

Czytelnik z łatwością spostrzeże, że związki (10) i (11) zachodzą bez względu na to, czy pierwszy składnik szeregu (1) jest dodatni czy ujemny; powyższe związki wyrażają łącznie twierdzenie następujące:

II. *Suma n pierwszych składników szeregu przemiennego, w którym wartości bezwzględne składników tworzą ciąg malejący o granicy równej zeru i który zatem jest zbieżny, przedstawia sumę szeregu z błędem nie większym od wartości bezwzględnej pierwszego wyrazu już nie uwzględnionego.*

Związki (9) odpowiadają przypadkowi, kiedy pierwszy składnik szeregu (1) równa się liczbie dodatniej. Gdyby pierwszy składnik rozważanego szeregu był ujemny, to zamiast związków (9) mielibyśmy związki następujące:

$$s_{2i} \geq s \geq s_{2i-1}.$$

W każdym więc razie wyrazy ciągu (8) są naprzemian to nie mniejsze, to nie większe od dokładnej wartości sumy szeregu (1).

§ 127. Żeby uwidocznic zasadniczą różnicę, która zachodzi pomiędzy własnościami szeregów zbieżnych bezwzględnie a własnościami szeregów zbieżnych tylko warunkowo, winniśmy najpierw wytłómaczyć czem jest rzecz, którą oznaczamy przez wyrażenie zmiana porządku składników szeregu nieskończonego.

Orzeczenie, iż każdy z dwóch szeregów nieskończonych

$$i \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (2)$$

uważany być może za wynik zmiany porządku składników drugiego, albo różni się od drugiego tylko porządkiem składników, wyraża, iż pomiędzy składnikami obu szeregów ustawiona być może odpowiedniość, która zadość czyni warunkom następującym:

1°. Jeżeli pewien składnik jednego z powyższych szeregów odpowiada pewnemu składnikowi drugiego, to odwrotnie, wspomnianemu składnikowi drugiego szeregu odpowiada wspomniany składnik pierwszego. Innemi słowy, jeżeli przyjmiemy pewien składnik u_i z szeregu (1) i pewien składnik v_j z szeregu (2), to zachodzi jedno z dwojga: albo każdy ze składników tych odpowiada drugiemu, albo żaden drugiemu z nich nie odpowiada.

2°. Jeżeli oznaczymy ogólnie przez u_i i v_j parę odpowiadają-

cych sobie wzajemnie składników szeregów (1) i (2), to każdej wartości całkowitej od jedności nie mniejszej jednej z liczb i lub j odpowiada dokładnie jedna, i tylko jedna wartość całkowita od jedności nie mniejsza drugiego wskaźnika.

3°. Każde dwa odpowiadające sobie wzajemnie składniki szeregów (1) i (2) są pomiędzy sobą równe.

Definicja powyższa może wydawać się bardziej skomplikowaną, aniżeli wymagałaby tego istotnie natura rzeczy. Uważamy więc za stosowne podać odpowiednie wyjaśnienia. Przedewszystkiem mogłoby się zdawać, że pierwszy warunek definicji mógłby być pominięty. Tak jednak nie jest, albowiem rozważając z jednej strony odpowiedniość elementów pewnego zbioru (B) elementom pewnego drugiego zbioru (A), a z drugiej strony odpowiedniość elementów zbioru (A) elementom zbioru (B), przywiedzeni bywamy niekiedy do ustawienia takich definicji, iż pomiędzy tymi elementami zbioru (A), które odpowiadają pewnemu elementowi b zbioru (B), odpowiadającego znów oznaczonemu elementowi a zbioru (A), sam element a bynajmniej nie znajduje się. Gdybyśmy na przykład oświadczyli, że składnikiem szeregu (2), mającym być uważanym za składnik odpowiadający dowolnie przyjętemu składnikowi u_i szeregu (1) jest składnik v_{i+1} , a składnikiem szeregu (1), mającym być uważanym za składnik odpowiadający dowolnie przyjętemu składnikowi v_k , jest składnik u_{k+1} , to składnikowi v_{i+1} szeregu (2) nie odpowiadałby bynajmniej składnik u_i szeregu (1), lecz składnik u_{i+2} . Należało więc wyraźnie zastrzedz, że odpowiedniość składników w rozważanych szeregach jest taka, iż orzeczenie „składnik v_j odpowiada składnikowi u_i ” wyraża to samo, co orzeczenie „składnik u_i odpowiada składnikowi v_j ”.

Omawianą własność rozważanej odpowiedniości moglibyśmy stosownie nazwać *wzajemnością* tejże.

Czytelnik byłby może zdania, że określwszy termin odpowiedniość wzajemna w sposób powyższy, moglibyśmy omawianą definicję zastąpić definicją prostszą, która opiewałaby, jak następuje: Orzeczenie, iż szeregi (1) i (2) wynikają jeden z drugiego drogą zmiany porządku składników wyraża, iż pomiędzy składnikami szeregów tych może być ustawiona taka odpowiedniość wzajemna, żeby każdemu składnikowi jednego szeregu odpowiadał równy mu składnik w drugim.

Gdybyśmy mieli rozważać tylko takie szeregi, z których żaden

nie miałyby równych pomiędzy sobą składników, to proponowana definicja byłaby równoważna tej, którą podaliśmy wyżej. Natomiast w razie niewykluczenia szeregów, w których mogłyby być równe pomiędzy sobą składniki, druga definicja nie byłaby równoważna pierwszej. Załóżmy na przykład, że mamy

$$v_1 = u_1$$

oraz ogólnie

$$v_{1+k} = u_k \quad (k = 1, 2, 3, 4, \dots).$$

Według drugiej definicji byłyby warunki te wystarczającymi, ażebyśmy mogli uważać szeregi (1) i (2) za szeregi wynikające jeden z drugiego drogą przemiany porządku składników, nie zaś według pierwszej, którą jedynie rzeczywiście przyjmujemy.

Po tej dyskusji omawiana definicja zapewne nie będzie wydawała się bardziej skomplikowaną, aniżeli wymagałaby tego natura rzeczy. Żeby jednak lepiej jeszcze wyjaśnić treść tej definicji, zwracamy uwagę na następującą tejże konsekwencję: jeżeli oznaczmy przez u_i i v_j jedną parę odpowiadających sobie wzajemnie składników szeregów (1) i (2), a przez u_α i v_β drugą parę takichże składników, to w razie odpowiedniości, sprawdzającej warunki definicji, nierówność

$$i \neq \alpha$$

równoważna będzie nierówności

$$j \neq \beta;$$

gdyby bowiem zachodzić mogły jednocześnie albo związki

$$i \neq \alpha \quad \text{oraz} \quad j = \beta,$$

albo związki

$$i = \alpha \quad \text{oraz} \quad j \neq \beta$$

to ze względu na wzajemność odpowiedniości pomiędzy składnikami obu szeregów, wbrew drugiemu warunkowi, składnikowi oznaczonego rzędu jednego z szeregów odpowiadałyby dwa odmiennych pomiędzy sobą rzędów składniki w drugim szeregu.

Założmy, że pewne dwa szeregi

$$i \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (2)$$

różnią się od siebie tylko порядkiem składników. W takim razie mogą się zdarzyć dwa przypadki:

1°. Istnieje pewna liczba całkowita i dodatnia N taka, iż związek

$$(3) \quad i \geq N$$

pociąga za sobą równość

$$(4) \quad u_i = v_i.$$

2°. Nie istnieje taka liczba N , żeby związek (3) pociągał za sobą równość (4)

W pierwszym przypadku orzekamy, że zmiana porządku składników, przemieniająca jeden szereg na drugi, obejmuje skończoną liczbę, a w drugim — nieskończoną liczbę składników.

Gdybyśmy przyjęli

$$v_1 = u_2, \quad v_2 = u_1$$

oraz

$$v_k = u_k \quad (k = 3, 4, 5, \dots),$$

to uzyskalibyśmy przykład pierwszego przypadku i moglibyśmy w takim razie przyjąć $N = 3$; szereg (2) miałby w takim razie postać następującą:

$$u_2 + u_1 + u_3 + u_4 + \dots$$

Żeby podać przykład drugiego przypadku, przyjmijmy

$$(5) \quad \begin{cases} v_{3n+1} = u_{4n+1} \\ v_{3n+2} = u_{4n+3} \\ v_{3n+3} = u_{2n+2} \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Powiadam, że w takim razie szeregi (1) i (2) tylko порядkiem składników różnić się pomiędzy sobą będą. Istotnie, uważajmy za parę odpowiadających sobie wzajemnie składników w obu szeregach każde takie dwa składniki v_k i u_i tychże, żeby istniała liczba całkowita, od zera nie mniejsza, n , sprawdzająca jednocześnie obydwa równania jednego z trzech układów następujących:

$$(6) \quad k = 3n + 1, \quad i = 4n + 1;$$

$$(7) \quad k = 3n + 2, \quad i = 4n + 3;$$

$$(8) \quad k = 3n + 3, \quad i = 2n + 2.$$

Jeżeli przyjmiemy dowolnie na k jakąkolwiek, byle od zera większą wartość całkowitą, to pośród równań

$$k = 3n + 1; \quad k = 3n + 2 \quad \text{i} \quad k = 3n + 3,$$

znajdzie się jedno, ale tylko jedno takie równanie, które dostarczy na n wartość całkowitą, a ta wartość całkowita na n od zera mniejszą nie będzie i określona będzie bez żadnej dwuznaczności; rzeczone równanie należeć będzie albo do układu (6), albo do układu (7), albo do układu (8). W pierwszym przypadku otrzymamy na wskaźnik i wzór

$$i = 4n + 1,$$

w drugim

$$i = 4n + 3,$$

a w trzecim

$$i = 2n + 2.$$

Zatem przy rozważanej odpowiedniości wzajemnej składników szeregów (1) i (2) odpowiadać będzie każdemu składnikowi v_k szeregu (2) dokładnie jeden składnik u_i szeregu (1). Odwrotnie, przy tejże odpowiedniości wzajemnej składników obu szeregów odpowiadać będzie każdemu składnikowi u_i szeregu (1) dokładnie jeden składnik v_k w szeregu (2).

Rzeczywiście, jeżeli przyjmiemy dowolnie oznaczoną, byle od zera większą wartość całkowitą na i , to pośród trzech równań

$$i = 4n + 1, \quad i = 4n + 3, \quad i = 2n + 2,$$

znajdzie się zawsze jedno, ale tylko jedno takie równanie, które da na n wartość całkowitą, a ta wartość całkowita na n od zera mniejszą nie będzie i będzie określona bez żadnej dwuznaczności. Rzeczone równanie należeć będzie do pewnego jednego z trzech układów (6), (7) i (8), a drugie równanie tego układu po podstawieniu na n wartości, wyznaczonej z pierwszego, określi w zupełności tę wartość na k , która odpowiada rozważanej wartości na i . Ostatecznie, przy rozważanej odpowiedniości wzajemnej składników szeregów (1) i (2) każdemu składnikowi któregośkolwiek z tych szeregów odpowiada dokładnie jeden składnik drugiego.

Ponieważ zaś na podstawie równości (5) odpowiadające sobie wzajemnie składniki szeregów (1) i (2) są pomiędzy sobą równe, przeto szeregi te rzeczywiście tylko porządkiem składników różnią się pomiędzy sobą.

Z drugiej znów strony, jeżeli tylko żadne dwa składniki szeregu (1) nie są pomiędzy sobą równe, to przy wartościach (5) składników szeregu (2) oczywiście nie będzie istnieć taka liczba całkowita i dodatnia N , żeby nierówność (3) pociągała za sobą równość (4); przeto podaliśmy rzeczywiście przykład takiej przemiany porządku składników szeregu nieskończonego, która obejmuje nieskończenie wiele tychże.

Przykład powyższy możemy łatwo uogólnić:

Przyjmijmy dowolnie pewną od liczby 2 większą liczbę całkowitą p , uważajmy jakikolwiek składnik v_k szeregu (2) i oznaczmy przez n całkowitą część ilorazu podziału liczby k przez p , a przez r odnośną resztę; mamy tedy

$$(9) \quad \begin{aligned} k &= n \cdot p + r, \\ 0 &\leq r < p, \\ n &\geq 0. \end{aligned}$$

W razie równości

$$r = 0,$$

przyjmijmy

$$(10) \quad v_k = u_{2n},$$

a w przypadku kiedy zachodzi nierówność

$$r \neq 0,$$

umówmy się, że składnik v_k szeregu (2) wyznaczony ma być z równania

$$(11) \quad v_k = u_{2(p-1)n+2r-1}.$$

Przy takim określeniu składników szeregu (2) szeregi (1) i (2) tylko porządkiem składników różnić się pomiędzy sobą będą, a ta przemiana porządku składników w którymkolwiek z rzeczywistych szeregów, która szereg ten przemienia na drugi, obejmować będzie nieskończenie wiele składników odnośnego szeregu.

Żeby przekonać się o tem, umówmy się, że warunek, ażeby dwa składniki u_i i v_k szeregów (1) i (2) uważane być miały za odpowiadające sobie wzajemnie składniki tych szeregów, polega na tem, żeby zachodziły jednocześnie, albo związki układu

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} i &= 2n \\ k &= pn, \end{aligned} \right.$$

albo związku układu

$$\left. \begin{aligned} i &= 2(p-1)n + 2r - 1, \\ k &= pn + r, \\ r &< p, \\ r &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

gdzie oznaczyliśmy przez n i r dwie liczby całkowite.

Przyjmijmy na k jakąkolwiek, byle od zera większą wartość całkowitą. Jeżeli ta wartość na k jest podzielna przez p , to związki (13) nie będą mogły zachodzić, a równania (12) określa bez żadnej dwuznaczności liczby całkowite n i i , dając przytem na i wartość od zera większą. Jeżeli zaś wartość przyjęta na k przez p podzielna nie jest, to równania (12) nie będą mogły zachodzić, ostatnie trzy związki układu (13) określa bez żadnej dwuznaczności liczby n i r , a pierwsze równanie układu (13) da na i całkowitą oznaczoną, od zera większą wartość. Załóżmy teraz, żeśmy przyjęli na i jakąkolwiek, byle od zera większą wartość całkowitą. Jeżeli wartość przyjęta na i jest parzystą, to związki (13) nie będą mogły zachodzić, a związki (12) dadzą oznaczoną w zupełności, od zera większą wartość całkowitą na k . Gdyby zaś wartość przyjęta na i parzystą nie była, to równania (12) oczywiście nie będą mogły zachodzić, ale stwierdzimy niżej, że związki (13) określają w takim razie liczbę k bez żadnej dwuznaczności. Jeżeli wogóle możliwą jest rzeczą uczynić zadość związkom (13), to liczba n będzie równać się całkowitej części ilorazu, a wyrażenie

$$2r - 1$$

reszcie podziału liczby i przez liczbę

$$2(p-1),$$

gdyż na podstawie ostatnich dwóch związków układu (13) i tej okoliczności, że liczby p i r są liczbami całkowitemi, z których p od jedności jest większa, mamy

$$0 < 2r - 1 < 2(p - 1).$$

Oznaczmy przez n' całkowitą część ilorazu, a przez R resztę podziału liczby i przez liczbę

$$2(p-1).$$

Ponieważ mamy

$$2(p-1) > 0,$$

przeto liczby n' i R określone będą w zupełności.

Z drugiej strony na podstawie uwagi dopiero co uczynionej, jeżeli wogóle zadośćuczynienie związkowi (13) jest rzeczą możliwą, to okoliczność tę możemy urzeczywistnić tylko przez to, że przyjmujemy:

$$(14) \quad \begin{cases} n = n' \\ 2r - 1 = R, \end{cases}$$

Pierwsze z tych równań daje na n oznaczoną w zupełności, od zera nie mniejszą wartość całkowitą, a ponieważ liczba R jest oczywiście liczbą całkowitą nieparzystą, od zera większą, przeto drugie z powyższych równań da na r wartość całkowitą, oznaczoną w zupełności i od zera większą. Zatem istnieje jeden, i tylko układ wartości całkowitych na n i r , sprawdzających trzy ostatnie związki układu (13). Uwzględniając pierwszy związek układu (13), wnosimy z wyników powyższych natychmiast, że w rozważanym przypadku odpowiada liczbie k rzeczywiście jedna, i tylko jedna taka wartość na i , przy której związki (13) zachodzą.

Z powyższej dyskusji związków (12) i (13) wynika, że przy tej odpowiedniości wzajemnej składników szeregów (1) i (2), którą określiliśmy wyżej, rzeczywiście odpowiada każdemu składnikowi któregośkolwiek z rzeczonych szeregów dokładnie jeden składnik drugiego. Ponieważ zaś na podstawie równości (10) i (11) odpowiadające sobie wzajemnie składniki szeregów (1) i (2) są pomiędzy sobą równe, przeto każdy z tych szeregów różni się od drugiego rzeczywiście tylko porządkiem składników.

Czytelnik stwierdzi z łatwością, że przykład, w którym określiliśmy składniki szeregu (2) przez wzory (5), jest tym szczególnym przypadkiem przykładu obecnego, w którym mamy

$$p = 3.$$

I. Jeżeli pewien szereg

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

jest zbieżny bezwzględnie, a pewien drugi szereg

$$(2) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

różni się od pierwszego tylko порядkiem składników, to szereg ten jest także zbieżny bezwzględnie, a suma jego równa się sumie pierwszego.

Przedewszystkiem czynimy uwagę następującą: jeżeli przyjmujemy

$$s_p = \sum_{i=1}^p u_i \quad (3)$$

$$\sigma_q = \sum_{j=1}^q v_j \quad (4)$$

i założymy to jedno, że szeregi (1) i (2) różnią się od siebie tylko порядkiem składników, to każdej wartości całkowitej i dodatniej liczby p odpowiadać będzie pewna taka liczba całkowita i dodatnia Q , żeby w razie nierówności

$$q \geq Q, \quad (5)$$

wszystkie składniki sumy s_p znajdowały się pomiędzy składnikami sumy σ_q . Istotnie, składnikom

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_p \quad (6)$$

szeregu (1) odpowiadać będą odpowiednio pewne równe im składniki

$$v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, v_{\alpha_3}, \dots, v_{\alpha_p} \quad (7)$$

szeregu (2); jeżeli więc oznaczymy przez Q największą z p liczb następujących:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p,$$

to w razie nierówności (5) każdy z tych składników szeregu (2), który należy do układu (7), znajdzie się pośród składników sumy σ_q , a ponieważ liczby (7) równają się odpowiednio liczbom (6), przeto w razie nierówności (5) i dostatecznie wielkiej wartości na Q wszystkie składniki sumy (3) rzeczywiście znajdować się będą pośród składników sumy (4). Oczywiście liczba Q w żadnym razie mniejszą od liczby p wypaść nie może.

Ze względu na naturę symetryczną związku, zachodzącego pomiędzy szeregami, z których jeden różni się od drugiego tylko порядkiem składników, odpowiadać będzie każdej wartości całkowitej i dodatniej liczby q taka liczba całkowita i dodatnia P , iż w razie nierówności

$$p \geq P,$$

wszystkie składniki sumy σ_q znajdować się będą pośród składników sumy s_p .

Przypuśćmy, że szeregi (1) i (2) sprawdzają założenia twierdzenia i oznaczmy przez ε dowolnie przyjętą, byle od zera większą liczbę. Ponieważ szereg (1) zbieżny jest bezwzględnie, przeto liczbie ε odpowiadać będzie taka liczba całkowita i dodatnia p , że nierówność

$$(8) \quad i \geq p$$

pociągać będzie za sobą nierówność

$$(9) \quad \sum_{\mu=1}^{\alpha} |u_{i+\mu}| < \varepsilon,$$

jakąkolwiek wartość całkowitą i dodatnią przyjelibyśmy na α .

Oznaczmy przez Q taką liczbę całkowitą i dodatnią, żeby w razie nierówności (5) wszystkie składniki sumy s_p znajdowały się pośród składników sumy σ_q , i uważajmy różnicę

$$(10) \quad \varphi_j = s_j - \sigma_j = \sum_{k=1}^j u_k - \sum_{l=1}^j v_l,$$

zakładając, że zachodzi związek

$$(11) \quad j \geq Q.$$

Na podstawie definicji liczby Q , odpowiadać będzie w takim razie każdemu takiemu składnikowi u_k sumy s_j , którego wskaźnik k sprawdza związek

$$k \leq p,$$

równy mu składnik w sumie σ_i ; jeżeli więc ze wzoru (10) na φ_j usuniemy wszystkie te składniki, które znoszą się wzajemnie, to uzyskamy wyrażenie równe sumie algebraicznej liczb, z których każda równać się będzie pewnemu składnikowi szeregu (1) rzędu wyższego od liczby p , a każda składnikowi odmiennego rzędu. Jeżeli więc oznaczmy przez α liczbę całkowitą i dodatnią, dostatecznie wielką, to mieć będziemy niezawodnie

$$(12) \quad \left| \varphi_j \right| \leq \sum_{\mu=1}^{\alpha} \left| u_{p+\mu} \right|,$$

a ponieważ związek (8) pociąga za sobą związek (9), jakąkolwiek wartość całkowitą i dodatnią przyjelibyśmy na α , ponieważ zatem możemy przyjąć w nierówności (9) wartość p na i , a na α taką

wartość, żeby zachodził związek (12), przeto stwierdzamy, że zachodzić będzie nierówność

$$|\varphi_j| < \varepsilon. \quad (13)$$

Dowiedliśmy więc, że każdej, byle od zera większej liczbie ε odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia Q , iż związek (11) pociąga za sobą związek (13). Dowiedliśmy więc, że mamy

$$\lim_{j=\infty} \varphi_j = 0,$$

a ponieważ ze względu na zbieżność szeregu (1) mamy

$$\lim_{j=\infty} s_j = s,$$

gdzie s oznacza sumę wspomnianego szeregu, przeto mamy także

$$\lim_{j=\infty} (s_j - \varphi_j) = s.$$

Ze względu na wzór (10) na φ_j uzyskana równość równoważna jest równości

$$\lim_{j=\infty} \sigma_j = s,$$

która wyraża, że szereg (2) jest zbieżny, a suma jego równa się sumie s szeregu (1). Pozostaje tylko do udowodnienia, że szereg (2) nie tylko jest zbieżny, ale jest bezwzględnie zbieżny. Okoliczność tę uzasadnić możemy w kilku słowach: szereg

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots \quad (14)$$

jest zbieżny, albowiem założyliśmy, że szereg (1) jest bezwzględnie zbieżny. Z drugiej strony, ponieważ szereg (2) różni się tylko порядkiem składników od szeregu (1), przeto szereg

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| + \dots \quad (15)$$

różni się od szeregu (14) także tylko порядkiem składników. Ponieważ zaś dowiedliśmy, że szereg, który od oznaczonego, bezwzględnie zbieżnego szeregu, tylko порядkiem składników różni się, sam jest zbieżny, przeto szereg (15) będzie niezawodnie szeregiem zbieżnym [o sumie oczywiście równej sumie szeregu (14)]. Zatem szereg (2) będzie rzeczywiście szeregiem zbieżnym bezwzględnie.

Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

II. Założmy, że pewien szereg

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

jest zbieżny, nie będąc jednak szeregiem zbieżnym bezwzględnie; w takim razie drogą prostej zmiany porządku składników szeregu tego możemy uzyskać nowy szereg

$$(2) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

który na żądanie będzie szeregiem rozbieżnym lub szeregiem zbieżnym o sumie równej dowolnie naprzód danej liczbie.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zaznaczamy najpierw, że pośród składników szeregu (1) istnieje nieograniczona liczba składników dodatnich i nieograniczona liczba składników ujemnych, albowiem gdyby tak nie było, to szereg ten wbrew założeniu byłby oczywiście szeregiem zbieżnym bezwzględnie. Oznaczmy ogólnie przez u_{α_i} składnik dodatni szeregu (1), a przez u_{β_j} składnik ujemny, przyjmując oznaczenia tak, żeby nierówność

$$i > i'$$

pociągała za sobą nierówność

$$\alpha_i > \alpha_{i'},$$

a nierówność

$$j > j',$$

nierówność

$$\beta_j > \beta_{j'}.$$

Przy tych oznaczeniach symbol u_{α_i} przedstawia i -ty składnik dodatni, a symbol u_{β_j} — j -ty składnik ujemny szeregu (1).

Celem uproszczenia oznaczeń przyjmujemy

$$\begin{aligned} a_i &= u_{\alpha_i} \\ b_j &= -u_{\beta_j}. \end{aligned}$$

Mamy tedy przy wszystkich wartościach wskaźników i i j , nierówności

$$\begin{aligned} a_i &\geq 0 \\ b_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Powiadam, że każdy z szeregów

$$(3) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

i

$$(4) \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

jest szeregiem rozbieżnym.

Istotnie, ponieważ pośród n pierwszych składników szeregu (1) znajdują się niezawodnie i składniki dodatnie i składniki ujemne, jeżeli tylko przyjmiemy na n wartość dostatecznie wielką, przeto mamy w takim razie

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{\alpha=1}^i a_{\alpha} - \sum_{\beta=1}^j b_{\beta}; \quad (5)$$

oznaczając przez i i j dwie, stosownie dobrane liczby całkowite, od jedności nie mniejsze, sprawdzające w każdym razie równość

$$i + j = n.$$

Na podstawie wzoru (5) mamy

$$\sum_{k=1}^n |u_k| = \sum_{\alpha=1}^i a_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^j b_{\beta},$$

gdyby więc każdy z szeregów (3) i (4) był zbieżny, to oznaczając przez A i B odpowiednio sumy tych szeregów, mielibyśmy

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^i a_{\alpha} &\leq A \\ \sum_{\beta=1}^j b_{\beta} &\leq B; \end{aligned}$$

mielibyśmy zatem na podstawie wzoru (5) nierówność

$$\sum_{k=1}^n |u_k| \leq A + B,$$

jakąkolwiek wartość całkowitą i dodatnią miałyby liczba n ; przeto (§ 123, tw. I), szereg

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

byłby zbieżny, a zatem szereg (1) byłby wbrew założeniu szeregiem zbieżnym bezwzględnie. Dowiedliśmy już więc, że jeden przynajmniej z szeregów (3) lub (4) musi być szeregiem rozbieżnym; stwierdziwszy, że okoliczność ta zachodzi, możemy już łatwo wywnioskować ze wzoru (5), że w rzeczywistości każdy z rozważa-

nych szeregów jest rozbieżny. Istotnie, gdyby jeden tylko z szeregów (3) i (4) był rozbieżny, a drugi zbieżny, to na podstawie wzoru (5) wartość sumy n pierwszych składników szeregu (1) nie byłaby ograniczona i rozważany szereg byłby (uwaga II przy tw. I § 121) wbrew założeniu szeregiem rozbieżnym.

Uważajmy teraz dowolnie przyjęty ciąg nieskończony

$$(6) \quad h_1, h_2, h_3, \dots$$

liczb całkowitych od zera większych. Możemy tedy, w zależności od ciągu tego, określić inny ciąg nieskończony

$$(7) \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$$

przyjmując na h_1 pierwsze wyrazy ciągu tego wartości

$$(8) \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^k a_i \quad (k = 1, 2, 3, \dots, h_1)$$

i ustawiając na wyznaczenie wyrazów wyższych rzędów tegoż ciągu, a więc dla przypadku, kiedy mamy

$$(9) \quad k > h_1,$$

regułą następującą¹⁾: wyznaczamy taką liczbę całkowitą α , żebyśmy mieli

$$\sum_{i=1}^{\alpha} h_i \leq k < \sum_{i=1}^{\alpha+1} h_i.$$

Ze względu na nierówność (9) liczba α zawsze istnieć będzie, a wartość jej oczywiście określona będzie w zupełności; ale dwa przypadki zdarzyć się mogą: 1^o liczba α jest nieparzysta, 2^o liczba α jest parzysta.

W pierwszym przypadku możemy przyjąć

$$(10) \quad \alpha = 2p - 1,$$

a w drugim

$$(11) \quad \alpha = 2p,$$

¹⁾ Czytelnik ułatwi sobie w znacznym stopniu zrozumienie dalszych wywodów, jeżeli dla przykładu oznaczy dowolnie liczbowo kilka pierwszych wyrazów ciągu (6) (przynajmniej ze cztery) i wypisze wyraźnie na podstawie reguły, podanej w tekście, wzory na

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \text{ aż do } \sigma_{h_1+h_2+h_3+h_4},$$

przyjmując przytem na liczby $h_1, h_2, h_3 \dots$ niezbyt małe wartości, np. $h_1 = 3, h_2 = 5, h_3 = 2, h_4 = 6$.

oznaczając w obu przypadkach przez p pewną liczbę całkowitą, która w żadnym razie od jedności mniejsza nie będzie. W razie nieparzystości liczby α wyznaczamy liczbę p z równości (10) i, przyjąwszy

$$v_k = \sum_{\lambda=1}^p h_{2\lambda-1}, \quad (12)$$

określamy wyraz σ_k ciągu (7) wzorem następującym:

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{v_k} a_i - \sum_{j=1}^{k-v_k} b_j. \quad (13)$$

Jeżeli zaś liczba α jest parzysta, to wyznaczamy liczbę p z równości (11) i przyjąwszy

$$\mu_k = \sum_{\lambda=1}^p h_{2\lambda},$$

określamy wyraz σ_k ciągu (7) wzorem

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k-\mu_k} a_i - \sum_{j=1}^{\mu_k} b_j. \quad (14)$$

Przyjmijmy

$$v_1 = \sigma_1 \quad (15)$$

oraz ogólnie

$$v_{k+1} = \sigma_{k+1} - \sigma_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (16)$$

W takim razie szereg (2) będzie wynikiem prostej zmiany porządku składników szeregu (1). Istotnie, zważmy najpierw, co następuje:

1°. Pierwszy wyraz ciągu (7) równa się pewnemu składnikowi u_{α_1} szeregu (1) na podstawie wzoru (8).

2°. Drugi i każdy dalszy wyraz ciągu (7) jest na podstawie wzorów (8), (13) i (14) sumą pewnej liczby odmiennych pomiędzy sobą rzędów składników szeregu (1).

3°. Na podstawie wzorów (8), (13) i (14) każdy wyraz σ_{k+1} ciągu (7), począwszy od drugiego, wynika z wyrazu σ_k , który poprzedza go bezpośrednio, przez dodanie do niego pewnego takiego składnika szeregu (1), którego rząd jest odmienny od rzędu każdego

z tych składników szeregu (1), za sumę których uważać należy wyraz σ_k .

Z uwag tych wynika, że pomiędzy składnikami szeregów (1) i (2) istnieje taka wzajemna odpowiedniość, iż każdemu składnikowi szeregu (2) odpowiada równy mu składnik szeregu (1), a każdemu inny.

Odpowiedniość tę możemy określić wyraźnie, oświadczając, że składnikowi v_1 szeregu (2) odpowiada składnik u_{α_1} szeregu (1), a każdemu innemu składnikowi v_k ($k > 1$) szeregu (2) ten składnik u_q szeregu (1), który wchodzi do wzoru

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} + u_q,$$

określającego σ_k w zależności od σ_{k-1} .

Żeby okazać, że szereg (2) jest wynikiem przemiany porządku składników szeregu (1), pozostaje tylko udowodnić, że przy powyższej odpowiedniości wzajemnej składników obu szeregów każdemu składnikowi szeregu (1) odpowiada oznaczony składnik szeregu (2).

Otóż każdemu składnikowi u_m szeregu (1) odpowiada w pewnym jednym z ciągów (3) i (4) dokładnie jeden wyraz, który uważany być winien jako określony przez to, iż przedstawia wartość bezwzględną składnika u_m szeregu (1). W przypadku szczególnym, kiedy rzeczonym wyrazem jest wyraz a_1 ciągu (3), odpowiada składnikowi u_m szeregu (1) składnik

$$v_1 = a_1$$

szeregu (2); jeżeli zaś owym wyrazem jest pewien wyraz a_i ($i > 1$) ciągu (3), to wyrazowi temu odpowiadać będzie pewna taka liczba całkowita k , żebyśmy mieli

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} + a_i,$$

a w takim razie wyrazowi u_m szeregu (1) odpowiadałby wyraz

$$v_m = a_i$$

szeregu (2); gdyby nareszcie rozważanym wyrazem był pewien wyraz b_j ciągu (3), to wyrazowi temu odpowiadałaby pewna taka liczba całkowita t , żebyśmy mieli

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} - b_j,$$

a w tym przypadku odpowiadałby wyrazowi u_m szeregu (1) wyraz

$$v_i = -b_j$$

szeregu (2).

Zatem przy rozważanej odpowiedniości wzajemnej składników szeregów (1) i (2) odpowiada rzeczywiście i każdemu składnikowi szeregu (1) jeden składnik szeregu (2). Ponieważ odpowiadające sobie składniki szeregów (1) i (2) są pomiędzy sobą równe, przeto dowiedliśmy, że szereg (2) w razie wyznaczania składników jego ze wzorów (15) i (16) stanowi rzeczywiście wynik zmiany porządku składników szeregu (1).

W dalszym ciągu założymy, że składniki szeregu (2) wyznaczone zostały na podstawie wspomnianych wzorów.

Powiadam, że ciąg (6) możemy tak określić, żeby szereg (2) był rozbieżny.

Istotnie, przyjmijmy ogólnie

$$h_{2k} = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Mamy tedy

$$\sum_{k=1}^p h_{2k} = p,$$

oraz

$$\sigma_{m+p} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^p b_j,$$

gdzie przyjęliśmy dla krótkości

$$m = \sum_{t=1}^{p+1} h_{2t-1}.$$

Przyjawszy na h_1 jakąkolwiek, byle od zera większą wartość całkowitą, na przykład wartość

$$h_1 = 1,$$

możemy ze względu na rozbieżność szeregu (3) wyznaczać kolejno wyrazy ciągu

$$h_3, h_5, h_7, \dots$$

z tego warunku, żebyśmy mieli

$$\sigma_{m+p} > p$$

przy każdej, byle od jedności nie mniejszej wartości całkowitej liczby p .

W takim razie wartości wyrazów ciągu (7) ograniczone nie będą i ciąg ten będzie z tego powodu (uwaga II, tw. I § 121) rozbieżny, a ponieważ mamy

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^k v_i,$$

przeto szereg (2) będzie także rozbieżny. Dowiedliśmy więc, że drogą prostej zmiany porządku składników szeregu, który jest zbieżny, bezwzględnie jednak zbieżnym nie będąc, możliwem jest użycie szeregu rozbieżnego.

Powiadam, że ciąg (6) można tak określić, żeby szereg (2) był zbieżny i żeby suma jego równała się dowolnie naprzód danej liczbie L .

Przyjmijmy ogólnie

$$(17) \quad m_p = \sum_{i=1}^p h_i.$$

Mamy tedy

$$(18) \quad \sigma_{m_1} = \sum_{i=1}^{h_1} v_i$$

$$(19) \quad \sigma_{m_{2k}} = \sigma_{m_{2k+1}} + \sum_{i=1}^{h_{2k}} v_{m_{2k-1}+i},$$

$$(20) \quad \sigma_{m_{2k+1}} = \sigma_{m_{2k}} + \sum_{i=1}^{h_{2k+1}} v_{m_{2k}+i}.$$

Suma

$$\sum_{i=1}^{h_1} v_i$$

i każda suma postaci

$$\sum_{i=1}^{h_{2k+1}} v_{m_{2k}+i},$$

gdzie k oznacza od jedności nie mniejszą liczbę całkowitą, przedstawia sumę pewnej liczby kolejno po sobie następujących składników szeregu (3), a suma

$$\sum_{i=1}^{h_{2k}} v_{m_{2k+1}+i}$$

jest przy każdej, od jedności nie mniejszej wartości całkowitej na k , przez mniej jeden pomnożoną sumę pewnej liczby kolejno następujących po sobie składników szeregu (4). Ponieważ szeregi (3) i (4) są rozbieżne, przeto sumy postaci

$$\sum_{j=\alpha_1}^{\alpha_2} a_j \quad \text{ i } \quad \sum_{j=\beta_1}^{\beta_2} b_j,$$

rosną nieograniczenie przy nieograniczonym zwiększaniu liczb α_2 i β_2 , jakiegokolwiek wartości całkowite i dodatnie nadalibyśmy liczbom α_1 i β_1 . Zatem uwzględniając powyższe uwagi oraz wzory (18), (19) i (20) i powołując się na zasadę indukcji matematycznej, możemy określić ciąg (6) w sposób następujący: na liczbę h_1 przyjmujemy najmniejszą, od jedności jednak nie mniejszą taką wartość, żebyśmy mieli

$$\sigma_{m_1} \geq L; \quad (21)$$

po wyznaczeniu wszystkich wyrazów ciągu (6) aż do wyrazu h_{2k-1} włącznie ($k \geq 1$), przyjmujemy na h_{2k} najmniejszą od jedności jednak nie mniejszą taką wartość, żeby zachodził związek

$$\sigma_{m_{2k}} \leq L, \quad (22)$$

a liczbę h_{2k+1} określamy następnie jako najmniejszą, od jedności nie mniejszą taką liczbę, żeby zachodził związek

$$\sigma_{m_{2k+1}} \geq L. \quad (23)$$

Powiadam najpierw, że ciąg

$$\sigma_{m_1}, \sigma_{m_2}, \sigma_{m_3}, \dots \quad (24)$$

jest ciągiem zbieżnym o granicy równej liczbie L . Zwracając się do związków (22) i (23), sprawdzamy, że jakąkolwiek od jedności większą liczbę oznaczylibyśmy przez p , liczba L nie może być ani mniejsza od mniejszej z liczb

$$\sigma_{m_p} \quad \text{ i } \quad \sigma_{m_p} - v_{m_p},$$

ani większa od większej. Mamy więc

$$|L - \sigma_{m_p}| \leq |v_{m_p}|. \quad (25)$$

Uważajmy obecnie ciąg

$$(26) \quad v_{m_1}, v_{m_2}, v_{m_3}, \dots$$

Ze względu na zbieżność szeregu (1) ciąg

$$(27) \quad u_1, u_2, u_3, \dots$$

jest ciągiem zbieżnym o granicy równej zeru, zatem do dowolnie przyjętej od zera większej liczby ε możemy dobrać taką liczbę całkowitą i dodatnią N , żeby nierówność

$$(28) \quad i > N$$

pociągała za sobą nierówność

$$(29) \quad |u_i| < \varepsilon,$$

a ponieważ każdemu wyrazowi ciągu (26) odpowiada równy mu wyraz ciągu (27) i każdemu inny, przeto liczbie całkowitej i dodatniej N odpowiadać będzie druga liczba całkowita i dodatnia P taka, żeby w razie nierówności

$$(30) \quad p > P$$

wskaźnik i tego wyrazu u_i ciągu (27), który odpowiada wyrazowi v_{m_p} ciągu (26), sprawdzał nierówność (28). Ponieważ zaś nierówność (28) pociąga za sobą nierówność (29), przeto ze względu na równość

$$v_{m_p} = u_i,$$

nierówność (30) pociągać będzie za sobą nierówność

$$|v_{m_p}| < \varepsilon,$$

a więc i nierówność

$$(31) \quad |L - \sigma_{m_p}| < \varepsilon.$$

Zatem ciąg (24) jest rzeczywiście ciągiem zbieżnym o granicy równej liczbie L .

Powiadam teraz, że ciąg (7) jest także ciągiem zbieżnym, którego granica równa też się liczbie L .

Istotnie, zachowując poprzednie znaczenie dla symbolów ε i P , uważajmy taki wyraz σ_k ciągu (7), którego wskaźnik k sprawdza nierówność

$$(32) \quad k > m_{P+1}.$$

Liczbie k odpowiadać będzie oczywiście pewna taka liczba p , żebyśmy mieli

$$m_p \leq k < m_{p+1}. \quad (33)$$

Z drugiej znów strony, ze względu na definicję wyrazów ciągu (7), wyrazy

$$\sigma_{m_p}, \sigma_{m_p+1}, \sigma_{m_p+2}, \dots, \sigma_{m_{p+1}},$$

ciągu (7) stanowią ciąg skończony monotoniczny, pośród wyrazów którego znajduje się ze względu na związki (33) wyraz σ_k ciągu (7). Zatem wyraz σ_k nie może być ani mniejszy od mniejszego, ani większy od większego z wyrazów

$$\sigma_{m_p} \quad \text{ i } \quad \sigma_{m_{p+1}}$$

ciągu (24). Ponieważ zaś liczba L także nie jest ani mniejsza od mniejszego, ani większa od większego z tych wyrazów ciągu (24), przeto wyrażenie

$$|\sigma_k - L| \quad (34)$$

nie może być większe od większego z wyrażeń

$$|\sigma_{m_p} - L| \quad \text{ i } \quad |\sigma_{m_{p+1}} - L|. \quad (35)$$

Ale ze względu na związki (32) i (33) zachodzi nierówność (30), która pociąga za sobą nierówność (31), a więc tembardziej i nierówność

$$|\sigma_{m_{p+1}} - L| < \varepsilon.$$

Zatem każde z wyrażeń (35) mniejsze jest od liczby ε . Z tego zaś wynika, że wyrażenie (34) także jest mniejsze od ε . Mamy więc

$$|\sigma_k - L| < \varepsilon. \quad (36)$$

Zatem dowiedliśmy, co następuje: każdej, byle od zera większej liczbie dodatniej ε odpowiada pewna taka liczba całkowita i dodatnia

$$m_{p+1},$$

iż nierówność (32) pociąga za sobą nierówność (36).

Dowiedliśmy więc, że ciąg (7) jest ciągiem zbieżnym o granicy równej liczbie L . Ponieważ wyraz jakiegokolwiek rzędu k ciągu (7) przedstawia sumę k pierwszych składników szeregu (2), czyli redukt rzędu k tego szeregu, przeto z powyższych rozważań wynika, że szereg (2) jest zbieżny, a suma jego równa się liczbie L .

Stwierdzamy więc, że możemy zawsze tak przemienić porządek składników szeregu zbieżnego, który bezwzględnie zbieżny nie jest, iżby uzyskany tą drogą szereg był szeregiem zbieżnym o sumie równej dowolnie naprzód danej liczbie L . Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Dwa w tym paragrafie udowodnione twierdzenia uwidoczniają głęboką różnicę, która zachodzi pomiędzy szeregami zbieżnymi bezwzględnie a szeregami zbieżnymi tylko warunkowo wobec przemiany porządku składników: jakakolwiek przemiana porządku składników w szeregu zbieżnym bezwzględnie nie tylko nie może spowodować dla szeregu zatury własności zbieżności, ale pozostaje bez wpływu na wartość sumy; natomiast przemieniając w szeregu tylko warunkowo zbieżnym porządek składników, możemy według życzenia uzyskać szereg rozbieżny, albo szereg zbieżny o sumie równej dowolnie naprzód danej liczbie. Żeby jednak zapobiedz wszelkiemu nieporozumieniu, dodajemy, że wspomniane przeciwieństwo we własnościach szeregów zbieżnych bezwzględnie i szeregów zbieżnych warunkowo zachodzi tylko wobec takich przemian porządku składników, które obejmują nieskończenie wiele tychże; natomiast jakakolwiek taka zmiana porządku składników szeregu zbieżnego, która obejmuje tylko skończoną ich liczbę, nie może w żanym razie ani spowodować zatury własności zbieżności szeregu, ani nawet wywrzeć jakiegokolwiek wpływu na wartość sumy (porównaj ostatnie wiersze str. 515).

W najbliższym związku z okolicznościami, które towarzyszą zmianie porządku składników szeregu nieskończonego, znajdują się te, które zachodzą w razie usunięcia pewnych składników z oznaczonego szeregu nieskończonego; usunąć pewien zbiór składników (Z) z oznaczonego szeregu

$$(37) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

znaczy utworzyć nowy szereg

$$(38) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots,$$

spełniający warunki następujące:

1°. Każdemu składnikowi v_i szeregu (2) odpowiada pewien jeden i tylko jeden składnik u_{α_i} szeregu (U).

2°. Przy wszystkich wartościach wskaźnika i mamy

$$v_i = u_{\alpha_i}.$$

3°. Nierówność

$$j > i$$

pociąga za sobą nierówność

$$\alpha_j > \alpha_i.$$

4°. Pośród tych składników szeregu (u), które w powyższy sposób odpowiadają składnikom szeregu (v) nie znajduje się żaden składnik ze zbioru (Z), ale zato znajdują się wszystkie inne składniki szeregu (u).

Jeżeli zbiór (Z) obejmuje skończoną tylko liczbę składników szeregu (u), to istnieją pewne takie dwie liczby całkowite i dodatnie n i m , iż nierówność

$$i > n$$

pociąga za sobą równość

$$v_i = u_{m+i},$$

skąd wynika, że szeregi (u) i (v) jednocześnie tylko zbieżnymi szeregami być mogą, a nadto w razie zbieżności suma szeregu (u) oczywiście równa się wynikowi dodania do sumy szeregu (v) sumy składników zbioru (Z).

Jeżeli zaś zbiór (Z) obejmuje nieskończenie wiele składników szeregu (u), to, jak czytelnik z łatwością udowodni, w razie zbieżności bezwzględnej szeregu (u) szereg (v) jest zbieżny, i to bezwzględnie; w przypadku zaś, kiedy szereg (u) zbieżny jest tylko warunkowo, szereg (v) może być rozbieżny. Okoliczność ta nastąpi niezawodnie w takim razie na przykład, kiedy usuniemy z szeregu (u), zbieżnego warunkowo, wszystkie składniki ujemne, albo wszystkie składniki dodatnie.

Wyniki, do których doszliśmy, doskonale uwidoczną już filozoficzne znaczenie mającą okoliczność następującą: pewne twierdzenie może być uzasadnione, jakkolwiek wartość skończoną, choćby jak wielką, miałyby pewna liczba, a może jednak być błędne w razie, kiedy wspomniana liczba nie jest skończoną. Istotnie, suma jakiegokolwiek liczby składników rzeczywistych posiada własność przemienności, a jednak suma nieskończenie wielu liczb rzeczywistych, mianowicie suma składników szeregu zbieżnego, rozumiejąc przez sumę tę sumę szeregu, może własności przemienności nie posiadać. Oczywiście zachodzi jeszcze pomiędzy sumą skończonej liczby składników, a sumą nieskończenie wielu tychże i ta zasadnicza róż-

nica, że w pierwszym przypadku wyraz suma ma zawsze pewne określone znaczenie, a w drugim, o ile do definicyi podanych już w tych wykładach nie dodamy nowych, jest niepozabawione treści tylko w razie, kiedy chodzi o sumę składników szeregu zbieżnego.

§ 128. Uważajmy dwa szeregi zbieżne

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

i

$$(2) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

Z definicyi sumy szeregu zbieżnego i twierdzenia uzasadnionego w § 117-tym, wynika, że iloczyn sum szeregów (1) i (2) równa się granicy niezawodnie zbieżnego ciągu, którego wyraz rzędu p , A_p , określony jest ogólnym wzorem następującym:

$$(3) \quad A_p = \left(\sum_{h=1}^p u_h \right) \left(\sum_{g=1}^p v_g \right).$$

Możemy więc zawsze przedstawić (§ 120) iloczyn sum szeregów (1) i (2) jako sumę szeregu zbieżnego, mianowicie szeregu

$$A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \dots$$

Jeżeli jednak jeden przynajmniej z szeregów (1) i (2) zbieżny jest bezwzględnie, to w takim razie iloczyn sumy s szeregu (1) i sumy σ szeregu (2) możemy przedstawić w postaci sumy szeregu zbieżnego kształtu bardziej dogodnego, mianowicie mamy wtedy

$$(4) \quad s \cdot \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} w_k,$$

przyjmując

$$(5) \quad w_k = \sum_{h=1}^k u_{k+1-h} \cdot v_h.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, założmy, że szeregi (1) i (2) sprawdzają założenia twierdzenia i przyjmijmy

$$(6) \quad Q_p = A_p - \sum_{k=1}^p w_k.$$

Powiadamy, że mamy

$$(7) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} Q_p = 0.$$