

kraczącemi nasze siły. Zatem *nie posiadamy żadnej całkiem ogólnej metody oznaczania cyfr danej liczby* (§ 129) *dodatkowej*. Natomiast liczne są przypadki szczególne, w których posiadamy metody regularne do rozwiązywania tego zagadnienia; najprostsze z nich omówimy w paragrafach następujących.

§ 135. Wiemy (§ 94), że każdej od zera większej liczbie a odpowiada dokładnie jedna liczba także od zera większa x , która sprawdza równanie

$$x^m = a,$$

gdzie oznaczyliśmy przez m daną liczbę całkowitą od jedności większą. Zwążając, w interesie prostszego wysławiania się, znaczenie wyrażenia pierwiastek n -tego stopnia, przyjmować będziemy w dalszym ciągu za nazwę liczby x wyrażenie pierwiastek m -tego stopnia liczby a , zamiast wyrażenia „dodatni pierwiastek m -tego stopnia tej liczby“. W przypadkach szczególnych, kiedy liczba m równa się liczbie 2, albo liczbie 3, zowiemy liczbę x odpowiednio pierwiastkiem kwadratowym albo sześciennym liczby a .

Istnieje ogólna metoda do wyznaczania wszystkich cyfr aż do cyfry dowolnie danego rzędu pierwiastka danego stopnia m danej liczby a w przypadku, kiedy posiadamy środki do wyznaczania wszystkich cyfr liczby a aż do cyfry dowolnie danego rzędu. Żeby podać przykład zastosowania ogólnych rozważań, wyłożonych w paragrafie poprzedzającym, omówimy metodę tę, poprzestając jednak dla krótkości na przypadkach, w których chodzi o pierwiastek kwadratowy lub sześcienny; czytelnik z łatwością sam spostrzeże, w jaki sposób należałoby postępować, gdyby chodziło o pierwiastek stopnia jakiegokolwiek.

Jakąkolwiek liczbę, byle od zera większą, oznaczylibyśmy przez L , zawsze istnieje jedna i tylko jedna liczba całkowita N , sprawdzająca związek

$$N^2 \leq L < (N+1)^2.$$

Liczba N zowie się całkowitą częścią pierwiastka kwadratowego liczby L i jest oczywiście największą liczbą całkowitą, której kwadrat od liczby L większy nie jest.

Różnica

$$L - N^2$$

zowie się resztą z wyznaczania części całkowitej pierwiastka kwadratowego liczby L .

I. Liczba jednostek dziesiętnych jakiegokolwiek rzędu p (czyli wartości 10^{-p}) pierwiastka kwadratowego x dowolnie danej liczby dodatniej a , równa się całkowitej części pierwiastka kwadratowego liczby jednostek dziesiętnych rzędu $2p$ (a więc wartości 10^{-2p}) liczby a , jakąkolwiek wartość ujemną, zerową lub dodatnią miałyby liczba p .

Istotnie, oznaczając ogólnie przez x_i cyfrę rzędu i liczby x , mamy

$$x = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{10^i},$$

gdzie liczba całkowita n temu tylko ograniczeniu podlega, żeby nie była większa od pewnej oznaczonej liczby, zależnej wyłącznie od wartości liczby x . Wobec tego możemy założyć, że mamy

$$n \leq p.$$

Mamy tedy

$$(1) \quad x \geq \frac{X_p}{10^p},$$

$$(2) \quad x < \frac{X_p + 1}{10^p},$$

przyjmując

$$X_p = \sum_{i=n}^p x_i \cdot 10^{p-i},$$

i oznaczając zatem przez X_p liczbę jednostek rzędu p liczby x .

Oznaczmy ogólnie przez a_i cyfrę, a przez A_i liczbę jednostek dziesiętnych rzędu i liczby a . Mamy tedy

$$a = \sum_{i=\alpha}^{\infty} \frac{a_i}{10^i},$$

oraz

$$A_i = \sum_{t=\alpha}^i a_t 10^{i-t}.$$

Ze wzorów tych mamy

$$(3) \quad a \geq \frac{A_{2p}}{10^{2p}},$$

$$(4) \quad a < \frac{A_{2p} + 1}{10^{2p}}.$$

Ponieważ mamy

$$x^2 = a, \quad (5)$$

przeto na podstawie związków (1) i (4) mamy

$$\left(\frac{X_p}{10^n}\right)^2 < \frac{A_{2p} + 1}{10^{2p}},$$

skąd

$$X_p^2 < A_{2p} + 1,$$

a ponieważ liczby X_p i A_{2p} są liczbami całkowitemi, przeto z nierówności tej wynika związek następujący:

$$X_p^2 \leq A_{2p}. \quad (6)$$

Z drugiej strony, ze związków (2), (3) i (5) mamy

$$\left(\frac{X_p + 1}{10^n}\right)^2 > \frac{A_{2p}}{10^{2p}},$$

skąd

$$(X_p + 1)^2 > A_{2p}. \quad (7)$$

Związki (6) i (7) wyrażają łącznie właśnie to twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Na podstawie twierdzenia powyższego możemy wyznaczyć pierwszą cyfrę od zera odmienną pierwiastka kwadratowego x liczby a w sposób następujący: wyznaczamy najmniejszą taką wartość liczby całkowitej p , żebyśmy jeszcze mieli

$$A_{2p} > 0.$$

Jeżeli pierwsza cyfra od zera większa liczby a jest cyfrą a_{2k} rzędu parzystego $2k$, to mamy tedy

$$p = k \quad \text{oraz} \quad A_{2p} = a_{2p}.$$

Jeżeli zaś pierwsza od zera większa cyfra liczby a jest cyfrą a_{2k-1} rzędu nieparzystego $2k-1$, to mamy znowu

$$p = k,$$

ale na A_{2p} mamy wzór następujący:

$$A_{2p} = 10 \cdot a_{2p-1} + a_{2p}.$$

Mamy więc w każdym razie

$$A_{2p} < 100.$$

Mamy więc

$$X_p < 10,$$

skąd wynika na x_p wartość następująca:

$$x_p = X_p.$$

Z rozważań powyższych wnosimy, że problem wyznaczania cyfr pierwiastka kwadratowego x liczby a , której cyfry możemy wyznaczyć aż do cyfry dowolnie danego rzędu, będzie mógł być uważany za rozwiązany, jeżeli uzyskamy metodę do wyznaczenia cyfry x_{p+1} , rzędu $p+1$, liczby x , po poprzednim wyznaczeniu wszystkich cyfr aż do cyfry p , jakąkolwiek wartość liczbową miałyby liczba całkowita p . Właśnie taką metodę podaje twierdzenie następujące:

II. Jeżeli oznaczymy przez R_p resztę z wyznaczania całkowitej części X_p pierwiastka kwadratowego liczby jednostek rzędu $2p$, A_{2p} , liczby a , oraz ogólnie przez a , cyfrę rzędu t liczby a , to cyfra x_{p+1} rzędu $p+1$ pierwiastka kwadratowego x liczby a równa się największej wartości całkowitej liczby ζ , przy której zachodzi związek następujący:

$$(1) \quad \zeta^2 + 20 \cdot X_p \zeta \leq 100 \cdot R_p + 10 \cdot a_{2p+1} + a_{2p+2},$$

a różnica

$$(2) \quad 100R + 10a_{2p+1} + a_{2p+2} - x_{p+1}^2 - 20X_px_{p+1}$$

przedstawia resztę z wyznaczania całkowitej części pierwiastka kwadratowego liczby A_{2p+2} jednostek rzędu $2p+2$ liczby a .

Istotnie, ze względu na tw. I-sze liczba X_p jest liczbą jednostek rzędu p pierwiastka kwadratowego x liczby a ; mamy więc

$$(3) \quad X_{p+1} = 10 \cdot X_p + x_{p+1},$$

oznaczając przez X_{p+1} liczbę jednostek rzędu $p+1$ liczby x , a ponieważ na podstawie tw. I-go liczba jednostek rzędu $p+1$ liczby x jest całkowitą częścią pierwiastka kwadratowego liczby A_{2p+2} , czyli liczby jednostek rzędu $2p+2$ liczby a , przeto ze względu na wzór (3) mamy:

$$(4) \quad \begin{cases} (10X_p + x_{p+1})^2 \leq A_{2p+2} < (10X_p + x_{p+1} + 1)^2, \\ 20X_px_{p+1} + x_{p+1}^2 \leq A_{2p+2} - 100X_p^2 \\ 20X_p(x_{p+1} + 1) + (x_{p+1} + 1)^2 > A_{2p+2} - 100X_p^2, \end{cases}$$

Ale mamy

$$A_{2p+2} = 100A_{2p} + 10a_{2p+1} + a_{2p+2}, \quad (5)$$

oraz

$$R_p = A_{2p} - X_p^2, \quad (6)$$

przeto możemy związkom (4) nadać postać następującą:

$$20X_px_{p+1} + x_{p+1}^2 \leq 100R_p + 10a_{2p+1} + a_{2p+2} \quad (7)$$

$$20X_p(x_{p+1} + 1) + (x_{p+1} + 1)^2 > 100R_p + 10a_{2p+1} + a_{2p+2}. \quad (8)$$

Z pierwszego z tych związków wynika, że wartość

$$\zeta = x_{p+1} \quad (9)$$

liczby x sprawdza związek (1), a z drugiego — że ta wartość liczby ζ jest największa z tych wartości całkowitych liczby ζ , które czynią zadość nierówności (1), jeżeli bowiem pewna wartość całkowita liczby ζ sprawdza nierówność

$$\zeta > x_p, \quad (10)$$

to mamy

$$\zeta \geq x_p + 1,$$

a zatem

$$\zeta^2 + 20X_p\zeta \geq x_{p+1}^2 + 20X_px_{p+1},$$

skąd ze względu na nierówność (8) wynika, że przy wartościach całkowitych liczby ζ nierówność (10) pociąga za sobą nierówność

$$\zeta^2 + 20X_p\zeta > 100R_p + 10a_{2p+1} + a_{2p+2}.$$

Zatem liczba x_{p+1} przedstawia rzeczywiście największą taką wartość całkowitą liczby ζ , przy której zachodzi związek (1).

Pozostaje do okazania, że mamy

$$R_{p+1} = 100R_p + 10a_{2p+1} + a_{2p+2} - x_{p+1}^2 - 20X_px_{p+1}, \quad (11)$$

oznaczając przez R_{p+1} resztę z wyznaczania całkowitej części pierwiastka kwadratowego liczby A_{2p+2} .

Na podstawie wzorów (5), (6) i (3) mamy

$$R_{p+1} = 100A_{2p} + 10a_{2p+1} + a_{2p+2} - (10X_p + x_{p+1})^2,$$

skąd

$$R_{p+1} = 100(A_{2p} - X_p^2) + 10a_{2p+1} + a_{2p+2} - 20X_px_{p+1} - x_{p+1}^2;$$

ze wzoru tego wynika, że względu na wzór (6), wzór (11), który pozostawał jeszcze do uzasadnienia. Zatem mające być udowodnione twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Twierdzenie powyższe podaje rzeczywiście środek do wyznaczenia cyfry x_{p+1} liczby x po poprzednim wyznaczeniu wszystkich tych cyfr liczby x , które poprzedzają cyfrę x_{p+1} . Skoro bowiem wszystkie cyfry te są znane, to liczba X_p znana jest także, a więc i liczba R_p . Zatem drogą kolejnych prób zawsze wyznaczyć zdołamy największą wartość całkowitą liczby ζ , sprawdzającą związek (1); tej wartości liczby ζ równać się będzie cyfra x_{p+1} , o wyznaczenie której chodziło. Wspomniane próby możemy wykonywać systematycznie, podstawiając w wyrażeniu

$$\zeta^2 + 20X_p\zeta$$

kolejno wartości 9, 8, 7, 6 i t. d. aż do chwili, kiedy po raz pierwszy wyrażenie powyższe przyjmie wartość sprawdzającą związek (1); ostatnia wartość podstawiona na ζ w rozważanym wyrażeniu przedstawiać będzie właśnie cyfrę x_{p+1} , o wyznaczenie której chodziło. Liczba prób poprzedzających może co najwyżej dochodzić do dziesięciu; liczbę omawianych prób możemy zmniejszyć, zważywszy, że liczba dziesiątków liczby

$$\zeta^2 + 20X_p\zeta,$$

gdy uważamy ζ za liczbę całkowitą od zera nie mniejszą, nie jest mniejsza od iloczynu $2X_p\zeta$, który zatem nie może być większy od liczby dziesiątków $10R_p + a_{2p+1}$ liczby

$$100R_p + 10a_{2p+1} + a_{2p+2},$$

skąd znów wynika, że ta wartość liczby ζ , o wyznaczenie której chodzi, od całkowitej części ζ_0 ilorazu podziału liczby $10R + a_{2p+1}$ przez $2X_p$ większą być nie może; jeżeli więc liczba ζ_0 od liczby 9 jest mniejsza, to zbytecznem jest rozpoczynać próby od liczby 9; dostatecznem będzie rozpocząć te próby od liczby ζ_0 .

Możemy dodać, że wyznaczywszy cyfrę x_{p+1} liczby x , możemy z łatwością wyznaczyć R_{p+1} na podstawie wzoru (11) i wobec problemu wyznaczenia cyfry x_{p+2} liczby x znajdziemy się tedy w warunkach takich, w jakich byliśmy przed chwilą wobec problemu wyznaczenia cyfry x_{p+1} .

Ponieważ na podstawie tw. I-go możemy zawsze wyznaczyć pierwszą cyfrę od zera większą x_α liczby x , ponieważ nadto w takim razie mamy

$$X_\alpha = x_\alpha,$$

przeto, opierając się na powyższych następstwach tw. II-go, zdołamy wyznaczyć wszystkie cyfry liczby x aż do cyfry dowolnie z góry danego rzędu.

Ponieważ na podstawie tw. II-go cyfra rzędu $p+1$ pierwiastka kwadratowego x liczby a równa się największej z tych wartości całkowitych liczby ζ , które sprawdzają związek (1), przeto tylko od liczby 9 nie większe wartości całkowite liczby ζ wspomnianemu związkowi mogą czynić zadość. Okoliczność tę możemy sprawdzić łatwo bezpośrednio: ze względu na równość (6) związek (1) równoważny jest następującemu:

$$\zeta^2 + 20X_p\zeta + 100X_p^2 \leq 100A_{2p} + 10a_{2p+1} + a_{2p+2};$$

otóż gdyby pewna, od liczby 9 większa wartość całkowita liczby ζ związek ten sprawdzała, to liczba dziesiątków η liczby ζ byłaby od zera większa. Oznaczając przez ζ' cyfrę jedności liczby ζ , mamy

$$\zeta = 10\eta + \zeta'.$$

Podstawiawszy wartość tę w powyższej nierówności, stwierdzimy, wykonywając łatwe przekształcenie lewej strony, że wynik przedstawić możemy w postaci następującej:

$$\zeta'^2 + 20(X_p + \eta)\zeta' + 100(X_p + \eta)^2 \leq 100A_{2p} + 10a_{2p+1} + a_{2p+2},$$

a ponieważ liczba setek lewej strony tego związku równa się przynajmniej

$$(X_p + \eta)^2,$$

a liczba setek prawej strony dokładnie równa się liczbie A_{2p} , przeto mielibyśmy

$$(X_p + \eta)^2 \leq A_{2p}.$$

Zatem, wbrew założeniu, liczba X_p nie przedstawiałaby całkowitej części pierwiastka kwadratowego liczby A_{2p} .

Zbadajmy bliżej przypadek, w którym pierwiastek kwadratowy x liczby a równa się liczbie dziesiętnej skończonej. Powiedzenie, że liczba x równa się liczbie dziesiętnej skończonej, wyraża, iż liczba od zera odmiennych cyfr liczby x jest skończona. Załóżmy, że okoliczność ta zachodzi, i oznaczmy ogólnie przez x cyfrę rzędu i liczby x , a przez α i β rzędy odpowiednio najniższego rzędu i najwyższego rzędu od zera odmiennych cyfr liczby x .

Mamy tedy

$$x^2 = a$$

oraz

$$x = \sum_{i=\alpha}^{\beta} \frac{x_i}{10^i},$$

skąd

$$(12) \quad a = \left\{ \sum_{i=\alpha}^{\beta} \frac{x_i}{10^i} \right\}^2 = \frac{\left\{ \sum_{i=\alpha}^{\beta} x_i 10^{\beta-i} \right\}^2}{10^{2\beta}}.$$

Ze wzoru tego wynika natychmiast, że cyfra jednostek rzędu 2β liczby a równa się cyfrze jednostek tegoż rzędu liczby

$$\frac{x_{\beta}^2}{10^{2\beta}}.$$

Ponieważ zaś mamy

$$0 < x_{\beta} < 10,$$

ponieważ nadto cyfra jednostek kwadratu liczby jednocyfrowej od zera większej jest zawsze od zera odmienna, albowiem mamy

$$1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, \\ 8^2 = 64, 9^2 = 81,$$

przeto cyfra jednostek rzędu 2β liczby a jest od zera odmienna. Uwzględniając uwagę tę, wyprowadzamy natychmiast z równości (12) wnioski następujące:

Żeby pierwiastek kwadratowy liczby od zera większej a równał się liczbie dziesiętnej skończonej, koniecznem jest i wystarczającym, żeby zachodziły warunki następujące:

1°. Liczba a winna równać się liczbie dziesiętnej skończonej, której ostatnia, od zera większa cyfra, jest cyfrą rzędu parzystego.

2°. Liczba jednostek dziesiętnych rzędu ostatniej od zera odmiennej cyfry liczby a w tej liczbie winna być kwadratem zupełnym, czyli równać się kwadratowi pewnej liczby całkowitej.

Drugi z warunków tych oczywiście równoważny jest następującemu: reszta z wyznaczania całkowitej części pierwiastka kwadratowego liczby jednostek dziesiętnych rzędu ostatniej, od zera odmiennej cyfry liczby a w tej liczbie winna równać się zeru.

Z równości (12) wynika jeszcze, że w razie, kiedy pierwiastek kwadratowy x liczby od zera większej a równa się liczbie dziesiętnej skończonej, ostatnia od zera większa cyfra liczby x jest rzędu równego połowie rzędu ostatniej od zera odmiennej cyfry liczby a .

Z rozważań powyższych wynika, że rozstrzygnięcie, czy pierwiastek kwadratowy danej, od zera większej, liczby a równa się liczbie dziesiętnej skończonej, w takim tylko razie nie jest natychmiastowe, jeżeli liczba a jest liczbą dziesiętną skończoną, której ostatnia cyfra, od zera większa, jest pewnego rzędu parzystego 2β ; żeby w tym przypadku poznać, jaki jest stan rzeczy, należy w sposób, omówiony wyżej, wyznaczyć wszystkie cyfry liczby x aż do cyfry rzędu β oraz resztę R_β z wyznaczania całkowitej części pierwiastka kwadratowego liczby jednostek dziesiętnych rzędu 2β liczby a ; jeżeli wypadnie

$$R_\beta = 0,$$

to liczba x równa się liczbie dziesiętnej skończonej, której ostatnia od zera większa cyfra jest cyfrą rzędu β , jeżeli zaś wypadnie

$$R_\beta > 0,$$

to liczba x żadnej liczbie dziesiętnej skończonej równa nie jest.

Opierając się na uzyskanych wynikach, możemy z łatwością rozpoznać, czy pierwiastek kwadratowy x danej, od zera większej liczby a równa się liczbie wymiernej. Istotnie, w § 61-szym uzasadniliśmy twierdzenie, które obecnie możemy wysłowić w sposób następujący: *żeby pierwiastek kwadratowy od zera większej liczby a równał się liczbie wymiernej, koniecznem jest i wystarczającym, żeby liczba a równała się liczbie wymiernej, równej liczbie ułamkowej nieprzywiedlnej, której licznik i mianownik z osobna byłyby kwadratami zupełnymi (czyli równały się odpowiednio kwadratowi pewnych liczb całkowitych).*

Z twierdzenia tego wynika w szczególności, że *pierwiastek kwadratowy liczby całkowitej równa się liczbie wymiernej tylko w razie, kiedy równy jest liczbie całkowitej.*

Ponieważ zaś każda liczba całkowita jest liczbą dziesiętną skończoną, przeto zastosowując wyżej podane kryterium do pytania, czy pierwiastek oznaczonej od zera większej liczby równa się liczbie dziesiętnej skończonej, będziemy mogli rozstrzygnąć, czy pierwia-

stek kwadratowy danej liczby całkowitej sam równa się liczbie całkowitej; w tym przypadku szczególnym liczba, którą powyżej oznaczyliśmy byli przez β , sprawdzać będzie związek

$$\beta \leq 0.$$

Zatem na podstawie rozważań powyższych będziemy mogli zdecydować, czy pierwiastek jakiejkolwiek danej liczby a od zera większej jest wymierny, jeżeli tylko wiadomem nam będzie, czy liczba a jest wymierna, i jeżeli w ostatnim przypadku znane nam będą symbole specyficzne licznika i mianownika liczby ułamkowej równej liczbie a .

§ 136. Przechodzimy obecnie do problemu wyznaczania cyfr pierwiastka sześciennego x liczby a od zera większej, zakładając, że posiadamy środki do wyznaczania wszystkich cyfr liczby a włącznie aż do cyfry dowolnie danego rzędu. Problem ten znajduje się w najściślejszej analogii z problemem, omówionym w paragrafie poprzedzającym.

W całym niniejszym paragrafie zachowamy powyższe znaczenia liter x i a , a nadto oznaczać będziemy ogólnie przez x_i cyfrę rzędu i liczby x , przez X_i liczby jednostek dziesiętnych rzędu i tejże liczby, przez a_i cyfrę rzędu i liczby a , a przez A_i liczbę jednostek dziesiętnych rzędu i tejże liczby a .

Jakąkolwiek liczbę dodatnią oznaczylibyśmy przez L , istnieje zawsze jedna i tylko jedna liczba całkowita N , sprawdzająca związki

$$N^3 \leq L < (N+1)^3.$$

Liczba N zowie się całkowitą częścią pierwiastka sześciennego liczby L , a różnica

$$L - N^3,$$

resztą z wyznaczenia części całkowitej tego pierwiastka sześciennego.

I. *Liczba jednostek dziesiętnych rzędu jakiegokolwiek p pierwiastka sześciennego x jakiejkolwiek liczby dodatniej a równa się całkowitej części X_p pierwiastka sześciennego liczby A_{3p} jednostek dziesiętnych rzędu $3p$ w liczbie a , jakąkolwiek wartość ujemną, równą zeru, lub dodatnią miałyby liczba p .*

Istotnie, mamy

$$(1) \quad x \equiv \frac{X_p}{10^p}$$

oraz

$$x < \frac{X_p + 1}{10^p}. \quad (2)$$

Na podstawie związków tych i równości

$$x^3 = a,$$

mamy

$$\frac{X_p^3}{10^{3p}} \leq a,$$

$$\frac{(X_p + 1)^3}{10^{3p}} > a,$$

skąd

$$\begin{aligned} X_p^3 &\leq A_{3p}, \\ (X_p + 1)^3 &> A_{3p}. \end{aligned}$$

Związki te wyrażają właśnie twierdzenie, o które chodziło.

Na podstawie twierdzenia powyższego możemy wyznaczyć najniższego rzędu od zera odmienną cyfrę x_α liczby. W tym celu wyznaczamy najmniejszą taką wartość α liczby p , żeby zachodziła jeszcze nierówność

$$A_{3\alpha} > 0.$$

Wartość, którą mieć będzie w takim razie liczba $A_{3\alpha}$, sprawdzać będzie nierówność

$$A_{3\alpha} < 10^3,$$

skąd natychmiast wynika, że odnośna wartość X_α liczby X_p sprawdzać będzie nierówność

$$X_\alpha < 10.$$

Zatem najmniejszego rzędu od zera większa cyfra liczby x będzie rzędu α i sprawdzać będzie równość

$$x_\alpha = X_p.$$

Ponieważ w rozważanym przypadku drogą porównywania kolejnego liczby $A_{3\alpha}$ z sześcianami od dziesięciu mniejszych, a od zera większych liczb całkowitych zawsze zdołamy wyznaczyć liczbę X_α , przeto tem samem zdołamy zawsze wyznaczyć pierwszą od zera większą cyfrę liczby x .

W dalszym ciągu wypadnie nam rozważać liczby R_i , określonych równaniem

$$R_i = A_{3i} - X_i^3,$$

przyczem liczbie R_i , która przedstawia na podstawie twierdzenia, dopiero co uzasadnionego resztę z wyznaczania całkowitej części pierwiastka sześciennego liczby jednostek rzędu $3i$ liczby a , nadamy nazwę reszty rzędu i z wyznaczania pierwiastka sześciennego liczby a .

Oznaczając, jak poprzednio, przez α rząd najniższego rzędu od zera odmiennej cyfry liczby x , możemy, wyznaczwszy cyfrę x_α w sposób dopiero co nakreślony, wyznaczyć natychmiast resztę rzędu α , R_α z wyznaczania pierwiastka sześciennego liczby a ze wzoru

$$R_\alpha = A_{3\alpha} - x_\alpha^3.$$

Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej zdołamy wyznaczyć cyfrę dowolnie danego rzędu liczby x , jeżeli tylko uzyskamy metodę ogólną do rozwiązywania zagadnienia typu następującego: *znając wszystkie cyfry liczby x włącznie aż do cyfry oznaczonego rzędu p oraz resztę rzędu p R_p , wyznaczyć cyfrę x_{p+1} rzędu $p+1$ liczby x i odnośną resztę R_{p+1}* . Rozwiązanie problemu tego wysnujemy łatwo z twierdzenia następującego:

II. *Cyfra rzędu $p+1$ liczby x równa się największej wartości całkowitej, jaką przyjąć możemy na ξ w związku*

$$(1) \quad \xi^3 + 30\xi^2 X_p + 300\xi X_p^2 \leq R_p 10^3 + a_{3p+1} 10^2 + a_{3p+2} 10 + a_{3p+3};$$

na resztę zaś R_{p+1} rzędu $p+1$ mamy wzór

$$(2) \quad R_{p+1} = R_p 10^3 + a_{3p+1} 10^2 + a_{3p+2} 10 + a_{3p+3} - x_{p+1}^3 - 30 x_{p+1}^2 X_p - 300 x_{p+1} X_p^2.$$

Przeprowadzenie dowodu na to twierdzenie odbywa się w sposób całkiem podobny, jak na twierdzenie analogiczne paragrafu poprzedzającego. Mamy

$$(3) \quad X_{p+1} = 10 X_p + x_{p+1},$$

$$(4) \quad A_{3p+3} = 10^3 A_{3p} + 10^2 a_{3p+1} + 10 a_{3p+2} + a_{3p+3}.$$

Z drugiej strony, na podstawie tw. I-go paragrafu obecnego zachodzą związki następujące:

$$X_{p+1}^3 \leq A_{3p+3} < (X_{p+1} + 1)^3,$$

skąd

$$X_{p+1}^3 - X_p^3 \leq A_{3p+3} - X_p^3 < (X_{p+1} + 1)^3 - X_p^3.$$

Podstawiając w związkach tych wartości (3) i (4) na X_{p+1} i A_{3p+3} i uwzględniając związek $R_p = A_{3p} - X_p^3$ uzyskujemy związki następujące:

$$x_{p+1}^3 + 30x_{p+1}^2X_p + 300x_{p+1}X_p^2 \leq 10^3R_p + 10^2a_{3p+1} + 10a_{3p+2} + \\ + a_{3p+3} < (x_{p+1} + 1)^3 + 30(x_{p+1} + 1)^2X_p + 300(x_{p+1} + 1)X_p^2.$$

Ze związków tych wnosimy natychmiast, że cyfra x_{p+1} liczby x rzeczywiście równa się największej z tych wartości całkowitych liczby ζ , które sprawdzają związek (1).

Podstawiając we wzorze

$$R_{p+1} = A_{3p+3} - X_{p+1}^3$$

wartości (3) i (4) na X_{p+1} i A_{3p+1} i uwzględniając ponownie wzór

$$R_p = A_{3p} - X_p^3,$$

uzyskujemy wzór (2), który pozostawał jeszcze do uzasadnienia. Udowodniliśmy zatem w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Znając R_p i X_p , możemy na podstawie twierdzenia tego wyznaczyć cyfrę x_{p+1} liczby x drogą kolejnych prób, polegających na porównywaniu prawej strony związku (1) z wartościami, jakie przyjmuje wyrażenie

$$\zeta^3 + 30\zeta^2X_p + 300\zeta X_p^2, \quad (5)$$

gdy podstawiamy kolejno na ζ wartości

$$9, 8, 7, \dots$$

dopóty, aż powyższe wyrażenie przyjmie wartość nie większą od lewej strony związku (1); w takim razie ostatnia wartość przyjęta na ζ przedstawiać będzie właśnie wartość cyfry x_{p+1} , o wyznaczenie której chodziło. Liczba powyższych prób oczywiście nie może wynosić w żadnym razie więcej dziewięciu, ale niekiedy możemy liczbę tę zmniejszyć w sposób następujący:

Jeżeli przyjmiemy na ζ jakąkolwiek wartość całkowitą i dodatnią, to wyrażenie

$$3 \cdot \zeta \cdot X_p^2, \quad (6)$$

w żadnym razie większem być nie może od liczby setek wyrażenia (5), a ponieważ w razie nierówności (1) wspomniana liczba setek nie może być większa od liczby setek liczby, stanowiącej prawą stronę związku (1), przeto wyrażenie (6) w rozważanych warunkach nie może być większe od liczby setek prawej strony nierówności (1); innemi słowy mamy

$$3 \cdot \zeta \cdot X_p^2 \leq R_p 10 + a_{s_{p+1}}.$$

Jeżeli więc całkowita część ζ_{p+1} ilorazu podziału liczby $R_p 10 + a_{s_{p+1}}$ przez $3 \cdot X_p^2$ wypadnie mniejsza od dziewięciu, to próbowanie cyfr większych od ζ_{p+1} jest oczywiście zbyteczne; będziemy mogli poprzestać na próbowaniu liczby ζ_{p+1} i liczb

$$\zeta_{p+1} - 1, \zeta_{p+1} - 2, \dots \text{ ewentualnie aż do jedności.}$$

Wyznaczywszy x_{p+1} , wyznaczymy natychmiast ze wzoru (2) R_{p+1} i wobec problemu wyznaczenia cyfry x_{p+2} i reszty R_{p+2} , znajdziemy się w takich samych warunkach, w jakich byliśmy poprzednio wobec problemu wyznaczenia cyfry x_{p+1} i reszty R_{p+1} .

Ostatecznie uzyskaliśmy ogólną metodę do wyznaczania wszystkich cyfr aż do cyfry dowolnie danego rzędu włącznie, pierwiastka sześciennego x jakiegokolwiek liczby dodatniej a , jeżeli tylko posiadamy środki do wyznaczenia wszystkich cyfr liczby a aż do cyfry dowolnie przyjętego rzędu. Istotnie, na podstawie tw. I-go możemy w sposób, omówiony wyżej, wyznaczyć najniższego rzędu od zera odmienną cyfrę x_α liczby x oraz odnośną resztę R_α z drugiej strony, posługując się przed chwilą omówioną metodą, opartą na tw. II-giem, możemy, znając wszystkie cyfry liczby x aż do pewnej cyfry x_p włącznie oraz odnośną resztę R_p , wyznaczyć cyfrę x_{p+1} i resztę R_{p+1} . Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej mamy pewność, że posiadamy rzeczywiście ogólną metodę do wyznaczania przy wyżej wyszczególnionych warunkach wszystkich cyfr liczby x aż do cyfry dowolnie danego rzędu włącznie.

Z natury rzeczy nasuwa się nam pytanie następujące: jakie są warunki konieczne i wystarczające, ażeby pierwiastek sześcienny x liczby a równał się liczbie wymiernej? W razie wymierności liczby x mamy

$$(7) \quad x = \frac{l}{m},$$

oznaczając przez l i m licznik i mianownik liczby ułamkowej nieprzywiedlnej (gdyby liczba x równała się liczbie całkowitej, to mielibyśmy oczywiście $m=1$). Podstawiając wartość (7) na x w równaniu

$$x^3 = a,$$

otrzymujemy

$$\frac{l^3}{m^3} = a.$$

Ponieważ liczby l i m są względnie pierwszymi pomiędzy sobą liczbami, przeto na podstawie znanego twierdzenia liczby l^3 i m^3 są także względnie pierwszymi pomiędzy sobą liczbami. Zatem, żeby liczba x była wymierna, koniecznem jest, żeby liczba a równała się liczbie wymiernej równej takiej liczbie ułamkowej nieprzywiedlnej, której licznik i mianownik byłyby z osobna sześcianami zupełnymi, czyli równały się odpowiednio trzecim potęgom pewnych liczb całkowitych.

Z tego wynika w szczególności, że w razie, kiedy liczba a równa się liczbie całkowitej, liczba x jest liczbą wymierną tylko w przypadku, kiedy jest sama liczbą całkowitą.

Pozostaje jeszcze do uzyskania kryterium, żeby rozpoznać, czy dana liczba całkowita jest sześcianem zupełnym, czy innemi słowy, rzeczona liczba całkowita równa się trzeciej potędze pewnej liczby całkowitej. Ponieważ każda liczba całkowita jest liczbą dziesiętną skończoną, przeto kwestya, którą pragniemy rozstrzygnąć, jest przypadkiem szczególnym w kwestyi następującej: „Jakie kryterium dałoby możność upewnienia się, czy pierwiastek sześcienny oznaczonej liczby dodatniej a równa się liczbie dziesiętnej skończonej, której ostatnia od zera odmienna cyfra jest oznaczonego rzędu β ?” Pytanie to równoważne jest następującemu: „Po czem zdołamy poznać, czy istnieje w ciągu cyfr liczby x pewna taka od zera odmienna cyfra x_β rzędu β , żeby wszystkie dalsze cyfry liczby x równały się zeru?”

Żeby okoliczność powyższa zachodziła, koniecznem jest i wystarczającym, żebyśmy mieli

$$\frac{X_\beta^3}{10^{3\beta}} = a, \quad (8)$$

$$x_\beta > 0. \quad (9)$$

Równość (8) poucza nas, że X_β^3 przedstawia liczbę jednostek 3β liczby a . Mamy więc

$$(10) \quad A_{3\beta} = X_\beta^3;$$

nadto wynika jeszcze z równości (8), że cyfra jednostek rzędu 3β liczby a równa się cyfrze jedności liczby całkowitej x_β^3 , a każda wyższego rzędu cyfra liczby a — zeru. Ze względu na nierówność (9) i na równości

$$1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125, 6^3 = 216, 7^3 = 343, \\ 8^3 = 512, 9^3 = 729,$$

cyfra jedności liczby $A_{3\beta}$ równać się będzie pewnej od zera większej liczbie. Ponieważ równość (10) równoważna jest równości

$$R_\beta = 0$$

na podstawie wzoru

$$R_\beta = A_{3\beta} - X_\beta^3,$$

przeło z uwag powyższych wynika na postawione pytanie odpowiedź następująca:

Żeby pierwiastek sześcienny danej liczby dodatniej a równał się liczbie dziesiętnej skończonej, w której ostatnia od zera odmienna cyfra byłaby oznaczonego rzędu β , koniecznem jest i wystarczającym, żeby liczba a była liczbą dziesiętną skończoną, w której ostatnia od zera odmienna cyfra byłaby rzędu 3β , i żeby nadto reszta rzędu β z wyznaczania cyfr liczby pierwiastka sześciennego liczby a równała się zeru.

Jeżeli liczba a jest liczbą całkowitą, będącą sześcianem zupełnym, to może tylko być

$$\beta \leq 0,$$

albowiem ostatnia od zera odmienna cyfra liczby a jest co najwięcej cyfrą jedności czyli cyfrą rzędu zera. Z drugiej strony, jeżeli liczba a jest liczbą całkowitą k -cyfrową, to rząd najniższego rzędu od zera odmiennej cyfry pierwiastka sześciennego liczby a równa się liczbie

$$-t,$$

gdzie t oznacza część całkowitą ilorazu

$$\frac{k}{3},$$

Zatem po wykonaniu co najwyżej $(t+1)$ czynności, z których każda polega na wyznaczaniu jednej cyfry pierwiastka sześciennego liczby a , poznamy, czy liczba a jest, czy nie jest sześcianiem zupełnym.

