

§ 142. Teorya ułamków łańcuchowych arytmetycznych nadaje się do uzasadnienia różnych własności liczb całkowitych, liczb wymiernych i liczb niewymiernych. Przykładem tego są twierdzenia, które podajemy w tym paragrafie.

I. Jeżeli dwie liczby α i β są liczbami względnie pierwszymi pomiędzy sobą, to istnieje nieskończenie wiele takich układów wartości całkowitych na liczby x i y , żeby zachodziło równanie następujące:

$$\alpha y - \beta x = \varepsilon, \quad (1)$$

gdzie oznaczyliśmy przez ε liczbę daną, równą jednej z liczb $+1$ lub -1 ; jeżeli x_0 i y_0 przedstawia jeden z rzeczonych układów wartości liczb x i y , to uzyskamy ogólne wzory na taki układ wartości liczb x i y , przyjmując

$$\begin{aligned} x &= x_0 + p\alpha \\ y &= y_0 + p\beta, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie oznaczyliśmy przez p liczbę całkowitą dowolną.

Upewnijmy się najpierw, że zawsze istnieje para liczb całkowitych x_0 i y_0 , sprawdzających równanie

$$\alpha y_0 - \beta x_0 = \varepsilon. \quad (3)$$

W przypadku szczególnym, w którym mielibyśmy $\beta=0$, wartość bezwzględna liczby α mogłaby równać się tylko jedności. Mamy tedy

$$\alpha^2 = 1.$$

Jeżeli więc przyjmiemy

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \alpha\varepsilon,$$

to oczywiście uczynimy zadość równaniu (3).

Pozostaje do omówienia ogólny przypadek, w którym liczba β jest od zera odmienna. Oznaczywszy przez l i m wartości bezwzględne liczb α i β , mamy

$$\alpha = \zeta l, \quad \beta = \eta m, \quad (4)$$

oznaczając przez ζ i η liczby, sprawdzające równania

$$\zeta^2 = 1, \quad \eta^2 = 1. \quad (5)$$

Ponieważ mamy

$$m > 0,$$

przeto symbol

$$\frac{l}{m}$$

przedstawia pewną liczbę ułamkową. Rozwijając liczbę tę na ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny, uzyskamy na nią wzór następujący:

$$\frac{l}{m} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Uważając tedy liczby P_k i Q_k za określone wzorami (2) para-
grafu poprzedzającego, mamy

$$\frac{l}{m} = \frac{P_n}{Q_n},$$

a ponieważ obie liczby ułamkowe $\frac{l}{m}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$ są liczbami ułamkowymi nieprzywiedlnymi, przeto mamy

$$\begin{aligned} l &= P_n \\ m &= Q_n. \end{aligned}$$

Z drugiej strony (§ 138, tw. II) mamy

$$P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1} = (-1)^n.$$

Mamy więc

$$(6) \quad P_{n-1}m - lQ_{n-1} = (-1)^n.$$

Przyjmijmy

$$(7) \quad \begin{cases} x_0 = \eta (-1)^{n-1} \varepsilon P_{n-1} \\ y_0 = \zeta (-1)^{n+1} \varepsilon Q_{n-1}. \end{cases}$$

Na podstawie wzorów tych i wzorów (4) mamy

$$\alpha y_0 - \beta x_0 = \xi l \zeta (-1)^{n+1} \varepsilon Q_{n-1} - \eta m \eta (-1)^{n+1} \varepsilon P_{n-1},$$

skąd

$$(8) \quad \alpha y_0 - \beta x_0 = (lQ_{n-1} - mP_{n-1}) (-1)^{n+1} \varepsilon$$

na podstawie równości (5). Ze względu na równość (6) wynika z równości (8) równość

$$\alpha y_0 - \beta x_0 = -(-1)^n (-1)^{n+1} \varepsilon = -(-1)^{2n+1} \varepsilon = \varepsilon.$$

Zatem wartości (7) na x_0 i y_0 sprawdzają równanie (3), a ponieważ wartości te równają się liczbom całkowitym, przeto ostatecznie dowiedliśmy, że zawsze istnieją dwie liczby całkowite x_0 i y_0 , które sprawdzają równanie (3).

Winniśmy jeszcze dowieść, że wzory (2) są wzory ogólne na dwie liczby całkowite x i y , sprawdzające równanie (1).

Spostrzegamy natychmiast, że jakąkolwiek wartość całkowitą przyjąlibyśmy na p , wzory (2) dają nam na x i y wartości całkowite, sprawdzające równanie (1). Chodzi więc tylko o to, czy każdy układ wartości całkowitych liczb x i y , sprawdzający równanie (1), może być przedstawiony przez wzory (2), przyjąwszy na liczbę całkowitą p stosowną wartość? Żeby się w tym względzie upewnić, założmy tylko, że liczby x i y są liczbami całkowitemi, sprawdzającymi równanie (1), a liczby x_0 i y_0 — liczbami całkowitemi, czyniącymi zadość równaniu (3). Z równań (1) i (3) mamy

$$\begin{aligned} \alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0) &= 0, \\ \text{czyli} \qquad \qquad \qquad \alpha(y - y_0) &= \beta(x - x_0). \end{aligned} \tag{9}$$

Ponieważ liczby α i β są liczbami względnie pierwszymi pomiędzy sobą, przeto jedna przynajmniej z liczb α i β jest od zera odmienna, a drogą ewentualnej zmiany oznaczeń możemy zawsze tego dopiąć, żebyśmy mieli

$$\beta \neq 0.$$

Założmy, że warunek ten jest spełniony. Ponieważ liczba β jest na podstawie równania (9) dzielnikiem iloczynu $\alpha(y - y_0)$ i jest nadto względnie pierwsza w stosunku do liczby α , przeto liczba β jest dzielnikiem różnicy $y - y_0$. Mamy więc

$$y - y_0 = k\beta, \tag{10}$$

oznaczając przez k pewną liczbę całkowitą. Podstawiając wartość poprzedzającą różnicy $y - y_0$ w równaniu (9), otrzymujemy

$$\alpha \cdot k \cdot \beta = \beta \cdot (x - x_0),$$

a ponieważ mamy

$$\beta \neq 0,$$

przeto z równości powyższej mamy

$$x - x_0 = k\alpha.$$

Równość ta i równość (10) równoważne są równościami następującym:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + k\alpha \\ y &= y_0 + k\beta,\end{aligned}$$

w które przechodzą równości (2), gdy przyjmiemy $p = k$.

Dowiedliśmy więc, że wzory (2) rzeczywiście są ogólnymi wzorami na liczby całkowite x i y , sprawdzające równanie (1), a to tylko pozostawało jeszcze do uzasadnienia.

II. Jeżeli cztery liczby całkowite l, l', m i m' sprawdzają związki następujące:

$$(11) \quad m' > m > 0,$$

$$(12) \quad lm' - ml' = \varepsilon,$$

gdzie oznaczyliśmy przez ε liczbę równą jednej z liczb $+1$ lub -1 , to w takim razie, rozwijając liczbę $\frac{l'}{m'}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny

$$(13) \quad \frac{l'}{m'} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

i rezygnując przytem z żądania, ażeby ten ułamek łańcuchowy był koniecznie nieprzywiedlny, możemy zawsze osiągnąć to, żebyśmy mieli nie tylko

$$(14) \quad l' = P_n, \quad m' = Q_n,$$

ale także

$$(15) \quad l = P_{n-1}, \quad m = Q_{n-1},$$

uważając liczby P_k i Q_k za określone na podstawie wzorów (2) str. 655.

Istotnie, rozwiniawszy liczbę $\frac{l'}{m'}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny według wzoru (13), mielibyśmy w każdym razie

$$\frac{l'}{m'} = \frac{P_n}{Q_n},$$

Ponieważ zaś $\frac{P_n}{Q_n}$ jest liczbą ułamkową nieprzywiedlną, a liczba ułamkowa

$$\frac{l'}{m'}$$

również tę własność posiada, albowiem ze względu na równość (12) liczby l' i m' są liczbami względnie pierwszymi, przeto równości (14) będą zachodzić niezależnie od tego, czy ułamek łańcuchowy (13) jest czy nie jest nieprzywiedlny. Ponieważ z drugiej strony (tw. II, § 139) mamy

$$P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n = (-1)^n,$$

przeto

$$P_{n-1}m' - Q_{n-1}l' = (-1)^n. \quad (16)$$

Korzystając z tego, że nie jesteśmy skrepowani żądaniem, żeby ułamek łańcuchowy (13) był nieprzywiedlny, możemy zawsze zadość uczynić równości

$$(-1)^n = \varepsilon. \quad (17)$$

Istotnie, założmy, żeśmy ułamek łańcuchowy (13) tak utworzyli, żeby ten ułamek łańcuchowy był nieprzywiedlny. W takim razie równość (17) mogłaby nie zachodzić, ale mielibyśmy

$$a_n > 1$$

i moglibyśmy zatem zastąpić we wzorze (13) ostatnie ogniwo przez dwa ogniwa

$$\dot{+} \frac{1}{a_n - 1} \dot{+} \frac{1}{1}.$$

Mielibyśmy tedy

$$\frac{l'}{m'} = a_0 + \frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{1}{a_n - 1} \dot{+} \frac{1}{1}. \quad (18)$$

Zmieniając tedy oznaczenia, możemy oczywiście założyć, że przy zmienionych oznaczeniach, prawa strona równania (13) przedstawia ten ułamek łańcuchowy, który przedstawia, przy oznaczeniach pierwotnych, prawa strona równości (18).

Przy nowych oznaczeniach liczba całkowita, którą przedstawia symbol n , byłaby o jedność większa od tej, którą tenże symbol przedstawiał pierwotnie. Jeżeli więc przy pierwotnem znaczeniu symbolu n równość (17) nie zachodziła, to równość ta zachodziłaby niezawodnie przy nowem znaczeniu tego symbolu. Stwierdzamy więc, że wzór (13) rzeczywiście zawsze może być tak ustawiony, żeby równość (17) była spełniona. Założmy tedy, że okoliczność ta

zachodzi. W takim razie możemy równość (16) napisać w postaci następującej:

$$(19) \quad P_{n-1}m' - Q_{n-1}l' = \varepsilon.$$

Na podstawie tw. I-go wnosimy z równości (12) i (19), że mamy

$$\begin{aligned} l &= P_{n-1} + pl' \\ m &= Q_{n-1} + pm', \end{aligned}$$

oznaczając przez p pewną liczbę całkowitą. Ponieważ mamy

$$m' = Q_n > Q_{n-1} > 0,$$

a liczba p jest całkowita, przeto ta liczba nie może być ani mniejsza, ani większa od zera, bo w pierwszym przypadku mielibyśmy

$$m < 0,$$

a w drugim

$$m > m',$$

każda zaś z tych ewentualności znajdowałaby się w sprzeczności z nierównościami (11). Mamy więc $p=0$, skąd wynika, że równości (15) rzeczywiście zachodzić będą. Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

III. *Uważajmy dwie liczby niewymierne x i y , rozwinięte na ułamki łańcuchowe arytmetyczne według wzorów*

$$(1) \quad x = \left\{ a_0; \frac{1}{a_1} \right\}_{i=1}^{\infty},$$

$$(2) \quad y = \left\{ b_0; \frac{1}{b_k} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby istniały dwie takie liczby całkowite p i q , iżby równość

$$(3) \quad a_{p+t} = b_{q+t}$$

zachodziła przy wszystkich wartościach całkowitych od zera nie mniejszych liczby t , polega na istnieniu związku

$$(4) \quad y = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'},$$

gdzie oznaczyliśmy przez α, β, α' i β' cztery liczby całkowite, sprawdzające równość

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \zeta, \quad (5)$$

w której symbol ζ oznacza liczbę równą jednej z liczb $+1$ lub -1 .

1°. Podany warunek jest konieczny. Istotnie, założmy, że równość (3) zachodzi przy wszystkich od zera nie mniejszych wartościach całkowitych liczby t .

Jeżeli tedy oznaczmy ogólnie przez x_i mianownik uzupełniony ogniwa rzędu i ułamka łańcuchowego (1), a przez y_i analogiczny element w stosunku do ułamka łańcuchowego (2), to równość

$$x_{p+t} = y_{q+t}, \quad (6)$$

zachodzić będzie przy wszystkich od zera nie mniejszych wartościach całkowitych liczby t , albowiem (§ 139, tw. V)

$$x_{p+t} = \left\{ a_{p+t}; \frac{1}{a_t} \right\}_{i=p+t+1}^{\infty},$$

$$y_{q+t} = \left\{ b_{q+t}; \frac{1}{b_t} \right\}_{i=q+t+1}^{\infty},$$

a na podstawie równości (3) prawe strony tych równości przedstawiają identyczne pomiędzy sobą ułamki łańcuchowe. Uważając liczby P_k i Q_k za określone wzorami (2) paragrafu poprzedzającego, a liczby L_k i M_k za elementy analogiczne w stosunku do ułamka łańcuchowego (2), mamy (§ 139, tw. V) wzory następujące:

$$x = \frac{P_{p-1}x_p + P_{p-2}}{Q_{p-1}x_p + Q_{p-2}}, \quad (7)$$

$$y = \frac{L_{q-1}y_q + L_{q-2}}{M_{q-1}y_q + M_{q-2}}. \quad (8)$$

Z równości (7) mamy

$$x_p = \frac{-Q_{p-2}x + P_{p-2}}{Q_{p-1}x - P_{p-1}}, \quad (9)$$

a ponieważ na podstawie równości (6) mamy w szczególności

$$y_q = x_p,$$

przeto podstawiając na miejsce y_i we wzorze (8) wartość (9) liczby x_p , mamy

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'},$$

przyjmując

$$\begin{aligned}\alpha &= -L_{q-1}Q_{p-2} + L_{q-2}Q_{p-1} \\ \beta &= L_{q-1}P_{p-2} - L_{q-2}P_{p-1} \\ \alpha' &= -M_{q-1}Q_{p-2} + M_{q-2}Q_{p-1} \\ \beta' &= M_{q-1}P_{p-2} - M_{q-2}P_{p-1}.\end{aligned}$$

Równania te dają na α , β , α' i β' wartości całkowite. Z drugiej strony stwierdzamy drogą rachunku bezpośredniego (najprościej posługując się twierdzeniem o iloczynie dwóch wyznaczników), że mamy

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = (L_{q-1}M_{q-2} - M_{q-1}L_{q-2})(P_{p-1}Q_{p-2} - Q_{p-1}P_{p-2}),$$

a ponieważ (tw. II, § 139)

$$\begin{aligned}L_{q-1}M_{q-2} - M_{q-1}L_{q-2} &= (-1)^q, \\ P_{p-1}Q_{p-2} - Q_{p-1}P_{p-2} &= (-1)^p,\end{aligned}$$

przeto

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = (-1)^{p+q}$$

czyli

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \zeta,$$

przyjmując

$$\zeta = (-1)^{p+q}.$$

Dowiedliśmy więc, że podany warunek jest rzeczywiście konieczny.

2°. Warunek ten jest wystarczający. Załóżmy, że liczby x i y sprawdzają związek (4).

Zachowując oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się przed chwilą, i opierając się na tw. V-tem § 139-go, mamy

$$x = \frac{P_{i-1}x_i + P_{i-2}}{Q_{i-1}x_i + Q_{i-2}}.$$

Podstawiając wartość tę na x we wzorze (4) na y , otrzymujemy

$$(10) \quad y = \frac{(\alpha P_{i-1} + \beta Q_{i-1})x_i + (\alpha P_{i-2} + \beta Q_{i-2})}{(\alpha' P_{i-1} + \beta' Q_{i-1})x_i + (\alpha' P_{i-2} + \beta' Q_{i-2})}.$$

Gdy liczba i rośnie nieograniczenie, to każde z wyrażeń

$$(11) \quad \alpha' \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} + \beta' \quad \text{ i } \quad \alpha' \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}} + \beta'$$

zmierza do granicy

$$\alpha'x + \beta', \quad (12)$$

a wartość wyrażenia tego niezawodnie jest od zera odmienna, albowiem w razie przeciwnym mielibyśmy

$$x = -\frac{\beta'}{\alpha'}$$

i liczba x , wbrew założeniu, byłaby liczbą wymierną. Z tego zaś wynika, że przy dostatecznie wielkich wartościach wskaźnika i wyrażenia (11) równają się liczbom od zera odmiennym tego samego znaku, co liczba (12). Załóżmy, że liczba i ma wartość na tyle wielką, żeby ta okoliczność zachodziła, i oznaczmy przez η liczbę, co do wartości bezwzględnej równą jedności, a przytem takiego samego znaku, co liczba (12), następnie przyjmijmy

$$\left. \begin{aligned} l' &= \eta (\alpha P_{i-1} + \beta Q_{i-1}) \\ l &= \eta (\alpha P_{i-2} + \beta Q_{i-2}) \\ m' &= \eta (\alpha' P_{i-1} + \beta' Q_{i-1}) \\ m &= \eta (\alpha' P_{i-2} + \beta' Q_{i-2}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Mamy tedy

$$\left. \begin{aligned} m' &= \eta \left(\alpha' \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} + \beta' \right) Q_{i-1}, \\ m &= \eta \left(\alpha' \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}} + \beta' \right) Q_{i-2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ponieważ liczby Q_k są dodatnie, przeto z drugiej z tych równości mamy

$$m > 0. \quad (15)$$

Z drugiej strony, z pierwszej i drugiej równości (14) mamy

$$m' - m = \eta \left(\alpha' \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}} + \beta' \right) (Q_{i-1} - Q_{i-2}) + \eta \alpha' \left(\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} - \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}} \right) Q_{i-2},$$

a ponieważ (§ 138, tw. III, uwaga I) mamy

$$\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} - \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}} = \frac{(-1)^i}{Q_{i-1}Q_{i-2}},$$

przeto

$$m' - m = \eta \left(\alpha' \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}} + \beta' \right) (Q_{i-1} - Q_{i-2}) + \frac{\eta \alpha' (-1)^i}{Q_{i-1}}. \quad (16)$$

Wyrażenie

$$\eta \left(\alpha' \frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}} + \beta' \right)$$

zmierza, gdy i rośnie nieograniczenie, do granicy równej liczbie od zera większej

$$\eta (\alpha' x + \beta'),$$

różnica

$$Q_{i-1} - Q_{i-2},$$

jest w każdym razie liczbą całkowitą od zera większą, a wyrażenie

$$\frac{\eta \alpha' (-1)^i}{Q_{i-1}}$$

zmierza do zera, gdy i rośnie nieograniczenie.

Z uwag tych wynika, że przy dostatecznie wielkiej wartości liczby i , nie tylko wyrażenia (11) równać się będą odmiennym od zera liczbom tego samego znaku, co liczba (12), ale nadto wartość (16) różnicy $m' - m$ równać się będzie liczbie dodatniej.

Zakładamy obecnie, że liczba i ma pewną oznaczoną, na tyle wielką wartość, żeby wszystkie okoliczności powyższe rzeczywiście zachodziły. Mamy tedy

$$(17) \quad m' > m > 0.$$

Z drugiej znów strony, uwzględniając z definicyi liczby η wynikający związek

$$\eta^2 = 1,$$

stwierdzamy drogą bezpośredniego rachunku (najprościej, posługując się twierdzeniem o iloczynie dwóch wyznaczników), że zachodzi związek

$$lm' - ml' = (\alpha\beta' - \alpha'\beta) (P_{i-2}Q_{i-1} - P_{i-1}Q_{i-2}),$$

skąd

$$(18) \quad lm' - ml' = \xi (-1)^{i-1},$$

na podstawie równości (5) i związku

$$P_{i-2}Q_{i-1} - P_{i-1}Q_{i-2} = (-1)^{i-1}.$$

Na podstawie twierdzenia poprzedzającego wnosimy ze związków (17) i (18), że liczba ułamkowa $\frac{l'}{m'}$ może być rozwinięta na ułamek łańcuchowy arytmetyczny, według wzoru

$$\frac{l'}{m'} = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \dots + \frac{1}{c_s}}} \quad (19)$$

w taki sposób, żebyśmy mieli

$$\left. \begin{aligned} l' &= E_s & l &= E_{s-1} \\ m' &= F_s & m &= F_{s-1}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

określając ogólnie symbole E_k i F_k wzorami, w które przechodzą wzory (2) paragrafu poprzedzającego, gdy zastąpimy ciąg

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

przez ciąg

$$c_0, c_1, c_2, \dots$$

Na podstawie wzorów (10) i (13) mamy

$$y = \frac{l'x_i + l}{m'x_i + m},$$

czyli

$$y = \frac{E_s x_i + E_{s-1}}{F_s x_i + F_{s-1}} \quad (21)$$

ze względu na równości (20).

Uważajmy obecnie ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieskończony (\mathcal{E}), którego wyraz początkowy równa się liczbie c_0 , mianowniki s pierwszych ogniów — mianownikom ogniów ułamka łańcuchowego (19), a mianownik c_{s+t} każdego dalszego ogniwa rzędu $s+t$. mianownikowi a_{i+t-1} ogniwa rzędu $i+t-1$ ułamka łańcuchowego (1). Mamy tedy:

$$\left\{ c_0; \frac{1}{c_k} \right\}_{k=1}^{\infty} = \frac{E_s x_i + E_{s-1}}{F_s x_i + F_{s-1}}$$

na podstawie tw. V-go § 139-go. Z równości poprzedzającej i równości (21) mamy

$$y = \left\{ c_0; \frac{1}{c_k} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad (22)$$

a na podstawie tw. II-go § 140-go wnosimy z równości (2) i (22), że mamy

$$c_k = b_k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (23)$$

Uwzględniając definicyę ułamka łańcuchowego, stanowiącego prawą stronę równania (22), wnosimy z równości (23), że równość (3) zachodzić będzie dla wszystkich od zera nie mniejszych wartości całkowitych liczby t , jeżeli tylko przyjmiemy

$$p = i, \quad q = s + 1.$$

Zatem warunek, podany w twierdzeniu, jest rzeczywiście dostatecznym warunkiem okoliczności, wyrażonej w twierdzeniu. Uzasadniliśmy zatem w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

§ 143. W paragrafie tym przypuszczamy, że elementarna teoria równania drugiego stopnia znana jest czytelnikowi, i zbadamy bliżej okoliczności, które zachodzą przy rozwijaniu pierwiastków równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych na ułamki łańcuchowe arytmetyczne.

Wprowadzamy najpierw pojęcie ułamka łańcuchowego arytmetycznego peryodycznego.

Uważajmy ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieskończony

$$(1) \quad \left\{ a_0; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Żeby wyrazić, iż istnieją dwie takie liczby całkowite m i p ($p \geq 1$), żeby związek

$$(2) \quad i \geq m$$

pociągał za sobą równość

$$(3) \quad a_{i+p} = a_i,$$

orzekamy, że ułamek łańcuchowy (1) jest peryodyczny. Każdy ciąg postaci

$$a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+p-1},$$

który w razie równości $p=1$ sprowadza się do jedynego wyrazu

$$a_i,$$

zowie się, jeżeli tylko liczba i sprawdza związek (2), peryodem ułamka łańcuchowego (1).

Wprowadziwszy w § 54-tym pojęcie ułamka dziesiętnego peryodycznego, uzasadniliśmy między innemi twierdzenia, które jakkolwiek wyrażone były w terminologii liczb dziesiętnych, stanowią w rzeczywistości ogólne twierdzenia o ciągach nieskończonych, tę wła-