

przeto mamy

$$x_{k+1}Q_k > Q_{k-1},$$

skąd

$$\frac{x_{k+1}}{Q_{k-1}} > \frac{1}{Q_k}.$$

Na podstawie nierówności tej mamy ze wzorów (21)

$$\left| x - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \left| x - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right|,$$

na czem właśnie polega twierdzenie, o które chodzi. W dowodzie tym zakładaliśmy, że liczba k mniejsza jest od liczby ogniw rozważanego ułamka łańcuchowego, ale gdyby liczba k właśnie wspomnianej liczbie równała się, to mielibyśmy

$$x - \frac{P_k}{Q_k} = 0,$$

a ponieważ różnica

$$\left(x - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) - \left(x - \frac{P_k}{Q_k} \right) = \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{-(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$$

od zera jest odmienna, przeto i w tym przypadku twierdzenie musiałyby zachodzić.

§ 140. Obecnie przechodzimy do badania ułamków łańcuchowych regularnych, w których wyraz początkowy równa się jakiegokolwiek liczbie całkowitej, a mianownik każdego ogniwu liczbie całkowitej od jedności nie mniejszej. Takim ułamkiem łańcuchowym damy nazwę ułamków łańcuchowych arytmetycznych.

Jeżeli ostatnie ogniwo pewnego ułamka łańcuchowego arytmetycznego równa się jedności, to okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że rozważany ułamek łańcuchowy jest przywiedlny. Wszelki ułamek łańcuchowy arytmetyczny, który nie jest przywiedlny, zowie się ułamkiem łańcuchowym arytmetycznym nieprzywiedlnym. Zatem wszelki ułamek łańcuchowy nieskończony, jako ostatniego ogniwu nie posiadający i już dlatego przywiedlnym być nie mogący, zawsze jest nieprzywiedlny.

Ułamek łańcuchowy arytmetyczny przywiedlny możemy zawsze sprowadzić do ułamka łańcuchowego nieprzywiedlnego, w którym liczba ogniw o jedność jest mniejsza od liczby ogniw rozważanego ułamka łańcuchowego. Jeżeli bowiem pewien ułamek łańcuchowy

arytmetyczny przywiedlny ma jedno tylko ogniwo, to jest on postaci

$$a_0 + \frac{1}{1}$$

i równa się ułamkowi łańcuchowemu nieprzywiedlnemu o zeru ogniwach

$$a_0 + 1,$$

jeżeli zaś rozważany ułamek łańcuchowy ma więcej nad jedno ogniwo, to, usuwając ostatnie ogniwo i zwiększając jednocześnie mianownik ogniwa przedostatniego o jedność, oczywiście otrzymamy ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny, równy danemu.

Dwa ułamki łańcuchowe arytmetyczne zowią się identycznymi pomiędzy sobą w przypadku, kiedy ich wyrazy początkowe i mianowniki ogniw równorzędnych są pomiędzy sobą równe. Dwa ułamki łańcuchowe arytmetyczne identyczne pomiędzy sobą, oczywiście tylko jednocześnie mogą być skończonymi i mają w takim razie równe pomiędzy sobą liczby ogniw.

Uważajmy dwa, nie identyczne pomiędzy sobą, ułamki łańcuchowe arytmetyczne nieprzywiedlne

$$(1) \quad x = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$$

i

$$(2) \quad y = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots,$$

z których każdy będzie mógł być skończonym lub nieskończonym. Oczywiście istnieć będzie pewna najmniejsza taka liczba całkowita n , żeby przy $i = n$, równość

$$a_i = b_i$$

nie zachodziła albo dlatego, że zachodzi jedna z nierówności

$$a_n > b_n \quad \text{lub} \quad a_n < b_n,$$

albo dlatego, że liczba ogniw w jednym z rozważanych ułamków łańcuchowych równa się liczbie $n - 1$. W każdym razie możebnem będzie tak dobrać oznaczenia, żeby liczba ogniw ułamka łańcuchowego (1) od liczby n mniejszą nie była i żeby w przypadku, kiedy

liczba ogniów ułamka łańcuchowego (2) także od liczby n mniejszą nie jest, zachodziła nierówność

$$a_n < b_n.$$

Powiadam, że przy tych oznaczeniach zachodzi twierdzenie następujące:

I. W razie parzystości liczby n liczby x i y sprawdzają nierówność

$$x < y, \quad (3)$$

a w razie nieparzystości —

$$x > y. \quad (4)$$

Upewnijmy się najpierw, że twierdzenie zachodzi w przypadkach, kiedy liczba n równa się zeru. W takim razie mamy

$$a_0 < b_0. \quad (5)$$

Z drugiej strony na podstawie uwagi II-giej przy tw. III-ciem paragrafu poprzedzającego mamy

$$y \geq b_0. \quad (6)$$

Gdyby ułamek łańcuchowy, stanowiący prawą stronę równości (1) redukował się do początkowego wyrazu, albo posiadał jedno tylko ogniwo, to mielibyśmy albo

$$x = a_0,$$

albo

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

oraz

$$a_1 > 1$$

ze względu na to, że rozważany ułamek łańcuchowy jest nieprzywiedlny. Oczywiście w obu przypadkach zachodziłaby nierówność (3), ze względu na związki (5) i (6) i na to, że liczby a_0 i b_0 są całkowite. Jeżeli zaś liczba ogniów ułamka łańcuchowego, stanowiącego prawą stronę równości (1), jest od jedności większa, to na podstawie uwagi II-giej przy tw. III-ciem mamy

$$x < a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad (7)$$

a ponieważ a_0 , b_0 i a_1 są liczbami całkowitemi, z których a_1 od jedności mniejsza nie jest, przeto ze związków (5), (6) i (7) wynika znowu związek (3).

Założmy teraz, że liczba n ma jakąkolwiek, byle od jedności nie mniejszą wartość. W takim razie na podstawie tw. V-go paragrafu poprzedzającego mamy

$$(8) \quad x = \frac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}},$$

oznaczając przez x_n uzupełniony mianownik ogniwa rzędu n ułamka łańcuchowego (1).

Co do ułamka łańcuchowego (2), to dwa przypadki są możliwe: liczba ogniwi może równać się liczbie $n-1$ albo być od liczby tej większa. Ponieważ na podstawie definicji liczby n nierówność

$$i < n$$

pociąga za sobą równość

$$a_i = b_i,$$

przeto w przypadku pierwszym mamy

$$(9) \quad y = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

a w drugim

$$(10) \quad y = \frac{P_{n-1}y_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}y_n + Q_{n-2}},$$

oznaczając przez y_n uzupełniony mianownik ogniwa rzędu n -tego.

W razie istnienia wzoru (9) liczba y równa się reduktowi rzędu $n-1$ ułamka łańcuchowego (1), zatem mamy

$$y < x \quad \text{lub} \quad y > x,$$

zależnie od tego, czy liczba $n-1$ jest parzysta lub nieparzysta. Ponieważ liczba $n-1$ jest parzysta w razie nieparzystości liczby n , a nieparzysta w razie parzystości liczby n , przeto stwierdzamy, że w rozważanym przypadku istotny stan rzeczy zgodny jest z brzmieniem twierdzenia. Przypuśćmy nareszcie, że liczba ogniwi ułamka łańcuchowego (2) nie jest od liczby n mniejsza. W takim razie zachodzi wzór (10).

Ze wzorów (8) i (10) mamy

$$y - x = \frac{-(P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2})(y_n - x_n)}{(Q_{n-1}x_n + Q_{n-2})(Q_{n-1}y_n + Q_{n-2})},$$

skąd

$$(11) \quad y - x = \frac{(-1)^n (y_n - x_n)}{(Q_{n-1}x_n + Q_{n-2})(Q_{n-1}y_n + Q_{n-2})},$$

na podstawie związku

$$P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2} = (-1)^{n-1},$$

który zachodzi na podstawie tw. II-go paragrafu poprzedzającego.

Zważmy obecnie, że liczba y_n albo równa się liczbie b_n , albo równa się ułamkowi łańcuchowemu arytmetycznemu, którego wyraz początkowy równa się liczbie b_n ; analogicznie liczba x_n równa się albo liczbie a_n , albo ułamkowi łańcuchowemu arytmetycznemu, którego początkowym wyrazem jest liczba a_n . Ale ze względu na przyjęte oznaczenia mamy

$$a_n < b_n,$$

a stąd opierając się na tem, żeśmy twierdzenie, o które chodzi, uzasadnili w razie równości początkowych wyrazów, wnosimy, że mamy

$$x_n < y_n.$$

Uwzględniając nierówność poprzedzającą oraz tę okoliczność, iż mianownik wzoru, stanowiącego prawą stronę równania (11), jest dodatni, stwierdzamy natychmiast na podstawie tego równania, że mamy

$$y - x > 0 \quad \text{lub} \quad y - x < 0,$$

czyli

$$x < y \quad \text{lub} \quad x > y,$$

zależnie od tego, czy liczba n jest parzysta czy nieparzysta. Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Natychmiastowem następstwem powyższego twierdzenia jest twierdzenie następujące:

II. *Jeżeli dwa ułamki łańcuchowe arytmetyczne nieprzywiedlne są pomiędzy sobą równe, to one są sobie identyczne.*

Jeżeli, rozszerzając nieco znaczenie wyrażenia „ułamek łańcuchowy arytmetyczny“, umówimy się, że rozumieć będziemy przez nazwę „ułamek łańcuchowy arytmetyczny o liczbie ogniw równej zeru“ liczbę całkowitą jakąkolwiek, to w takim razie możemy uzasadnić twierdzenie następujące:

III. *Każdej liczbie rzeczywistej x odpowiada jeden, i tylko jeden równy jej ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny.*

To samo twierdzenie wyrażamy także w sposób następujący: *każda liczba rzeczywista x jest jednoznacznie rozwijalna na ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny.*

Upewnijmy się najpierw, że każdej liczbie rzeczywistej x odpowiada przynajmniej jeden ułamek łańcuchowy jej równy. Okoliczność ta oczywiście zachodzi w razie, kiedy liczba x równa się jakiegokolwiek liczbie całkowitej a_0 dodatniej, zerowej lub ujemnej, albowiem ułamek łańcuchowy o liczbie ogniów równej zeru i o początkowym wyrazie równym liczbie a_0 oczywiście jest ułamkiem łańcuchowym równym liczbie x . Załóżmy więc, że liczba x liczbą całkowitą nie jest.

W takim razie istnieć będzie pewna liczba całkowita a_0 taka, iż mieć będziemy

$$a_0 < x < a_0 + 1.$$

Przyjawszy tedy

$$(1) \quad x = a_0 + \frac{1}{x_1},$$

mamy

$$(2) \quad x_1 > 1.$$

Gdybyśmy uzyskali na x_1 wartość całkowitą, to prawa strona równości (1) przedstawiałaby ułamek łańcuchowy, którego istnienie pragnęliśmy udowodnić. Gdyby zaś okoliczność ta nie zachodziła, to moglibyśmy przyjąć:

$$(3) \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},$$

oznaczając przez a_1 liczbę całkowitą od jedności nie mniejszą, a przez x_2 , pewną liczbę od jedności większą, a w takim razie mielibyśmy

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}.$$

Założmy chwilowo, żeśmy wyznaczyli $n - 1$ ($n \geq 2$) liczb całkowitych od zera większych

$$(4) \quad a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$$

i liczbę x_n od jedności większą w taki sposób, żeby ułamek łańcuchowy o n ogniach, wyprowadzony z ułamka łańcuchowego o $n - 1$ ogniach

$$\left\{ a_0, \frac{1}{a_k} \right\}_{k=1}^{n-1}$$

przez zastąpienie mianownika a_{n-1} ostatniego ogniwa wyrażeniem

$$a_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

równał się liczbie x . Gdyby w takim razie wypadła na x_n wartość równa pewnej liczbie całkowitej a_n , to liczbie x równy ułamek łańcuchowy

$$\left\{ a_0; \frac{1}{a_k} \right\}_{k=1}^n$$

byłby ułamkiem łańcuchowym, którego istnienie pragnęliśmy udowodnić. Gdybyśmy zaś na x_n uzyskali wartość nie całkowitą, to moglibyśmy przyjąć

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}},$$

oznaczając przez a_n liczbę całkowitą od jedności nie mniejszą, a przez x_{n+1} liczbę od jedności większą, a w takim razie założenia poczynione co do ciągu (4) i co do liczby x_n , sprawdzałyby się co do ciągu

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_{n-1}, a_n$$

i co do liczby x_{n+1} . Z rozważań powyższych wynika, że w razie, kiedy nie istnieje ułamek łańcuchowy arytmetyczny skończony, równy liczbie x , istnieje ciąg nieskończony

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad (5)$$

liczb całkowitych od zera większych i ciąg nieskończony

$$x_1, x_2, x_n, \dots \quad (6)$$

liczb od jedności większych, które mają własność następującą: jeżeli w ułamku łańcuchowym

$$\left\{ a_0; \frac{1}{a_k} \right\}_{k=1}^{n-1},$$

gdzie oznaczyliśmy przez n jakąkolwiek od jedności większą liczbę całkowitą, zastąpimy mianownik ostatniego ogniwa przez wyrażenie

$$a_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

to uzyskamy ułamek łańcuchowy $E(x_n)$ o n ogniwach równych liczbie x . Ułamek łańcuchowy $E(x_n)$ równa się oczywiście wynikowi zastąpienia ostatniego ogniwa a_n w redukcji R_n rzędu n

ułamka łańcuchowego arytmetycznego nieskończonego następującego:

$$(7) \quad \left\{ a_0; \frac{1}{a_k} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Powiadam, że mamy

$$(8) \quad x = \left\{ a_0; \frac{1}{a_k} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Jakoż, zachowując dla symbolów P_k i Q_k znaczenie, nadane im w paragrafie poprzedzającym, mamy

$$R_n = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}},$$

gdzie P_{n-1} , P_{n-2} , Q_{n-1} i Q_{n-2} przedstawiają wyrażenia, do których a_n nie wchodzi. Na podstawie założeń, poczynionych o ciągach (5) i (6), mamy

$$x = \frac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}},$$

skąd

$$(9) \quad \begin{cases} x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2}}{Q_{n-1}(Q_{n-1}x_n + Q_{n-2})} \\ \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} - x = \frac{(P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2})x_n}{Q_{n-2}(Q_{n-1}x_n + Q_{n-2})}. \end{cases}$$

Zważywszy, że mamy

$$x_n > 1,$$

a więc tem bardziej

$$x_n > 0,$$

wnosimy ze wzorów (9), uwzględniając jeszcze równość

$$P_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-1}Q_{n-2} = (-1)^{n-1},$$

że liczba x większa jest od każdego reduktu rzędu parzystego, ale mniejsza od każdego reduktu rzędu nieparzystego ułamka łańcuchowego (8).

Upamiętniwszy sobie treść i dowód tw. IV-go § 139-go, czytelnik stwierdzi, że powyższe własności charakteryzują wartość ułamka łańcuchowego (7); mamy więc

$$x = \left\{ a_0; \frac{1}{a_k} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Ostatecznie wszelka liczba rzeczywista jest rozwijalna na ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny, a ponieważ, ze względu na tw. II-gie dwa nieidentyczne pomiędzy sobą ułamki łańcuchowe arytmetyczne nieprzywiedlne nie mogą równać się sobie i dlatego nie mogą równać się z osobna tej samej liczbie, przeto każda liczba rzeczywista nie tylko jest rozwijalna na ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny, ale jest jednoznacznie rozwijalna na taki ułamek łańcuchowy. Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

IV. *Każda liczba wymierna w rozwijalna jest na ułamek łańcuchowy arytmetyczny skończony nieprzywiedlny.*

Twierdzenie jest oczywiste w razie, kiedy liczba w jest liczbą całkowitą. Zakładamy tedy, że liczba w liczbą całkowitą nie jest.

Gdyby liczba w liczbą dodatnią nie była, to liczbę tę mogliśmy przedstawić przez wzór

$$w = -l + w', \quad (1)$$

gdzie l i w' oznaczają stosownie dobrane liczby wymierne dodatnie, z których l jest liczbą całkowitą.

Zatem gdyby twierdzenie zachodziło co do liczb wymiernych dodatnich, to zachodziłoby także i co do liczb wymiernych ujemnych, albowiem na podstawie równości (1) rozwinięcie liczby w na ułamek łańcuchowy arytmetyczny wyprowadzilibyśmy z analogicznego rozwinięcia liczby w' , zastępując w ułamku łańcuchowym, przedstawiającym liczbę w' , wyraz początkowy a'_0 przez sumę $a'_0 - l$. Możemy więc założyć bez szkody dla ogólności, że mamy

$$w > 0.$$

Przyjmijmy to założenie. Mamy tedy

$$w = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}, \quad (2)$$

oznaczając przez ϱ_1 i ϱ_2 dwie liczby całkowite. Postępując, jak gdyby chodziło o wyznaczenie największego wspólnego dzielnika liczb ϱ_1 i ϱ_2 , tworzymy ciąg

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1}, \varrho_n, \varrho_{n+1}, \quad (3)$$

którego pierwszymi dwoma wyrazami są liczby ϱ_0 i ϱ_1 , a każdym dalszym ϱ_i — reszta podziału liczby całkowitej ϱ_{i-2} przez liczbę

całkowitą q_{i-1} . Wiemy z teorii największego wspólnego dzielnika dwóch liczb całkowitych, że układowi liczb całkowitych q_0 i q_1 odpowiada pewna taka wartość całkowita i dodatnia na liczbę n , przy której liczba q_n podzielna jest przez liczbę q_{n+1} . Załóżmy, że na liczbę n przyjęliśmy przy tworzeniu ciągu (3) tę właśnie wartość (w którym to przypadku liczba q_{n+1} przedstawia największy wspólny dzielnik liczb q_0 i q_1); przyjmijmy ogólnie

$$x_i = \frac{q_i}{q_{i+1}}$$

i oznaczmy przez a_i całkowitą część ilorazu podziału liczby q_i przez liczbę q_{i+1} . Mamy tedy

$$w = x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_i = a_i + \frac{1}{x_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2)$$

oraz

$$x_n = a_n.$$

Z równości tych wynika natychmiast (co czytelnik z łatwością sam dowiedzie z całą ścisłością drogą indukcji matematycznej), że mamy

$$(4) \quad w = \left\{ a_0; \frac{1}{a_k} \right\}_{k=1}^n.$$

Ułamek łańcuchowy, stanowiący prawą stronę równania (4), jest nieprzywiedlny, albowiem mamy oczywiście

$$q_{n+1} < q_n,$$

skąd wynika, że liczba całkowita a_n , sprawdzająca równość

$$q_{n-1} a_n = q_n$$

większa jest od jedności. Zatem każda liczba wymierna dodatnia, a więc na podstawie uwagi, uczynionej na początku dowodu, każda jakakolwiek liczba wymierna jest zgodnie z brzmieniem twierdzenia rozwijalna na ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny.

Uwaga. Spostrzegamy natychmiast, że każdy ułamek łańcuchowy arytmetyczny skończony równa się liczbie wymiernej, zatem nie tylko każda liczba wymierna jest rozwijalna na ułamek łańcu-

chowy skończony, ale i odwrotnie, każda liczba rozwijalna na ułamek łańcuchowy arytmetyczny skończony jest liczbą wymierną.

V. Jeżeli pewna liczba x równa się ułamkowi łańcuchowemu arytmetycznemu nieskończonemu (\mathcal{E}), to ta liczba jest liczbą niewymierną.

Istotnie, gdyby przy założeniach twierdzenia liczba x była liczbą wymierną, to na podstawie twierdzenia poprzedzającego istniałby ułamek łańcuchowy arytmetyczny skończony nieprzywiedlny (\mathcal{E}'), równy liczbie x , i liczba ta wbrew tw. III-mu rozwijalna byłaby na dwa nie identyczne pomiędzy sobą ułamki łańcuchowe arytmetyczne nieprzywiedlne (\mathcal{E}) i (\mathcal{E}').

§ 141. Postać ułamka łańcuchowego arytmetycznego nieprzywiedlnego, podobnie jak postać liczby dziesiętnej normalnej, jest na podstawie twierdzeń paragrafu poprzedzającego dla każdej liczby rzeczywistej jedną z postaci charakterystycznych, w których tę liczbę przedstawić możemy. Ze stanowiska techniki rachunkowej ułamki łańcuchowe mniej są dogodne od liczb dziesiętnych, ale posiadają natomiast zalety, które czynią z nich narzędzia daleko bardziej od liczb dziesiętnych potężne do głębszego zbadania natury liczb.

Najpierw na podstawie ostatnich twierdzeń paragrafu poprzedzającego ułamek łańcuchowy arytmetyczny jest skończony lub nieskończony, zależnie od tego, czy liczba, którą przedstawia, jest wymierna lub niewymierna, podczas gdy pewne ułamki dziesiętne nieskończone przedstawiać mogą liczby wymierne.

Następnie, jak się o tem niebawem przekonamy, reduktę oznaczonego ułamka łańcuchowego arytmetycznego stanowią szczególnie ważnymi własnościami odznaczające się wartości przybliżone liczby, którą przedstawia rozważany ułamek łańcuchowy.

Oznaczmy przez x jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, założmy, że wzór

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots \quad (1)$$

przedstawia rozwinięcie liczby x na ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny, i jakeśmy to uczynili w § 139-tym, uważajmy liczby P_k i Q_k , określone równaniami następującymi:

$$\left. \begin{aligned} P_{-1} &= 1, & Q_{-1} &= 0, \\ P_0 &= a_0, & Q_0 &= 1, \\ P_k &= P_{k-1}a_k + P_{k-2} & (k = 1, 2, 3, \dots) \\ Q_k &= Q_{k-1}a_k + Q_{k-2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

W takim razie na podstawie tw. I-go § 139-go mamy

$$(3) \quad R_k = \frac{P_k}{Q_k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

oznaczając przez R_k redukt rzędu k ułamka łańcuchowego (1). Żeby ułatwić czytelnikowi wytworzenie sobie należytego pojęcia o własnościach reduktów ułamka łańcuchowego (1) i wzorów (3) na wartości tych reduktów, wysłowimy najpierw twierdzenia, na których własności te polegają, następnie uwydatnimy znaczenie tych twierdzeń, a potem dopiero uzasadnimy je kolejno.

I. Liczby P_k i Q_k są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi; ciąg

$$(4) \quad Q_0, Q_1, Q_2, \dots$$

jest w znaczeniu ścisłym ciągiem wzrastającym liczb całkowitych od zera większych, a ciąg

$$(5) \quad P_0, P_1, P_2, \dots$$

jest ciągiem, który w razie nierówności

$$(6) \quad a_0 > 0$$

jest także w znaczeniu ścisłym ciągiem wzrastającym liczb całkowitych od zera większych; jeżeli zachodzi równość

$$(7) \quad a_0 = 0,$$

to ciąg (5) zachowuje jeszcze własności powyższe z tą jedyną odmianą, iż mamy wtedy

$$(8) \quad P_0 = 0;$$

jeżeli nareszcie mamy

$$(9) \quad a_0 < 0,$$

to po usunięciu wyrazu P_0 ciąg (5) przemienia się w ciąg malejący liczb całkowitych. W każdym więc razie mamy

$$(10) \quad |P_k| < |P_{k+1}| \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

II. Redukt $R_k < \frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geq 0$) ułamka łańcuchowego (1) przedstawia przybliżenie liczby x z niedoborem lub nadmiarem, zależnie od

tego, czy wskaźnik k ma wartość parzystą czy nieparzystą, w każdym jednak razie mamy

$$\left| x - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k^2}. \quad (11)$$

Twierdzenie, polegające na tej nierówności, zasługuje na szczególniejszą uwagę, a to z przyczyny następującej: przyjąwszy dowolnie pewną liczbę całkowitą od zera większą m , możemy tak wyznaczyć drugą liczbę całkowitą l , na którą może wypaść jakakolwiek wartość ujemna lub dodatnia, żebyśmy mieli

$$\left| x - \frac{l}{m} \right| \leq \frac{1}{2m}$$

albowiem, wyznaczysz liczbę całkowitą n tak, żebyśmy mieli

$$\frac{n}{m} \leq x < \frac{n+1}{m},$$

i przyjąwszy na l wartość n lub $n+1$ zależnie od tego, czy mamy

$$x - \frac{n}{m} \leq \frac{n+1}{m} - x,$$

czy też

$$x - \frac{n}{m} > \frac{n+1}{m} - x,$$

oczywiście wyznaczymy pomiędzy liczbami ułamkowymi o mianowniku l tę, która przedstawia liczbę x z błędem możliwie małym; otóż przy tych warunkach mamy tylko pewność, że błąd, z którym przedstawia liczbę x liczba $\frac{l}{m}$, co do bezwzględnej wartości, nie może być większy od $\frac{1}{2m}$. Zestawiając okoliczność tę z nierównością (11),

poznajemy, że liczby ułamkowe $\frac{P_k}{Q_k}$ dostarczają, w stosunku do wartości swych mianowników, wyjątkowo dokładne wartości przybliżone liczby, którą przedstawia odnośny ułamek łańcuchowy.

III. Mamy

$$\left| x - \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \right| < \left| x - \frac{P_k}{Q_k} \right|, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

innemi słowy: kolejne reduktu ułamka łańcuchowego (1) dają wartości przybliżone liczby x z błędami coraz to mniejszymi.

IV. Jeżeli pewna liczba y , wymierna lub niewymierna, sprawdza nierówność

$$(13) \quad |x - y| < |x - R_k| \quad (k \geq 1),$$

jeżeli, innymi słowy, liczba y przedstawia przybliżenie liczby x z błędem mniejszym od błędu, z którym przedstawia tę liczbę redukt pewnego rzędu k ułamka łańcuchowego (1), to w takim razie ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny (E), przedstawiający liczbę y , posiada przynajmniej tyle ogniw, ile wynosi liczba k , a wyraz początkowy tego ułamka łańcuchowego, oraz (w razie nierówności $k > 1$) mianowniki pierwszych $k-1$ jego ogniw równają się odpowiednio wyrazowi początkowemu i mianownikom pierwszych $k-1$ ogniw ułamka łańcuchowego (1).

V. Jeżeli liczba y , uważana w twierdzeniu poprzedzającym, równa się pewnej liczbie ułamkowej

$$\frac{l}{m},$$

gdzie l i m oznaczają dwie liczby całkowite, z których m jest dodatnia, to w takim razie mamy

$$m > Q_k.$$

Zestawiając twierdzenie to z tw. II-giem, spostrzegamy, że rozważane twierdzenie uwypatnia z nowego punktu widzenia wyjątkowe własności, które przysługują reduktom ułamka łańcuchowego arytmetycznego nieprzywiedlnego, kiedy redukty te uważamy za wartości przybliżone liczby, którą przedstawia odnośny ułamek łańcuchowy.

Przechodzimy obecnie do uzasadnienia wysłowionych twierdzeń.

Drogą indukcji matematycznej stwierdzamy, opierając się na wzorach (2), że liczby P_k i Q_k są liczbami całkowitemi, i upewniamy się z łatwością tą samą metodą, że ciągi (4) i (5) posiadają w tw. I-szem wymienione własności. Zatem, żeby uzasadnić w zupełności tw. I-sze, pozostaje tylko do udowodnienia, że liczby P_k i Q_k są liczbami względnie pierwszymi.

Otóż na podstawie tw. II-go § 139-go mamy

$$(14) \quad P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^k.$$

Z równości tej wynika natychmiast, że największy wspólny dzielnik liczb P_k i Q_k musi być dzielnikiem liczby $(-1)^k$, a więc

liczby, która równa się albo $+1$ albo -1 . Ponieważ jedynymi dzielnikami każdej z tych liczb są liczby

$$-1 \text{ i } +1,$$

przeto największy wspólny dzielnik liczb P_k i Q_k równa się jedności. Innymi słowy, liczby P_k i Q_k są rzeczywiście liczbami całkowitemi względnie pierwszymi. Uzasadniliśmy zatem w zupełności tw. I-sze.

Przechodzimy teraz do tw. II-go. Jeżeli liczba k mniejsza jest od liczby ogniw wspomnianego ułamka łańcuchowego, to na podstawie uwagi II-giej przy tw. III-ciem § 139-go redukt R_k ułamka łańcuchowego (1) jest mniejszy lub większy od liczby x , zależnie od tego czy liczba k jest parzysta lub nieparzysta. Z drugiej strony, gdy liczba k sprawdza warunek powyższy, to redukt R_{k+1} istnieje, a ponieważ w takim razie na podstawie tego, cośmy powiedzieli przed chwilą, liczba x położona jest pomiędzy liczbami R_k i R_{k+1} , jeżeli tylko nie zachodzi równość

$$x = R_{k+1},$$

t. j. jeżeli liczba ogniw rozważanego ułamka łańcuchowego nie równa się liczbie $k+1$, przeto mamy w każdym razie

$$|x - R_k| \leq |R_{k+1} - R_k|.$$

Uwzględniając związek (§ 139, tw. III, uwaga I)

$$R_{k+1} - R_k = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k+1}},$$

oraz nierówność

$$Q_{k+1} > Q_k,$$

wyprowadzamy łatwo nierówność (11) ze związków poprzedzających i uwag poczynionych wyżej. W rozumowaniu tem zakładaliśmy, że liczba k mniejsza jest od liczby ogniw rozważanego ułamka łańcuchowego. Zważywszy jednak, że w razie, gdyby liczba k równała się tej liczbie, mielibyśmy

$$x = \frac{P_k}{Q_k},$$

spostrzegamy więc, że twierdzenie zachodzi także i w tym przypadku. Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności tw. II-gie.

Twierdzenie III-cie objęte jest oczywiście jako przypadek szczególny w tw. VI-tem § 139-go.

Żeby uzasadnić tw. IV-te, przyjmijmy, że założenia twierdzenia tego zachodzą, i zważmy, iż na podstawie twierdzenia poprzedzającego mamy

$$|x - R_k| < |x - R_{k-1}|,$$

Zestawiając nierówność tę z nierównością (13), otrzymujemy

$$|x - y| < |x - R_{k-1}|.$$

Ponieważ liczba x położona jest pomiędzy liczbami R_{k-1} i R_k , przeto na podstawie nierówności powyższej i nierówności (13), liczba y także położona będzie pomiędzy liczbami R_{k-1} i R_k . Uważajmy ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieprzywiedlny, na który liczba y może być rozwinięta, i oznaczmy przez b_0 wyraz początkowy, oraz ogólnie przez b_i mianownik rzędu i -tego ułamka łańcuchowego. Mamy tedy

$$(15) \quad y = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots$$

Gdyby powyższy ułamek łańcuchowy nie posiadał wszystkich w twierdzeniu zapowiadanych własności, to istniałaby pewna taka najmniejsza, od liczby k nie większa, wartość p wskaźnika i , żeby równość

$$b_i = a_i$$

dla $i = p$ nie zachodziła albo dlatego, że liczba ogniw ułamka łańcuchowego (15) równa się $p - 1$, albo dla tego, iż mamy

$$(16) \quad b_p \neq a_p.$$

Zwróćmy się najpierw do przypadku pierwszego. W tym przypadku liczba $p - 1$ przedstawia liczbę ogniw ułamka łańcuchowego (15), a nierówność

$$(17) \quad i < p$$

pociąga za sobą równość

$$(18) \quad b_i = a_i.$$

Ponieważ zaś liczba ogniw ułamka łańcuchowego (15) równa się $p - 1$, przeto sam ten ułamek łańcuchowy równałby się reduktowi R_{p-1} rzędu $p - 1$ ułamka łańcuchowego (1). Mielibyśmy więc

$$y = R_{p-1}.$$

Ponieważ mamy $p \leq k$, przeto na podstawie tw. III-go § 139-go liczba R_{p-1} , a więc i równa jej liczba y , wbrew temu, o czem przekonał się wyżej, nie byłaby położona pomiędzy liczbami R_{k-1} i R_k . Zatem omawiany przypadek wydarzyć się nie może. Załóżmy więc, że liczba ogniw ułamka łańcuchowego (15) od liczby p mniejsza nie jest. W takim razie zachodzi nierówność (16). Gdybyśmy tedy mieli $p = k$, to ze względu na to, iż nierówność (17) pociąga za sobą równość (18), zachodziłyby właśnie okoliczności, o stwierdzenie których chodzi. Zakładamy więc, że mamy

$$p < k. \quad (19)$$

Liczba p może być parzystą lub nieparzystą. Załóżmy najpierw, że liczba p jest parzysta. Ponieważ zachodzi nierówność (16), przeto mamy albo

$$b_p < a_p, \quad (20)$$

albo

$$b_p > a_p. \quad (21)$$

Na podstawie tw. I-go § 140-go mielibyśmy

$$y < R_p$$

w razie nierówności (20), a w razie nierówności (21) mielibyśmy

$$y > R_{p+1}.$$

Ponieważ zaś mamy

$$R_p < R_{p+1}$$

ze względu na parzystość liczby p , ponieważ z drugiej strony, ze względu na nierówność (19) i na tw. III-cie § 139-go żadna z liczb R_{k-1} i R_k nie może być mniejsza od R_p , ani większa od R_{p+1} , przeto liczba y , wbrew temu, cośmy stwierdzili wyżej, nie mogłaby być położona pomiędzy liczbami R_{k-1} i R_k . Gdyby znów liczba p była nieparzysta, to mielibyśmy

$$R_p > R_{p+1},$$

nierówność (20) pociągałaby za sobą nierówność

$$y > R_p,$$

a nierówność (21) nierówność

$$y < R_{p+1},$$

zatem i w tym przypadku liczba y nie byłaby położona pomiędzy liczbami R_{k-1} i R_k .

Z rozważań powyższych wynika, że liczba ogniw ułamka łańcuchowego (15) od liczby k mniejsza być nie może, a nierówność

$$i < k$$

pociąga za sobą równość

$$b_i = a_i.$$

Uzasadniliśmy zatem w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Twierdzenie V-te moglibyśmy wyprowadzić łatwo z twierdzenia poprzedzającego, ale możemy uzasadnić je jeszcze prościej w sposób następujący: rozwijając dowód twierdzenia poprzedzającego, stwierdziliśmy, że liczba y położona być musi pomiędzy wartościami reduktów R_{k-1} i R_k , zatem liczba ułamkowa

$$\frac{l}{m}$$

położona być musi pomiędzy tymi reduktami; mamy więc

$$\left| \frac{l}{m} - R_{k-1} \right| < \left| R_k - R_{k-1} \right|$$

czyli

$$\left| \frac{l}{m} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right| < \left| \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right|,$$

skąd

$$\left| \frac{l}{m} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right| < \frac{1}{Q_k Q_{k-1}}$$

na podstawie uwagi I-szej przy tw. III-ciem § 139-go. Z nierówności powyższej mamy

$$|lQ_{k-1} - mP_{k-1}| < \frac{|m|}{Q_k},$$

a ponieważ lewa strona tej nierówności równa się liczbie całkowitej od zera odmiennej, przeto mamy

$$|m| > Q_k,$$

o co właśnie chodziło.