

nica, że w pierwszym przypadku wyraz suma ma zawsze pewne określone znaczenie, a w drugim, o ile do definicyi podanych już w tych wykładach nie dodamy nowych, jest niepozabawione treści tylko w razie, kiedy chodzi o sumę składników szeregu zbieżnego.

§ 128. Uważajmy dwa szeregi zbieżne

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

i

$$(2) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

Z definicyi sumy szeregu zbieżnego i twierdzenia uzasadnionego w § 117-tym, wynika, że iloczyn sum szeregów (1) i (2) równa się granicy niezawodnie zbieżnego ciągu, którego wyraz rzędu p , A_p , określony jest ogólnym wzorem następującym:

$$(3) \quad A_p = \left(\sum_{h=1}^p u_h \right) \left(\sum_{g=1}^p v_g \right).$$

Możemy więc zawsze przedstawić (§ 120) iloczyn sum szeregów (1) i (2) jako sumę szeregu zbieżnego, mianowicie szeregu

$$A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \dots$$

Jeżeli jednak jeden przynajmniej z szeregów (1) i (2) zbieżny jest bezwzględnie, to w takim razie iloczyn sumy s szeregu (1) i sumy σ szeregu (2) możemy przedstawić w postaci sumy szeregu zbieżnego kształtu bardziej dogodnego, mianowicie mamy wtedy

$$(4) \quad s \cdot \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} w_k,$$

przyjmując

$$(5) \quad w_k = \sum_{h=1}^k u_{k+1-h} \cdot v_h.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, założmy, że szeregi (1) i (2) sprawdzają założenia twierdzenia i przyjmijmy

$$(6) \quad Q_p = A_p - \sum_{k=1}^p w_k.$$

Powiadamy, że mamy

$$(7) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} Q_p = 0.$$

Stwierdzamy natychmiast, że

$$Q_1 = 0.$$

Zamierzam dowieść, że przy każdej, od jedności większej wartości wskaźnika p , zachodzi wzór następujący:

$$Q_p = \sum_{g=2}^p u_h \sum_{g=p+2-h}^p v_g^1). \quad (8)$$

Upewniamy się z łatwością, uwzględnivszy równość (3), (5) i (6), że wzór poprzedzający zachodzi w przypadkach szczególnych, kiedy p równa się liczbie 2 albo liczbie 3. Założmy chwilowo, że wzór ten zachodzi przy pewnej, od liczby 3 nie mniejszej, wartości na p i usiłujmy dowieść, że wzór ten zachodziłby w takim razie jeszcze, gdybyśmy liczbę p zwiększyli o jedność. Ze wzorów (3) i (6) mamy

$$Q_{p+1} = \left(\sum_{h=1}^p u_h + u_{p+1} \right) \left(\sum_{h=1}^p v_g + v_{p+1} \right) - \sum_{k=1}^p w_k - w_{p+1},$$

skąd

$$\begin{aligned} Q_{p+1} = & \left(\sum_{h=1}^p u_h \right) \left(\sum_{g=1}^p v_g \right) - \sum_{k=1}^p w_k + \\ & + u_{p+1} \sum_{g=1}^p v_g + v_{p+1} \sum_{h=1}^p u_h + u_{p+1} v_{p+1} - w_{p+1} \end{aligned}$$

czyli

$$Q_{p+1} = Q_p + u_{p+1} \sum_{g=1}^p v_g + v_{p+1} \sum_{h=1}^p u_h + u_{p+1} v_{p+1} - w_{p+1}. \quad (9)$$

Ze wzoru (8) mamy

$$Q_p = \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+2-h}^p v_g + u_2 v_p,$$

¹⁾ Jeżeli czytelnik napisze wyrażenie wzór (3) na A_p i wzory na w_1, w_2, \dots, w_p przyjąwszy na p wartość liczbowa niezbyt małą i niezbyt wielką, np. $p=6$, albo $p=7$, to drogą intuicji spostrzeże, opierając się na wzorze (6), że wzór (8) zawsze zachodzi, i ułatwi sobie zorientowanie się w ścisłym dowodzie wzoru (8), podanym w tekście.

a ponieważ

$$\sum_{g=p+2-h}^p v_g = v_{p+2-h} + \sum_{g=p+3-h}^p v_g,$$

przeto

$$Q_p = \sum_{h=3}^p u_h v_{p+2-h} + \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+3-h}^p v_g + u_2 v_p,$$

co możemy jeszcze napisać i tak:

$$(10) \quad Q_p = \sum_{h=2}^p u_h v_{p+2-h} + \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+3-h}^p v_g.$$

Z drugiej strony, na podstawie wzoru (5) mamy

$$\begin{aligned} w_{p+1} &= \sum_{h=1}^{p+1} u_{p+2-h} v_h = u_{p+1} v_1 + u_1 v_{p+1} + \sum_{h=2}^p u_{p+2-h} v_h = \\ &= u_{p+1} v_1 + u_1 v_{p+1} + \sum_{h=2}^p u_h v_{p+2-h}. \end{aligned}$$

Podstawiając wartość tę na w_{p+1} i wartość (10) na Q_p do wzoru (9), uzyskujemy wzór następujący:

$$\begin{aligned} Q_{p+1} &= \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+3-h}^p v_g + u_{p+1} \sum_{g=1}^p v_g + \\ &+ v_{p+1} \sum_{h=1}^p u_h + u_{p+1} v_{p+1} - u_{p+1} v_1 - u_1 v_{p+1}, \end{aligned}$$

skąd

$$(11) \quad Q_{p+1} = \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+3-h}^p v_g + u_{p+1} \sum_{g=2}^p v_g + v_{p+1} \sum_{h=2}^p u_h + u_{p+1} v_{p+1};$$

a ponieważ mamy

$$\sum_{h=2}^p u_h = u_2 + \sum_{h=3}^p u_h,$$

przeto

$$\begin{aligned} \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+3-h}^p v_g + v_{p+1} \sum_{h=2}^p u_h &= \sum_{h=3}^p u_h \left\{ v_{p+1} + \sum_{g=p+3-h}^p v_g \right\} + u_2 v_{p+1} = \\ &= \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+3-h}^{p+1} v_g + u_2 v_{p+1}. \end{aligned}$$

Możemy więc wzór (11) przedstawić w postaci następującej:

$$Q_{p+1} = \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+3-h}^{p+1} v_g + u_2 v_{p+1} + u_{p+1} \sum_{g=2}^p v_g + u_{p+1} v_{p+1}$$

czyli

$$Q_{p+1} = \sum_{h=3}^p u_h \sum_{g=p+3-h}^{p+1} v_g + u_2 v_{p+1} + u_{p+1} \sum_{g=2}^{p+1} v_g,$$

skąd

$$Q_{p+1} = \sum_{h=2}^{p+1} u_p \sum_{g=p+3-h}^{p+1} v_g.$$

Jest to wzór, w który przechodzi wzór (8) drogą podstawienia we wzorze tym na miejsce symbolu p symbolu $p+1$. Dowiedliśmy więc, że gdyby wzór (8) zachodził przy pewnej wartości liczby p ($p \geq 3$), to wzór ten zachodziłby jeszcze i po zwiększeniu liczby p o jedną, a ponieważ stwierdziliśmy wyżej, że wzór (8) zachodzi w przypadkach, kiedy liczba p równa się którejkolwiek z liczb 2 lub 3, przeto na podstawie zasady indukcji matematycznej omawiany wzór zachodzi przy każdej, od liczby 2 nie mniejszej wartości liczby p .

Zważmy teraz, że wzór (5) na w_k symetryczny jest w stosunku do szeregów (1) i (2), innymi słowy — suma, stanowiąca prawą stronę równania (5), zmianie wartości nie ulega w razie podstawienia na miejsce składników każdego z szeregów (1) i (2) składników równorzędnych drugiego szeregu; jeżeli bowiem przyjmiemy

$$j = k + 1 - h,$$

skąd

$$h = k + 1 - j,$$

to uzyskamy wzór następujący:

$$w_k = \sum_{j=1}^k u_j v_{k+1-j} = \sum_{j=1}^k v_{k+1-j} u_j,$$

który oczywiście nie różni się od wzoru

$$w_k = \sum_{h=1}^k v_{k+1-h} u_h,$$

w który przechodzi wzór (5) drogą wykonania we wzorze tym powyższych podstawień składników.

Z tego zaś wynika, że pomiędzy przypadkiem, w którym byśmy zakładali zbieżność bezwzględną szeregu (1), a przypadkiem, w którymbyśmy zakładali zbieżność bezwzględną szeregu (2), zachodzi tylko różnica w oznaczeniach.

Wobec tego zbytecznem byłoby omawiać każdy z tych dwóch przypadków. Założymy tedy, że szereg (1) jest zbieżny bezwzględnie, a szereg (2) ewentualnie tylko warunkowo.

Wzór (8) możemy oczywiście przedstawić w postaci następującej:

$$(12) \quad Q_p = \sum_{h=2}^n u_h \sum_{g=p+2-h}^p v_g + \sum_{h=n+1}^p u_h \sum_{g=p+2-h}^p v_g,$$

oznaczając przez n całkowitą część ilorazu

$$p:2.$$

Mamy tedy

$$(13) \quad 2n \leq p \leq 2n + 1.$$

Żeby posunąć się dalej, zważmy, że już z tego, iż szereg (2) jest zbieżny, chociażby tylko warunkowo, wynika, że istnieje pewna taka liczba C , iż zachodzi nierówność

$$(14) \quad \left| \sum_{g=\alpha}^{\beta} v_g \right| < C,$$

jakiegokolwiek wartości całkowite, byle od zera większe, miałyby liczby α i β . Istotnie, przyjmijmy dowolnie od zera większą liczbę l . Ze względu na zbieżność szeregu (1) odpowiadać będzie liczbie l pewna taka liczba całkowita ν , żeby nierówność

$$i > \nu$$

pociągała za sobą nierówność

$$\left| \sum_{g=i}^m v_g \right| < l. \quad (m > i)$$

Jeżeli więc przyjmiemy

$$C = \sum_{k=1}^{\nu} |v_k| + l,$$

to nierówność (14) zachodzić będzie, jakiegokolwiek wartości całkowite, byle od zera większe, przyjęlibyśmy na α i β .

Zwróćmy się obecnie do szeregu (1). Ponieważ szereg ten jest zbieżny bezwzględnie, ponieważ więc szereg

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots \quad (15)$$

jest zbieżny, przeto na podstawie twierdzenia, polegającego na nierówności (14), istnieje będzie pewna taka liczba dodatnia B , iż zachodzi będzie przy tych samych warunkach, co nierówność (14), nierówność następująca:

$$\sum_{g=\alpha}^{\beta} |u_g| < B. \quad (16)$$

Ze względu na zbieżność szeregu (15) odpowiadać będzie dowolnie przyjętej, byle od zera większej liczbie μ taka liczba całkowita i dodatnia N , żeby nierówność

$$i > N \quad (17)$$

pociągała za sobą nierówność

$$\sum_{t=i}^{i+k} |u_t| < \mu, \quad (18)$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą od jedności większą oznaczylibyśmy przez k .

Ponieważ z drugiej strony szereg (2) także jest zbieżny, przeto drogą ewentualnego zwiększenia liczby N , możliwem jest osiągnięcie tego skutku, że nierówność (17) będzie pociągała za sobą nie tylko nierówność (18), ale i nierówność

$$\left| \sum_{t=i}^{i+k} v_t \right| < \mu, \quad (19)$$

jakąkolwiek wartość całkowitą, byle od zera większą przyjęlibyśmy na k .

Uważajmy teraz pierwszą sumę podwójną prawej strony równania (12), mianowicie

$$\sum_{h=2}^n u_h \sum_{g=p+2-h}^p v_g \quad (20)$$

Ponieważ sumowanie co do h odbywa się od 2 do n , przeto dolna granica $p + 2 - h$ sumy

$$(21) \quad \sum_{g=p+2-h}^p v_g$$

sprawdza nierówność

$$p + 2 - h \geq p + 2 - n.$$

Mamy zatem tem bardziej

$$(22) \quad p + 2 - h \geq n + 2$$

na podstawie jednej z nierówności (13).

Założmy, że liczba p sprawdza nierówność

$$(23) \quad p > 2N + 1.$$

W takim razie na podstawie nierówności (13) zachodzić będzie nierówność

$$(24) \quad n > N,$$

a więc ze względu na (22) także nierówność

$$(25) \quad p + 2 - h > N,$$

a ponieważ nierówność (17) pociąga za sobą nierówność (19), przeto w następstwie nierówności (25) suma (21) sprawdzając będzie nierówność

$$\left| \sum_{g=p+2-h}^p v_g \right| < \mu,$$

skąd wynika, że suma (20) sprawdza nierówność

$$\left| \sum_{h=2}^n u_h \sum_{g=p+2-h}^p v_g \right| < \mu \sum_{h=2}^n |u_h|.$$

Nierówność ta na podstawie nierówności (16) pociąga za sobą nierówność następującą:

$$(26) \quad \left| \sum_{h=2}^n u_h \sum_{g=p+2-h}^p v_g \right| < B\mu.$$

Dowiedliśmy więc, że nierówność (23) pociąga za sobą nierówność (26).

Zwróćmy się teraz do drugiej sumy podwójnej wzoru (12); suma ta sprawdza nierówność następującą:

$$\left| \sum_{h=n+1}^p u_h \sum_{g=p+2-h}^p v_g \right| < C \sum_{h=n+1}^p u_h, \quad (27)$$

albowiem na podstawie nierówności (14) mamy przy wszystkich wartościach na h

$$\left| \sum_{g=p+2-h}^p v_g \right| < C.$$

Ponieważ zaś nierówność (23) pociąga za sobą nierówność (24), a nierówność (17) — nierówność (18), przeto nierówność (23) pociąga za sobą na podstawie nierówności (27) nierówność

$$\left| \sum_{h=n+1}^p u_p \sum_{g=p+2-g}^p v_g \right| < C\mu.$$

Z nierówności tej i nierówności (26) wynika ze względu na wzór (12) nierówność

$$|Q_p| < (B + C)\mu. \quad (28)$$

Oznaczmy przez ε dowolnie przyjętą, byle od zera większą liczbę i wyznaczmy μ z równości

$$(B + C)\mu = \varepsilon.$$

Ponieważ na podstawie rozważań poprzedzających liczbie μ odpowiada pewna taka liczba całkowita

$$2N + 1,$$

iż nierówność (23) pociąga za sobą nierówność (28), przeto każdej, byle od zera większej wartości liczby ε , odpowiada taka liczba całkowita $2N + 1$, iż nierówność (23) pociąga za sobą nierówność

$$|Q_p| < \varepsilon.$$

Dowiedliśmy więc, że równość (7) zachodzi rzeczywiście.

Ponieważ, jakśmy to zaznaczyli na początku obecnego paragrafu, mamy

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = s \cdot \sigma,$$

przeto na podstawie równości (7) mamy

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (A_p - Q_p) = s \cdot \sigma$$

czyli

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p w_k = s \cdot \sigma.$$

Równość ta równoważna jest równości (4), na której właśnie polega twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Twierdzenie poprzedzające możemy uzupełnić uwagą następującą: jeżeli każdy z szeregów (1) i (2) jest zbieżny bezwzględnie, to i szereg (4), którego suma równa się iloczynowi rozważanych szeregów, jest także szeregiem zbieżnym bezwzględnie.

Istotnie, przyjmijmy ogólnie

$$U_k = |u_k|, \quad V_k = |v_k|.$$

W razie zbieżności bezwzględnej szeregów (1) i (2), szeregi

$$(29) \quad U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

i

$$(30) \quad V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

będą szeregami zbieżnymi o składnikach dodatnich.

Na podstawie dowiedzionego dopiero co twierdzenia szereg

$$(31) \quad W_1 + W_2 + W_3 + \dots,$$

gdzie przyjęliśmy ogólnie

$$W_k = \sum_{n=1}^k U_{k+1-n} V_n,$$

będzie szeregiem zbieżnym a suma jego równać się będzie iloczynowi sum szeregów (29) i (30). Ponieważ zaś składniki szeregu (4) co do wartości bezwzględnej w żadnym razie od składników równorzędnych szeregu (31) większymi być nie mogą, przeto w razie zbieżności bezwzględnej szeregów (1) i (2) szereg (4) będzie oczywiście szeregiem zbieżnym bezwzględnie.

Moglibyśmy jeszcze dowieść, że równość (4) zachodzi, cho-

ciażby każdy z szeregów (1) i (2) był szeregiem zbieżnym tylko warunkowo, jeżeli tylko szereg

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

jest zbieżny. Ponieważ jednak dowód twierdzenia tego za dalekoby nas zaprowadził, przeto odsyłamy w tym względzie czytelnika do podręczników analizy matematycznej¹⁾.

¹⁾ Zob. np. Picard, *Traité d'analyse*, t. I.
