pierwiastki równania (7) są liczbami rzeczywistymi niewymiernymi.

Warunek konieczny i wystarczający, żeby okoliczność ta zachodziła, polega, jak się czytelnik z łatwością przekona, na tem, żeby wyrażenie

$$B^2 - AC$$

kwadratem zupełnem nie było, ale spełniło nierówność

$$(8) \quad B^2 - AC > 0.$$

Założymy więc, że warunek ten jest spełniony.

Pragnąc rozwinąć jeden z pierwiastków równania (7) na ułamek łańcuchowy, winniśmy przedewszystkiem dokładnie określić pierwiastek, o który nam chodzi; możemy to uczynić wyznaczając dwie liczby wymierne  $\alpha$  i  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) w taki sposób, żeby pomiędzy liczbami temi leżał jeden tylko pierwiastek równania (7), mianowicie ten pierwiastek  $x$ , który ma być rozwinięty na ułamek łańcuchowy. Nie wykluczając przypadku, w którymby jedna z liczb  $\alpha$  lub  $\beta$  równała się zeru, założymy jednak, że liczba zero pomiędzy liczbami  $\alpha$  i  $\beta$  położona nie jest. Oznaczmy ogólnie przez  $a_0$  wyraz początkowy oraz ogólnie przez  $a_i$  mianownik ogniwa  $i$ -tego ułamka łańcuchowego arytmetycznego równego liczbie  $x$ . Chodzi tedy o uzyskanie ogólnej metody do wyznaczenia dowolnie wielkiej liczby początkowych wyrazów ciągu

$$(9) \quad a_0, a_1, a_2 \dots$$

Liczba  $a_0$  oczywiście jest mniejsza od liczby  $\beta$  i może nawet być mniejsza od liczby  $\alpha$ , ale nie jest mniejsza od największej, od liczby  $\alpha$  nie większej liczby całkowitej. Zatem po wykonaniu pewnej skończonej liczby prób wyznaczymy liczbę  $a_0$  bez żadnej trudności. Mamy tedy

$$(10) \quad x = a_0 + \frac{1}{x_1},$$

oznaczając ogólnie przez  $x_i$  uzupełniony mianownik ogniwa rzędu  $i$  ułamka łańcuchowego

$$(11) \quad x = \left\{ a_0; \frac{1}{a_1} \right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Ponieważ mamy

$$(12) \quad \alpha < x < \beta,$$

przeto mamy

$$\alpha < a_0 + \frac{1}{x_1} < \beta$$

czyli

$$\alpha - a_0 < \frac{1}{x_1} < \beta - a_0. \quad (13)$$

Podstawiając wartość (10) na  $x$  w równaniu (7), uzyskamy na liczbę  $x_1$  równanie następujące:

$$\text{przyjmując} \quad A_1 x_1^2 + 2 B_1 x_1 + C_1 = 0, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_0 a_0^2 + 2 B_0 a_0 + C_0 \\ B_1 &= A_0 a_0 + B_0 \\ C_1 &= A_0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Równanie (14) mieć będzie dwa pierwiastki, ale jeden tylko z nich sprawdzać będzie nierówności (13), albowiem w razie przeciwnym, wbrew założeniu istniałyby dwa pomiędzy liczbami  $\alpha$  i  $\beta$  położone pierwiastki równania (7). Dwa przypadki są możliwe: możemy mieć

$$\alpha - a_0 > 0 \quad \text{albo} \quad \alpha - a_0 \leq 0.$$

W pierwszym przypadku nierówności (12) byłyby równoważne nierównościom

$$\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \quad (16)$$

gdzie  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  mają wartości następujące:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta - a_0}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\alpha - a_0};$$

gdyby zaś było

$$\alpha - a_0 \leq 0,$$

to ze względu na to, iż liczba  $x_1$  jest dodatnia, warunki (13) wyrażałyby tylko, że pierwiastek  $x_1$  równania (14) sprawdza nierówność

$$x_1 > \alpha_1, \quad (17)$$

ale wówczas, ze względu na to, iż równanie (14) miałoby tylko jeden pierwiastek dodatni, ta jedyna nierówność charakteryzowałaby w zupełności ten właśnie pierwiastek równania (14), który należałoby rozumieć przez symbol  $x_1$ . Z drugiej strony, na podstawie znanych własności równania drugiego stopnia, moglibyśmy zawsze w rozważanym przypadku wyznaczyć taką liczbę wymierną  $\beta_1$ , która byłaby większa od tego pierwiastka równania (14), wyróżnionego od drugiego nierównością (17). Z rozważań powyższych wynika

wniosek następujący: jeżeli pewien pierwiastek równania (1) został wyróżniony od drugiego nierównościami (12), to będziemy w stanie wyznaczyć wyraz początkowy ułamka łańcuchowego (11) i określić w zupełności mianownik uzupełniony pierwszego ogniwa tego ułamka łańcuchowego, jako liczbę  $x_1$ , sprawdzającą równanie (14) i nierówności postaci

$$\alpha_1 < x_1 < \beta_1,$$

gdzie  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  są dwie liczby sprawdzające nierówności

$$\alpha_1 < \beta_1 \quad \text{ i } \quad \alpha_1 \cdot \beta_1 \geq 0.$$

Załóżmy chwilowo, żeśmy wyznaczyli  $k$  ( $k \geq 1$ ) pierwsze wyrazy ciągu (9) i określili w zupełności mianownik uzupełniony  $x_k$  ogniwa rzędu  $k$  ułamka łańcuchowego (11) jako liczbę  $x_k$ , która sprawdza pewne równanie drugiego stopnia

$$(18) \quad A_k x_k^2 + 2B_k x_k + C_k = 0$$

i nierówności postaci

$$\alpha_k < x_k < \beta_k \quad (\alpha_k \cdot \beta_k \geq 0),$$

oznaczając przez  $\alpha_k$  i  $\beta_k$  pewne dwie liczby wymierne.

Ponieważ w takim razie wyraz  $a_k$  ciągu (9) czyli mianownik ogniwa rzędu  $k$  ułamka łańcuchowego (11) przedstawiałby wyraz początkowy ułamka łańcuchowego arytmetycznego ( $L_k$ ) równego liczbie  $x_k$ , a mianownik uzupełniony  $x_{k+1}$  rzędu  $k+1$  ułamka łańcuchowego (11) — mianownik uzupełniony pierwszego ogniwa ułamka łańcuchowego ( $L_k$ ), przeto zdołalibyśmy wyznaczyć wyraz  $a_{k+1}$  ciągu (9) i określić liczbę  $x_{k+1}$ , jako liczbę położoną pomiędzy pewnymi dwoma liczbami wymiernymi, sprawdzającą przytem pewne równanie drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych. Na podstawie zasady indukcji matematycznej możemy powiedzieć, że obecnie posiadamy już ogólną metodę do wyznaczenia dowolnej liczby początkowych wyrazów ciągu (9).

Powróćmy do kwestyi wyznaczenia wyrazu początkowego  $a_0$  ułamka łańcuchowego (11) i określenia uzupełnionego mianownika  $x$ , pierwszego ogniwa w założeniu szczególnem, że pierwiastki równania (7) są znaków przeciwnych, a pierwiastek  $x$ , który ma być rozwinięty na ułamek łańcuchowy, jest dodatni.

W takim razie przyjąwszy  $f(x) = A_0 x^2 + 2B_0 x + C_0$ , wyznaczamy kolejno znaki wyrażeń

$$\frac{f(0)}{A_0}, \quad \frac{f(1)}{A_0}, \quad \frac{f(2)}{A_0}, \dots$$

aż do chwili, kiedy dojdziemy do najmniejszej liczby całkowitej  $l$  takiej, żebyśmy mieli

$$\frac{f(l)}{A_0} > 0.$$

Ponieważ w rozważanym przypadku mamy

$$\frac{f(0)}{A_0} < 0,$$

przeto mieć będziemy

$$l > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{f(l-1)}{A_0} < 0. \quad (19)$$

Wnosimy stąd natychmiast, że na  $a_0$  otrzymamy wartość następującą:

$$a_0 = l - 1. \quad (20)$$

W rozważanym przypadku pierwiastki równania (14) będą znaków przeciwnych; okoliczność tę możemy przewidzieć natychmiast, opierając się na związku (10) pomiędzy pierwiastkiem równania (7) a pierwiastkiem równania (14); tę samą okoliczność możemy także wywnioskować bezpośrednio z nierówności

$$\frac{A_1}{C_1} < 0,$$

która wynika z nierówności (19), zważywszy, że ze względu na równość (20) i na wzory (15) mamy

$$A_1 = f(l-1).$$

Z drugiej znów strony ten pierwiastek  $x_1$  równania (14), który wchodzi do wzoru (10), jest dodatni. Dochodzimy więc do wyniku następującego: przy rozwijaniu na ułamek łańcuchowy arytmetyczny pierwiastka dodatniego równania drugiego stopnia o pierwiastkach znaków przeciwnych, mianownik uzupełniony pierwszego ogniwa określony być może także jako pierwiastek dodatni pewnego równania drugiego stopnia o pierwiastkach znaków przeciwnych. Ponieważ zaś mianownik uzupełniony ogniwa jakiegokolwiek rzędu  $k$  jest mianownikiem uzupełnionym pierwszego ogniwa przy rozwijaniu na ułamek łańcuchowy mianownika uzupełnionego ogniwa rzędu  $k-1$ , przeto na podstawie zasady indukcji matematycznej mamy dwa twierdzenia następujące:



II. Przy rozwijaniu pierwiastka dodatniego równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych i pierwiastkach niewymiernych znaków przeciwnych mianownik uzupełniony każdego ogniwa jest pierwiastkiem dodatnim takiegoż równania drugiego stopnia.

III. Jeżeli przy rozwijaniu na ułamek łańcuchowy arytmetyczny pewnego jednego z pierwiastków równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych i pierwiastkach niewymiernych mianownik uzupełniony  $x_n$  pewnego rzędu  $n$  określony być może jako pierwiastek dodatni pewnego równania drugiego stopnia o pierwiastkach znaków przeciwnych, to ta sama okoliczność zachodzi w stosunku do mianownika uzupełnionego każdego ogniwa rzędu wyższego od  $n$ -tego.

Zamierzamy dowieść, że zachodzi jeszcze twierdzenie następujące:

IV. Przy rozwijaniu oznaczonego pierwiastka równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych i pierwiastkach niewymiernych na ułamek łańcuchowy arytmetyczny, mianowniki uzupełnione kolejno następujących po sobie ogniw są, poczynszyszy od pewnego dostatecznie wysokiego rzędu, zawsze pierwiastkami dodatnimi równań drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych i pierwiastkach (oczywiście niewymiernych) znaków przeciwnych.

Istotnie uważajmy oznaczony pierwiastek  $x$  równania drugiego stopnia

$$(1) \quad A_0 x^2 + 2 B_0 x + C_0 = 0$$

o współczynnikach całkowitych i pierwiastkach niewymiernych i oznaczmy przez  $a_0$  wyraz początkowy, a przez  $a_i$  mianownik ogniwa rzędu  $i$  ułamka łańcuchowego arytmetycznego równego liczbie  $x$ . Mamy tedy

$$(2) \quad x = \left\{ a_0; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=1}^{\infty},$$

skąd

$$(3) \quad x = \frac{P_{n-1} x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} x_n + Q_{n-2}},$$

oznaczając przez  $x_n$  uzupełniony mianownik  $n$ -tego ogniwa ułamka łańcuchowego (1) i zachowując dla symbolów  $P_i$  i  $Q_i$  znaczenie w którym posługiwaliśmy się nimi poprzednio. Podstawiając w równaniu (1) wartość (3) na  $x$ , uzyskamy na  $x_n$  równanie następujące:

$$(4) \quad A_n x_n^2 + 2 B_n x_n + C_n = 0,$$

przyjmując

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_0 P_{n-1}^2 + 2 B_0 P_{n-1} Q_{n-1} + C_0 Q_{n-1}^2 \\ B_n &= A_0 P_{n-1} P_{n-2} + B_0 (P_{n-1} Q_{n-2} + P_{n-2} Q_{n-1}) + C_0 Q_{n-1} Q_{n-2} \\ C_n &= A_0 P_{n-2}^2 + 2 B_0 P_{n-2} Q_{n-2} + C_0 Q_{n-2}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Określając ogólnie symbol  $f(z)$  równaniem

$$f(z) = A_0 z^2 + 2 B_0 z + C_0$$

i zważywszy, że na redukt rzędu  $i$   $R_i$  ułamka łańcuchowego (2) mamy wzór

$$R_i = \frac{P_i}{Q_i},$$

możemy wzorom (5) na  $A_n$  i  $C_n$  nadać postać następującą:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= f(R_{n-1}) Q_{n-1}^2 \\ C_n &= f(R_{n-2}) Q_{n-2}^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ponieważ liczba  $x$  jest zawsze położona pomiędzy liczbami  $R_{n-2}$  i  $R_{n-1}$ , ponieważ z drugiej strony różnica

$$R_{n-1} - R_{n-2}$$

zmierza do zera, gdy  $n$  rośnie nieograniczenie, przeto przy dostatecznie wielkiej wartości wskaźnika  $n$  pomiędzy liczbami  $R_{n-2}$  i  $R_{n-1}$  położony będzie pierwiastek  $x$  równania (1), i tylko ten jeden pierwiastek tego równania; w takim razie, na podstawie wzorów (6) zachodzić będzie nierówność

$$\frac{C_n}{A_n} < 0$$

i pierwiastki równania (4) będą znaków przeciwnych. Zatem istnieje będzie pewna taka liczba całkowita  $N$ , iż w następstwie związku

$$n \geq N$$

pierwiastki równania (4) będą znaków przeciwnych, a o to właśnie chodziło.

Uwaga. Równanie (4) jest oczywiście równaniem równoważnem równaniu na  $x_n$ , do którego doprowadza wyżej omówiona metoda rozwijania oznaczonego pierwiastka  $x$  równania (1) na ułamek łańcuchowy arytmetyczny. Zatem, jeżeli, zastosowując wspo-

mnianą metodę, wyznaczymy mianowniki dostatecznej liczby początkowych ogniw, to przy wyznaczaniu mianowników ogniw dalszych, zawsze zachodzić będzie to udogodnienie, iż odnośny mianownik uzupełniony określony będzie mógł być jako pierwiastek dodatni pewnego równania drugiego stopnia o pierwiastkach znaków przeciwnych.

V. *Wynikiem rozwijania na ułamek łańcuchowy arytmetyczny któregokolwiek pierwiastka równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych i pierwiastkach niemymiernych (ale rzeczywistych) jest zawsze ułamek łańcuchowy peryodyczny.*

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zachowajmy oznaczenia twierdzenia poprzedzającego i zwróćmy się do wzorów (5). Przyjawszy

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = A_0 P_{n-1} + B_0 Q_{n-1} \\ \beta = B_0 P_{n-1} + C_0 Q_{n-1} \\ \alpha' = A_0 P_{n-2} + B_0 Q_{n-2} \\ \beta' = B_0 P_{n-2} + C_0 Q_{n-2}, \end{array} \right.$$

możemy wzory te przedstawić w postaci następującej:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n = P_{n-1} \alpha + Q_{n-1} \beta \\ B_n = P_{n-1} \alpha' + Q_{n-1} \beta' = P_{n-2} \alpha + Q_{n-2} \beta \\ C_n = P_{n-2} \alpha' + Q_{n-2} \beta'. \end{array} \right.$$

Mamy tedy

$$B_n^2 - A_n C_n = (P_{n-1} \alpha' + Q_{n-1} \beta') (P_{n-2} \alpha + Q_{n-2} \beta) - \\ - (P_{n-1} \alpha + Q_{n-1} \beta) (P_{n-2} \alpha' + Q_{n-2} \beta'),$$

skąd

$$B_n^2 - A_n C_n = (P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2}) (\alpha \beta' - \alpha' \beta),$$

a ponieważ na podstawie wzorów (7) mamy

$$\alpha \beta' - \alpha' \beta = (P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2}) (B_0^2 - A_0 C_0),$$

przeto mamy

$$B_n^2 - A_n C_n = (P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2})^2 (B_0^2 - A_0 C_0).$$

Zważywszy teraz, że mamy

$$P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2} = (-1)^{n-1},$$

wnosimy z równości poprzedzającej, że mamy

$$(9) \quad B_n^2 - A_n C_n = B_0^2 - A_0 C_0.$$

Równość ta wyraża, że wyróżnik równania (4) od wskaźnika  $n$  nie zależy.

Na podstawie twierdzenia poprzedzającego istnieje w każdym razie pewna taka liczba całkowita  $N$ , iż w następstwie związku

$$n \geq N \quad (10)$$

zachodzi nierówność

$$A_n C_n < 0,$$

z drugiej strony, ze względu na (9), w razie nierówności poprzedzającej mamy

$$\left. \begin{aligned} B_n^2 &< B_0^2 - A_0 C_0 \\ |A_n| |C_n| &< B_0^2 - A_0 C_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

na podstawie równości (9). Z tego wynika, że związek (10) pociąga za sobą nierówności (11). Ponieważ zaś liczby  $A_n$ ,  $B_n$  i  $C_n$  są liczbami całkowitemi, przeto istnieje tylko skończona liczba  $\mu$  takich układów wartości tych liczb, przy których zachodzą nierówności (11).

Jeżeli więc przyjmować będziemy kolejno na  $n$  wartości

$$N, N+1, N+2, N+3, \dots$$

to napotkamy zawsze pewną taką liczbę  $\nu$  ( $N < \nu < N+\mu$ ), żebyśmy mieli

$$A_\nu = A_{\nu-p}, \quad B_\nu = B_{\nu-p}, \quad C_\nu = C_{\nu-p}, \quad (12)$$

oznaczając przez  $p$  pewną liczbę całkowitą, sprawdzającą związki

$$N \leq \nu - p < \nu$$

czyli

$$0 < p \leq \nu - N.$$

W razie równości (12) mamy najpierw

$$x_\nu = x_{\nu-p},$$

skąd natychmiast wypływa, że związek

$$i \geq \nu - p \quad (13)$$

pociąga za sobą równość

$$x_{i+p} = x_i.$$

Z tego zaś wynika, że związek (13) pociąga za sobą równość

$$a_{i+p} = a_i.$$

Zatem zgodnie z brzmieniem twierdzenia ułamek łańcuchowy arytmetyczny, przedstawiający pierwiastek równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych, jest zawsze ułamkiem łańcuchowym peryodycznym.

Pomiędzy ułamiłkami łańcuchowymi arytmetycznymi, które przedstawiają odpowiednio pierwiastki pewnego równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych, i pierwiastkach niewymiernych, ale rzeczywistych, istnieje zajmujący związek.

Żeby należycie wysłowić twierdzenie, wyrażające ten związek, wprowadzamy nową nazwę. Uważajmy dwa ułamki łańcuchowe peryodyczne

$$\left\{ a_0; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{i} \quad \left\{ b_0; \frac{1}{b_k} \right\}_{k=1}^{\infty};$$

jeżeli można dobrać trzy liczby całkowite  $m, n$  i  $p$  ( $p \geq 1$ ) w taki sposób, żeby związek

$$i \geq m$$

pociągał za sobą równość

$$a_{i+p} = a_i,$$

a związek

$$k \geq n$$

— równość

$$b_{k+p} = b_k,$$

jeżeli nadto ciąg skończony

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+p-1}$$

identyczny jest ciągowi

$$b_{n+p-1}, b_{n+p-2}, \dots, b_n,$$

jeżeli, innemi słowy, mamy

$$a_{m+i} = b_{n+p-1-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p-1),$$

to orzekamy, że peryody rozważanych ułamków łańcuchowych peryodycznych są odwrotne.

VI. Dwa ułamki łańcuchowe arytmetyczne, z których jeden przedstawia pewien pierwiastek równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych i pierwiastkach niewymiernych, ale rzeczywistych, a drugi — drugi pierwiastek rozważanego równania, są ułamiłkami łańcuchowymi o peryodach odwrotnych.

Założmy, że liczba  $x$ , określona równaniem

$$x = \left\{ a_0; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=1}^{\infty}, \quad (1)$$

którego prawa strona przedstawia ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieskończony, jest jednym z pierwiastków równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych

$$A_0 z^2 + 2 B_0 z + C_0 = 0. \quad (2)$$

Ponieważ tedy jeden z pierwiastków równania tego równa się liczbie niewymiernej  $x$ , przeto drugi pierwiastek równać się będzie także pewnej liczbie niewymiernej  $y$ .

Z drugiej strony, na podstawie twierdzenia poprzedzającego ułamek łańcuchowy (1) będzie ułamkiem łańcuchowym peryodycznym. Założmy, że ciąg

$$a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p-1} \quad (3)$$

o  $p$  wyrazach stanowi jeden z peryodów ułamka łańcuchowego. Mamy tedy

$$x = \frac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}}, \quad (4)$$

zachowując oznaczenia, którymi posługiwaliśmy się poprzednio. Przyjmijmy

$$z = \frac{P_{n-1}u + P_{n-2}}{Q_{n-1}u + Q_{n-2}} \quad (5)$$

i podstawmy tę wartość na  $z$  w równaniu (2). Uzyskamy tedy na  $u$  równanie, któremu przy zachowaniu używanych poprzednio oznaczeń będziemy mogli nadać postać następującą:

$$A_n u^2 + 2 B_n u + C_n = 0. \quad (6)$$

Jeden z pierwiastków równania tego równać się będzie liczbie  $x_n$ , a gdybyśmy podstawili drugi pierwiastek,  $v$ , tego równania we wzorze (5) na  $z$ , to liczba  $z$  przyjąłaby wartość równą pierwiastkowi  $y$  równania (2). Mamy więc

$$y = \frac{P_{n-1}v + P_{n-2}}{Q_{n-1}v + Q_{n-2}}. \quad (7)$$

Gdyby pierwiastki równań (2) lub (6) nie były niewymierne, to słuszność uwag tych mogłaby być wątpliwa; chociaż

bowiem, wogóle na podstawie równania (5) odpowiada każdej wartości na  $u$  lub  $z$  oznaczona wartość drugiej z tych liczb, to istnieją jednak dwa wyjątki: wartości na  $u$ , obracające w zero wyrażenie

$$Q_{n-1}u + Q_{n-2},$$

nie odpowiada oznaczona wartość liczby  $z$ , a wartości na  $z$ , obracające w zero wyrażenie

$$Q_{n-2}z - P_{n-1},$$

nie odpowiada na podstawie związku (5) oznaczona wartość liczby  $u$ . Ponieważ jednak pierwiastki równań (3) i (5) są niewymierne, przeto wszelka wątpliwość co do słuszności powyższych uwag byłaby nieuzasadniona.

Równanie, któremu czynić musi zadość liczba  $u$ , ażeby wzór (5) przedstawiał jeden z pierwiastków równania (2), możemy także uzyskać w sposób następujący: ponieważ mamy

$$x_n = \left\{ a_n; \frac{1}{a_k} \right\}_{k=n+1}^{\infty},$$

ponieważ nadto ułamek łańcuchowy, stanowiący prawą stronę tego równania, jest ułamkiem łańcuchowym czysto peryodycznym, przeto mamy

$$x_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{a_{n+p-1}} + \frac{1}{x_n},$$

Żeby uprościć znakowanie, przyjmijmy

$$(8) \quad c_i = a_{n+i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

W takim razie powyższe równanie możemy napisać w postaci następującej

$$(9) \quad x_n = c_0 + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_{p-1}} + \frac{1}{x_n},$$

skąd

$$(10) \quad x_n = \frac{L_{p-1}x_n + L_{p-2}}{M_{p-1}x_n + M_{p-2}},$$

oznaczając ogólnie przez  $L_i$  i  $M_i$  ( $i < p$ ) wyrażenia, w które przeszłyby wyrażenia, oznaczone poprzednio przez  $P_i$  i  $Q_i$ , gdybyśmy zastąpili liczby

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

odpowiednio przez

$$c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$$

Z równania (10) mamy

$$M_{p-1}x_n^2 + (M_{p-2} - L_{p-1})x_n - L_{p-2} = 0. \quad (11)$$

Równanie to wyraża, że liczba  $x_n$  jest jednym z pierwiastków równania

$$M_{p-1}u^2 + (M_{p-2} - L_{p-1})u - L_{p-2} = 0. \quad (12)$$

Liczba  $x_n$  jest wspólnym pierwiastkiem równań (6) i (12); ponieważ zaś równania te są równaniami o współczynnikach całkowitych, ponieważ więc wspólny ich pierwiastek  $x_n$  jest niewymierny, przeto równania te są równoważne. Istotnie, z równania (11) i równania

$$A_n x_n^2 + 2B_n x_n + C_n = 0,$$

które wyraża, iż liczba  $x_n$  jest pierwiastkiem równania (6), mamy

$$\{(M_{p-2} - L_{p-1})A_n - 2B_n M_{p-1}\}x_n - (L_{p-2}A_n + C_n M_{p-1}) = 0,$$

mamy więc

$$\begin{aligned} (M_{p-2} - L_{p-1})A_n - 2B_n M_{p-1} &= 0, \\ L_{p-2}A_n + C_n M_{p-1} &= 0, \end{aligned}$$

bo w razie przeciwnym liczba  $x_n$  równałaby się liczbie wymiernej; otóż przyjmując

$$M_{p-1} = \lambda A_n, \quad (13)$$

do czego mamy prawo ze względu na nierówność

$$A_n \neq 0,$$

stwierdzamy na podstawie powyższych równości, że mamy

$$\left. \begin{aligned} M_{p-2} - L_{p-1} &= \lambda 2B_n \\ -L_{p-2} &= \lambda C_n; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ale ze względu na nierówność

$$\lambda \neq 0$$

związki (13) i (14) wyrażają właśnie, że równania (6) i (12) są rzeczywiście równoważne.

Z równoważności równań (6) i (12) wynika, że nie tylko pierwiastek  $x_n$  jest pierwiastkiem równania (12), ale także i pierwiastek  $v$ .



Ponieważ liczba  $x_n$  jest dodatnia, a pierwiastki równania (12) ze względu na nierówności

$$M_{p-1} > 0, \quad L_{p-2} > 0$$

są znaków przeciwnych, przeto możemy określić liczby  $x_n$  i  $v$  w sposób następujący: pierwsza z nich jest pierwiastkiem dodatnim równania (12), a druga — ujemnym. Przyjmijmy

$$(15) \quad v' = -\frac{1}{v}.$$

Ponieważ liczba  $v$  jest pierwiastkiem ujemnym równania (12), przeto liczba  $v'$  będzie pierwiastkiem dodatnim równania

$$(16) \quad L_{p-2}u'^2 + (M_{p-2} - L_{p-1})u' - M_{p-1} = 0,$$

którego pierwiastki są oczywiście znaków przeciwnych.

Podstawiając wartość (15) na  $v$  we wzorze (7), otrzymamy

$$(17) \quad y = \frac{P_{n-2}v' - P_{n-1}}{Q_{n-2}v' - Q_{n-1}}.$$

Powiadam, że liczba  $v'$  równa się ułamkowi czysto peryodycznemu, którego peryodem jest ciąg

$$(18) \quad c_{p-1}, c_{p-2}, \dots, c_0;$$

innymi słowy, zamierzam dowieść, że liczba  $v'$  równa się ułamkowi łańcuchowemu czysto-peryodycznemu, którego peryod odwrotny jest peryodowi ułamka łańcuchowego arytmetycznego, przedstawiającego liczbę  $x_n$ .

Istotnie, mamy

$$\begin{aligned} L_{p-1} &= c_{p-1}L_{p-2} + L_{p-3} \\ L_{p-2} &= c_{p-2}L_{p-3} + L_{p-4} \\ &\vdots \\ L_2 &= c_2L_1 + L_0 \\ L_1 &= c_1L_0 + 1 \\ L_0 &= c_0, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} M_{p-1} &= c_{p-1}M_{p-2} + M_{p-3} \\ M_{p-2} &= c_{p-2}M_{p-3} + M_{p-4} \\ &\vdots \\ M_2 &= c_2M_1 + 1 \\ M_1 &= c_1. \end{aligned}$$

Z równości tych wynika, że mamy

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_{p-1}}{L_{p-2}} &= c_{p-1} + \frac{1}{c_{p-2}} + \frac{1}{c_{p-3}} + \dots + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_0} \\ \frac{M_{p-1}}{M_{p-2}} &= c_{p-1} + \frac{1}{c_{p-3}} + \frac{1}{c_{p-5}} + \dots + \frac{1}{c_1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Przyjmijmy

$$b_i = c_{p-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p-1), \quad (20)$$

oraz ogólnie

$$b_{k+p} = b_k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

i uważajmy ułamek łańcuchowy peryodyczny

$$\xi = \left\{ b_0; \frac{1}{b_i} \right\}_{i=1}^{\infty}. \quad (21)$$

Oznaczając ogólnie przez  $T_i$  i  $S_i$  wyrażenia, w które przechodzą wyrażenia  $P_i$  i  $Q_i$  przez zastąpienie ciągu

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

ciągiem

$$b_0, b_1, b_2, \dots$$

mamy

$$\xi = \frac{T_{p-1}\xi + T_{p-2}}{S_{p-1}\xi + S_{p-2}} \quad (22)$$

na podstawie wzoru (21). Z drugiej strony mamy

$$\frac{T_{p-1}}{S_{p-1}} = \frac{L_{p-1}}{L_{p-2}}$$

$$\frac{T_{p-2}}{S_{p-2}} = \frac{M_{p-1}}{M_{p-2}},$$

ze względu na równości (19) i (20). Lewe strony równości powyższych stanowią liczby ułamkowe bezwzględnie nieprzywiedlne, a prawe strony tychże równości są także liczbami ułamkowymi bezwzględnie nieprzywiedlnymi, albowiem na podstawie równości

$$L_{p-2}M_{p-1} - L_{p-1}M_{p-2} = (-1)^{p-1},$$

która wynika z definicji liczb  $L_{p-1}$ ,  $L_{p-2}$ ,  $M_{p-1}$  i  $M_{p-2}$ , liczby  $L_{p-1}$  i  $L_{p-2}$  z jednej strony, a liczby  $M_{p-1}$  i  $M_{p-2}$  z drugiej są liczbami względnie pierwszymi.

Z rozważań powyższych wynika, że mamy

$$\begin{aligned} T_{p-1} &= L_{p-1}, & S_{p-1} &= L_{p-2} \\ T_{p-2} &= M_{p-1}, & S_{p-2} &= M_{p-2}. \end{aligned}$$

Zatem równość (22) przyjmuje kształt następujący:

$$\xi = \frac{L_{p-1}\xi + M_{p-1}}{L_{p-2}\xi + M_{p-2}},$$

skąd

$$L_{p-2}\xi^2 + (M_{p-2} - L_{p-1})\xi - M_{p-1} = 0.$$

Porównyując równanie to z równaniem (16), spostrzegamy, że liczba  $\xi$  jest pierwiastkiem tego równania. Ponieważ zaś mamy

$$\xi > 0,$$

przeto mamy

$$(23) \quad \xi = v',$$

albowiem liczba  $v'$  jest pierwiastkiem dodatnim równania (16). Z równości (23) wynika, że liczba  $v'$  rzeczywiście równa się ułamkowi łańcuchowemu peryodycznemu o peryodzie odwrotnym peryodowi ułamka łańcuchowego, przedstawiającego liczbę  $x_n$ . Ponieważ zaś mamy

$$\begin{aligned} P_{n-2} \cdot (-Q_{n-1}) - (-P_{n-1}) Q_{n-2} \\ = -P_{n-2} Q_{n-1} + P_{n-1} Q_{n-2} = (-1)^n, \end{aligned}$$

ponieważ zatem na podstawie tw. III-go § 142-go z równości (17) wynika, że ułamki łańcuchowe arytmetyczne, na które rozwinąć możemy liczby  $y$  i  $v'$ , tylko wyrazami początkowymi i mianownikami skończonych liczb początkowych ogniów różnić się pomiędzy sobą mogą, przeto ułamki łańcuchowe arytmetyczne peryodyczne, przedstawiające odpowiednio liczby  $y$  i  $x_n$  są ułamekami łańcuchowymi o peryodach odwrotnych. Zważywszy jeszcze, że peryod ułamka łańcuchowego arytmetycznego, przedstawiającego liczbę  $x_n$ , jest zarazem peryodem ułamka łańcuchowego arytmetycznego, przedstawiającego liczbę  $x$ , wnosimy, że twierdzenie, które pragnęliśmy udowodnić, rzeczywiście zachodzi w podanem brzmieniu.

U w a g a. Prócz twierdzenia, które uzasadniliśmy przed chwilą zachodzi jeszcze bardzo twierdzeniu temu pokrewne twierdzenie następujące: *wartości bezwzględne pierwiastków równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych i pierwiastkach rzeczywistych, ale niewymiernych, równają się odpowiednio dwom ułamkom łańcu-*

chowym arytmetycznym peryodycznym o peryodach odwrrotnych. Istotnie, jeżeli oznaczymy przez  $x$  i  $y$  pierwiastki wspomnianego równania, a przez  $X$  i  $Y$  ich wartości bezwzględne, to mamy

$$X = \zeta x, \quad Y = \eta y,$$

oznaczając przez  $\zeta$  i  $\eta$  pewne dwie liczby, z których każda równa się co do wartości bezwzględnej jedności. Ponieważ, przyjmując

$$\alpha = \zeta, \quad \beta = \alpha' = 0, \quad \beta' = 1,$$

mamy

$$X = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'}$$

oraz

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \zeta,$$

przeto (§ 142, tw. III), przy rozwijaniu liczb  $X$  i  $x$  na ułamki łańcuchowe arytmetyczne, otrzymamy dwa takie ułamki łańcuchowe, które tylko wyrazami początkowymi i mianownikami skończonych liczb początkowych ogniw różnić się będą mogły pomiędzy sobą. Zatem ułamek łańcuchowy, przedstawiający liczbę  $X$ , będzie ułamkiem łańcuchowym peryodycznym o takim samym peryodzie, co ułamek łańcuchowy peryodyczny, przedstawiający liczbę  $x$ . Na podstawie przyczyn całkiem analogicznych ta sama okoliczność zachodzić będzie także co do liczb  $Y$  i  $y$ . Zatem ze względu na twierdzenie, dopiero co uzasadnione, liczby  $X$  i  $Y$  posiadać będą rzeczywiście zapowiadzaną własność.