

§ 125. Żeby lepiej zapoznać czytelnika z naturą pojęcia zbieżności, zamierzamy przeprowadzić bliższą dyskusję twierdzeń paragrafu poprzedzającego.

Przedewszystkiem wobec wspomnianych twierdzeń nasuwa się z natury rzeczy pytanie następujące: czy w twierdzeniach paragrafu poprzedzającego wyrażone warunki zbieżności, względnie rozbieżności szeregów nieskończonych o składnikach dodatnich są konieczne?

Żeby na pytanie to odpowiedzieć, uzasadnimy najpierw twierdzenie przygotowawcze, które opiewa, jak następuje:

Jeżeli, oznaczając przez a pewną jakąkolwiek, byle od zera większą liczbę, określimy ogólnie wyraz rzędu k ciągu nieskończonego

$$(1) \quad u_1, u_2, u_3, \dots$$

równaniem

$$(2) \quad u_k = \sqrt[k]{a},$$

przyjmując wartość dodatnią na wyrażenie

$$\sqrt[k]{a},$$

to ciąg (1) będzie zbieżny, a granica ciągu tego równać się będzie jedności. Krócej: wartość dodatnia wyrażenia $\sqrt[k]{a}$, gdzie a oznacza liczbę od zera większą, zmierza do jedności, gdy liczba całkowita i dodatnia k rośnie nieograniczenie.

W przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$a = 1,$$

twierdzenie jest oczywiste, albowiem mamy, tedy

$$u_k = 1$$

przy wszystkich wartościach wskaźnika k .

Pozostają więc tylko dwa przypadki do zbadania.

1°. Przypadek, w którym mamy

$$(3) \quad a > 1.$$

2°. Przypadek, w którym zachodzi nierówność

$$(4) \quad a < 1.$$

W razie nierówności (3) mamy

$$u_k > 1;$$

jeżeli więc przyjmiemy

$$u_k = 1 + \alpha_k, \quad (5)$$

to zachodzić będzie nierówność

$$\alpha_k > 0. \quad (6)$$

Mamy (str. 527) tedy

$$u_k^k = (1 + \alpha_k)^k > 1 + k\alpha_k,$$

a ponieważ mamy

$$u_k^k = a$$

na podstawie równania (2), przeto mamy

$$\alpha_k < \frac{a-1}{k}. \quad (7)$$

Z równości (6) i (7) wynika natychmiast równość

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0,$$

która ze względu na równość (5) pociąga za sobą równość

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 1, \quad (8)$$

a ta wyraża właśnie, że ciąg (1) jest ciągiem zbieżnym o granicy równej jedności

Przypadek, w którym zachodzi nierówność (4), możemy łatwo sprowadzić do przypadku poprzedzającego: przyjmijmy

$$a' = \frac{1}{a}.$$

Mamy tedy

$$u_k = \sqrt[k]{a'} \quad (9)$$

oraz

$$a' > 1,$$

zatem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a'} = 1, \quad (10)$$

a ponieważ na podstawie wzoru (9) możemy uważać u_k za iloraz podziału k -tego wyrazu ciągu nieskończonego, którego wszystkie wyrazy równają się jedności i którego granica zatem także jedności się równa, przez k -ty wyraz ciągu, którego granica równa się ze względu na równanie (10) znowu jedności, przeto (§ 117) i w obecnym przypadku zachodzi równość (8), którą pragnęliśmy uzasadnić. Udowodniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Uważajmy obecnie szereg nieskończony

$$(11) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

o składnikach dodatnich i załóżmy, że jest zbieżny ciąg nieskończony

$$(12) \quad \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \dots$$

którego wyraz ogólny rzędu k równa się stosunkowi składnika rzędu $k+1$ szeregu (11) do składnika, który go w rozważanym szeregu bezpośrednio poprzedza.

Oznaczając granicę ciągu powyższego przez a , mamy tedy

$$(13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = a.$$

Zamierzam udowodnić, że przy tych założeniach zachodzi równość następująca:

$$(14) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = a,$$

gdzie, zarówno jak i we wszystkich dalszych rozważaniach, winna być uważana tylko dodatnia wartość pierwiastka.

W tym celu zważmy, że jakąkolwiek, byle od zera większą liczbę oznaczylibyśmy przez μ , liczbie tej odpowiadać będzie w każdym razie taka liczba całkowita i dodatnia m , żeby nierówność

$$(15) \quad k \geq m$$

pociągała za sobą nierówność

$$(16) \quad \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} - a \right| < \mu.$$

Nierówność ta pociąga za sobą nierówność następującą:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < a + \mu,$$

skąd łatwo możemy wywnioskować na podstawie zasady indukcji matematycznej, że związek (15) pociąga za sobą związek

$$u_k < u_m (a + \mu)^{k-m} = (a + \mu)^k \frac{u_m}{(a + \mu)^m},$$

skąd

$$\sqrt[k]{u_k} < (a + \mu) \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a + \mu)^m}}. \quad (17)$$

Twierdzenie przygotowawcze dopiero co dowiedzione poucza nas, że mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a + \mu)^m}} = 1.$$

Zatem uważanej przed chwilą liczbie μ odpowiadać będzie taka liczba całkowita i dodatnia N , żeby nierówność

$$k \geq N \quad (18)$$

pociągała za sobą nierówność

$$\left| \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a + \mu)^m}} - 1 \right| < \frac{\mu}{a + \mu},$$

czyli

$$\left| (a + \mu) \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a + \mu)^m}} - (a + \mu) \right| < \mu. \quad (19)$$

Możemy oczywiście narzucić liczbie N dodatkowy warunek, polegający na tem, żebyśmy mieli $N \geq m$.

Załóżmy, że liczba N i ten warunek sprawdza. W takim razie nierówność (18) pociąga za sobą prócz nierówności (19) jeszcze nierówność (15), a więc i nierówność (17). Z nierówności (19) mamy

$$(a + \mu) \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a + \mu)^m}} < a + 2\mu,$$

skąd

$$\sqrt[k]{u_k} < a + 2\mu \quad (20)$$

na podstawie nierówności (17).

Zastanówmy się chwilowo nad przypadkiem szczególnym, kiedy mamy

$$(21) \quad a = 0.$$

Ponieważ wyznaczyszmy liczbę μ z równania

$$2\mu = \varepsilon,$$

gdzie oznaczyliśmy przez ε dowolnie daną, byle od zera większą liczbę, uzyskamy na μ wartość, której ze względu na udowodniony dopiero co wynik odpowiadać będzie taka liczba całkowita i dodatnia N , żeby związek (18) pociągał za sobą związek (20), przeto liczbie ε odpowiadać będzie taka wartość liczby N , iż nierówność (18) pociągać będzie za sobą nierówność

$$\sqrt[k]{u_k} < \varepsilon,$$

skąd ze względu na nierówność

$$\sqrt[k]{u_k} > 0,$$

wynika, że mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = 0.$$

Zatem w przypadku szczególnym, kiedy zachodzi równość (21), uzasadniliśmy już równość (14).

Wracając do przypadku ogólnego, możemy ze względu na wynik poprzedzający założyć bez szkody dla ogólności, że zachodzi nierówność

$$(22) \quad a > 0.$$

Możemy tedy ograniczyć wybór wartości na liczbę μ do wartości sprawdzających nierówność

$$(23) \quad \mu < a.$$

Na podstawie nierówności (16) mamy w każdym razie

$$(24) \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} > a - \mu,$$

jeżeli tylko liczba k sprawdza nierówność (15). Zważywszy, że mamy

$$a - \mu > 0$$

na podstawie nierówności (23), łatwo stwierdzić możemy drogą indukcji matematycznej, opierając się na tem, że związek (15) pociąga za sobą nierówność (24), tę okoliczność, iż związek (15) pociąga za sobą nierówność

$$u_k > u_m (a - \mu)^{k-m}$$

czyli

$$u_k > (a - \mu)^k \frac{u_m}{(a - \mu)^m},$$

skąd

$$\sqrt[k]{u_k} > (a - \mu) \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a - \mu)^m}}, \quad (25)$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia przygotowawczego, uzasadnionego wyżej, mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a - \mu)^m}} = 1,$$

przeto drogą ewentualnego zwiększenia liczby N , stanowiącej prawą stronę związku (18), możemy to uzyskać, żeby związek (18) pociągał za sobą prócz następstw rozważanych poprzednio jeszcze i nierówność następującą:

$$\left| (a - \mu) \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a - \mu)^m}} - (a - \mu) \right| < \mu,$$

skąd

$$(a - \mu) \sqrt[k]{\frac{u_m}{(a - \mu)^m}} > a - 2\mu.$$

Ze względu na (25) mamy tedy

$$\sqrt[k]{u_k} > a - 2\mu. \quad (26)$$

Dowiedliśmy więc, że każdej nierówności (23) sprawdzającej, byle od zera większej wartości liczby μ , odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia N , iż nierówność (18) pociąga za sobą jednocześnie nierówności (20) i (26). Nierówności te pociągają za sobą oczywiście nierówność

$$|\sqrt[k]{u_k} - a| < 2\mu. \quad (27)$$

Jakąkolwiek od zera większą liczbę oznaczylibyśmy przez ε , możemy przyjąć na liczbę μ wartość od zera większą, sprawdzającą prócz nierówności (23) jeszcze nierówność

$$2\mu \leq \varepsilon,$$

a ponieważ na podstawie uzyskanych wyników przyjętej w ten sposób wartości na μ odpowiadać będzie taka liczba całkowita i dodatnia N , żeby nierówność (18) pociągała za sobą nierówność (27), która znów przy rozważanej wartości na μ pociąga za sobą nierówność

$$(28) \quad \left| \sqrt[k]{u_k} - a \right| < \varepsilon,$$

przeto stwierdzamy, że każdej od zera większej liczbie ε odpowiada taka wartość liczby całkowitej i dodatniej N , iż nierówność (18) pociąga za sobą nierówność (28).

Ostatecznie więc dowiedliśmy, że zgodnie z zapowiedzią równość (13) pociąga zawsze za sobą równość (14). Ostrzegamy jednak, że jak się przekonamy niżej, odwrócenie twierdzenia tego byłoby błędem, albowiem równość (14) może zachodzić, chociażby równość (13) nie zachodziła.

Zakładając w dalszym ciągu, że szereg (11) ma własność, którą wyrazić możemy równością (13), zwróćmy się do przypadku szczególnego, w którym mamy

$$(29) \quad a = 1.$$

Jeżeli tedy oznaczymy przez l jakąkolwiek, byle od zera nie mniejszą, ale od jedności mniejszą liczbę, to ze względu na postać

$$(30) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1,$$

którą przyjmuje obecnie równość (13), zachodzić będzie związek

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > l$$

dla wszystkich od pewnej dostatecznie wielkiej, w zależności od liczby l określonej liczby większych wartości wskaźnika k . Zatem, szereg (11) nie spełnia warunku zbieżności, podanego w twierdzeniu d'Alemberta.

Ponieważ zaś, jakśmy wyżej udowodnili, równość (13) pociąga za sobą równość (14), przeto ze względu na (30) mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = 1. \quad (31)$$

Zatem zachowując poprzednio nadane znaczenie literze l , przy każdej wartości wskaźnika k , byle większej od pewnej dostatecznie wielkiej w zależności od liczby l określonej liczby, zachodzić będzie nierówność

$$\sqrt[k]{u_k} > l.$$

Z tego wynika, że szereg (11) nie czyni zadość i warunkom zbieżności twierdzenia Cauchyego. Pomimo to jednak szereg (11) może, choć nie musi, być zbieżny. Istotnie, przyjmijmy ogólnie

$$u_k = \frac{1}{k^r}, \quad (32)$$

oznaczając przez r pewną liczbę od liczby całkowitej k niezależną. Powiadam, że przy wartości (32) ogólnego składnika szeregu (11) szereg ten ma własność, polegającą na równości (30). Rzeczywiście mamy

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \left(\frac{k+1}{k} \right)^r$$

i na podstawie wzoru tego spostrzegamy natychmiast, że równość (30) zachodzi przynajmniej w przypadkach, kiedy r równa się jednej z liczb

$$-1, 0 \text{ lub } +1.$$

Przy każdej innej wartości całkowitej liczby r wyrażenie

$$\left(\frac{k+1}{k} \right)^r$$

uważane być może za iloczyn skończonej liczby czynników, równych liczbie

$$\frac{k+1}{k} \quad \text{lub} \quad \frac{k}{k+1},$$

zależnie od znaku liczby r , a ponieważ mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

ponieważ więc rozważane wyrażenie uważane być może za iloczyn równorzędnych wyrazów ciągów zbieżnych o wspólnej granicy równej jedności, przeto rzeczzone wyrażenie zmierza samo do jedności. Zatem przy wartości (32) składnika ogólnego szeregu (11) zachodzi rzeczywiście równość (30).

Uzasadniliśmy ten wynik jedynie dla wartości całkowitych liczby r , z tych samych przyczyn, z powodu których tylko pod tym ścieśniającym warunkiem, dowiedliśmy tw. II-go § 123-go; nadmieniamy jednak, że w rzeczywistości związek (30) zachodziłby, jakkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez r .

Zważmy teraz, że na podstawie tw. II-go § 123-go szereg (11), w razie przyjęcia wzoru (32) na składnik ogólny tego szeregu, będzie zbieżny pod warunkiem

$$r > 1,$$

a rozbieżny we wszystkich innych przypadkach.

Ponieważ zaś stwierdziliśmy przed chwilą, że w razie równości (30), szereg (11) nie sprawdza ani warunku zbieżności twierdzenia d'Alemberta, ani warunku zbieżności twierdzenia Cauchyego, przeto na pytanie, postawione na czele tego paragrafu, winniśmy odpowiedzieć, że wspomniane warunki zbieżności nie są koniecznymi warunkami zbieżności, lecz tylko warunkami dostatecznymi. Odpowiedź tę możemy uzupełnić, dodając, że i warunki rozbieżności, podane w twierdzeniach d'Alemberta i Cauchyego, są tylko wystarczającymi, nie zaś koniecznymi warunkami rozbieżności, albowiem szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

jest (§ 123, tw. II) rozbieżny, chociaż nie sprawdza oczywiście żadnego z rozważanych warunków rozbieżności,

Zestawmy odpowiedź uzyskaną na pytanie, postawione na czele tego paragrafu, z uwagą następującą: jeżeli wogóle zbieżność lub rozbieżność oznaczonego szeregu o składnikach dodatnich może być stwierdzona na podstawie jednego z dwóch twierdzeń paragrafu poprzedzającego, albo na podstawie każdego z nich, to istnieje szereg geometryczny, przez porównanie którego z rozważanym szeregiem możemy rozstrzygnąć na podstawie tw. II-go z § 122-go, czy roz-

ważany szereg jest zbieżny. Zestawienie powyższe nasuwa oczywiście pytania następujące:

1°. Czy istnieją szeregi o składnikach dodatnich, których zbieżność lub rozbieżność wogóle nie może być stwierdzona na podstawie tw. II-go § 122-go drogą porównywania tychże z szeregami geometrycznymi?

2°. W jakiej mierze twierdzenia paragrafu poprzedzającego podają środki do rozstrzygnięcia, czy pewien szereg o składnikach dodatnich, którego zbieżność lub rozbieżność mogłaby być stwierdzona na podstawie tw. II-go § 122-go drogą porównywania szeregu tego z szeregiem geometrycznym, jest w rzeczywistości szeregiem zbieżnym lub rozbieżnym?

Jeżeli zbieżność pewnego szeregu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

o składnikach dodatnich wogóle może być stwierdzona na podstawie tw. II-go § 122-go drogą porównywania szeregu tego z pewnym szeregiem geometrycznym, to istnieją dwie liczby od zera większe l i a , ($a < 1$) takie, żebyśmy mieli

$$u_k \leq la^{k-1}, \quad (33)$$

byleby wskaźnik k sprawdzał nierówność postaci następującej:

$$k > N, \quad (34)$$

gdzie N oznacza pewną, dostatecznie wielką liczbę dodatnią i całkowitą. W takim razie nierówność (34) pociąga za sobą związek

$$\sqrt[k]{u_k} \leq a \sqrt[k]{\frac{l}{a}}, \quad (35)$$

gdzie mamy na względzie wartości dodatnie pierwiastków. Ponieważ mamy (str. 538)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{l}{a}} = 1,$$

przeto oznaczając przez a' jakąkolwiek liczbę sprawdzającą nierówności

$$a < a' < 1,$$

możemy drogą ewentualnego zwiększania liczby N tego dopiąć, że nierówność (34) pociągnie za sobą nierówność następującą:

$$a \sqrt[k]{\frac{l}{a}} < a',$$

a w takim razie ze względu na to, iż nierówność (34) pociąga za sobą nierówność (35), nierówność (34) pociągać będzie także za sobą nierówność

$$\sqrt[k]{u_k} < a'.$$

Zatem w rozważanym przypadku oznaka zbieżności, podana w twierdzeniu Cauchyego, będzie istotnie zachodzić. Dochodzimy więc do wyniku następującego: jeżeli wogóle zbieżność pewnego szeregu o składnikach dodatnich może być uzasadniona na podstawie tw. II-go § 122-go drogą porównywania szeregu tego z szeregiem geometrycznym, to zbieżność rozważanego szeregu może być także uzasadniona na podstawie twierdzenia Cauchyego.

Ponieważ stwierdziliśmy wyżej, że istnieją szeregi zbieżne o składnikach dodatnich, które cechy zbieżności podanej w twierdzeniu Cauchyego nie posiadają, przeto o ile chodzi o zbieżność, to na pierwsze z pytań postawionych wyżej, możemy odpowiedzieć, jak następuje: istnieją szeregi, których zbieżność nie może być stwierdzona na podstawie tw. II-go § 122-go drogą porównywania tych szeregów z szeregami geometrycznymi.

Co do drugiego pytania, to możemy oczywiście obecnie oświadczyć, że zbieżność szeregu o składnikach dodatnich, którego zbieżność wogóle może być stwierdzona na podstawie tw. II-go § 122-go drogą porównywania szeregu tego z szeregiem geometrycznym, może zawsze być stwierdzona na podstawie twierdzenia Cauchyego.

Czy możemy powiedzieć to samo o twierdzeniu d'Alemberta? Z łatwością przekonać się możemy, iż tak nie jest. Istotnie, oznaczmy przez a i b dwie od zera większe liczby, sprawdzające nierówności następujące:

$$\begin{aligned} a &< 1 \\ a \cdot b &> 1 \end{aligned}$$

i przyjmijmy ogólnie

$$\begin{aligned} u_{2k-1} &= a^{2(k-1)} \\ u_{2k} &= ba^{2k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

W takim razie składniki szeregu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

który będzie miał postać następującą:

$$1 + ba + a^2 + ba^3 + a^4 + ba^5 + \dots,$$

będą nie większe od składników szeregu geometrycznego zbieżnego następującego:

$$b + ba + ba^2 + ba^3 + \dots$$

gdyż w następstwie założeń, przyjętych co do liczb a i b , mamy $b > 1$.

Zatem rozważany szereg będzie zbieżny i, ze względu na wynik dopiero co uzyskany, zbieżność szeregu tego mogłaby być stwierdzona na podstawie twierdzenia Cauchyego.

Natomiast rozważany szereg nie posiada cechy zbieżności, podanej w twierdzeniu d'Alemberta, albowiem mamy:

$$\frac{u_{2k}}{u_{2k-1}} = ba > 1,$$

skąd wynika, że nie istnieje taka liczba od jedności mniejsza, żeby stosunek

$$\frac{u_n}{u_{n-1}},$$

poczynając od pewnej dostatecznie wielkiej wartości wskaźnika n , stale od liczby tej był mniejszy¹⁾.

Przekonaliśmy się więc, że o ile chodzi o zbieżność, to kryterium, wynikające z twierdzenia d'Alemberta, mniej jest ogólne, aniżeli kryterium, wynikające z twierdzenia Cauchyego. Winniśmy jednak dodać, że w przypadku najważniejszym, a mianowicie, kiedy ciąg (12) jest zbieżny, twierdzenie d'Alemberta i Cauchyego mogą w zupełności zastąpić jedno drugie, o ile chodzi o stwierdzenie zbieżności. Istotnie, jeżeli ciąg (12) jest zbieżny, a granica jego równa się pewnej liczbie a , jeżeli więc zachodzi równość (13), to zachodzi także równość (14). Z tego wynika, że zarówno stosunek

$$\frac{u_{k+1}}{u_k},$$

¹⁾ Rozważany przed chwilą szereg stanowi przykład przypadku, w którym zachodzi równość (14), nie zaś równość (13). Zatem zgodnie z uwagą uczynioną wyżej twierdzenie, według którego równość (14) jest następstwem równości (13), odwróconem być nie może.

jak i wyrażenie

$$\sqrt[k]{u_k},$$

pozostawać mogą, poczynając od pewnej dostatecznie wielkiej wartości wskaźnika k , mniejsze od oznaczonej liczby a' tylko w razie kiedy pomiędzy liczbą a' , a granicą a ciągu (12), zachodzić będzie związek

$$a' \geq a.$$

Zatem o stwierdzeniu zbieżności szeregu (11) na podstawie któregośkolwiek z omawianych twierdzeń może być mowa tylko w razie nierówności

$$a < 1.$$

Jeżeli zaś warunek ten jest spełniony, to każdej liczbie a' , sprawdzającej nierówności

$$a < a' < 1,$$

odpowiadać będzie pewna taka liczba całkowita i dodatnia N , iż nierówność

$$k > N$$

pociągać będzie za sobą każdą z nierówności

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < a' \quad \text{ i } \quad \sqrt[k]{u_k} < a'.$$

Dochodzimy więc do wyniku następującego: jeżeli ciąg (12) jest zbieżny, to zbieżność szeregu (11), jeżeli on jest zbieżny, może być stwierdzona w razie nierówności

$$a < 1,$$

zarówno na podstawie twierdzenia d'Alemberta, jak i na podstawie twierdzenia Cauchyego; jeżeli zaś liczba a od jedności mniejszą nie jest, to zbieżność szeregu (11), jeżeli szereg ten jest zbieżny, nie może być wynioskowana ani z twierdzenia d'Alemberta, ani z twierdzenia Cauchyego.

Pozostają jeszcze do omówienia okoliczności, które zachodzą przy stwierdzaniu rozbieżności szeregu o składnikach dodatnich zapomocą metod, które stanowią przedmiot obecnej dyskusyi.

Zważywszy najpierw, że natychmiastowem następstwem teorii szeregów geometrycznych, wyłożonej w § 123-cim, jest ta okoliczność, iż warunek konieczny i wystarczający zbieżności szeregu geometrycznego, polega na tem, żeby ciąg jego składników był ciągiem zbieżnym o granicy równej zeru, przekonywamy się, że rozbieżność oznaczonego szeregu o składnikach dodatnich w takim tylko razie uzasadniona być może na podstawie tw. II-go § 122-go, drogą porównywania szeregu tego z szeregiem geometrycznym, jeżeli ciąg jego składników tę ma własność, iż począwszy od pewnego składnika rzędu dostatecznie wysokiego, wszystkie składniki szeregu pozostają większymi od pewnej od zera większej liczby, co oczywiście zdarzyć się może tylko w razie, kiedy ciąg składników rozważanego szeregu nie jest ciągiem zbieżnym o granicy równej zeru. Ponieważ zaś istnieją szeregi rozbieżne o składnikach dodatnich, w których ciąg składników jest ciągiem zbieżnym o granicy równej zeru, przeto zgodnie z tem, czego powinniśmy byli spodziewać się ze względu na uzyskane już wyniki, rozbieżność szeregu o składnikach dodatnich nie zawsze stwierdzona być może drogą porównania szeregu tego z szeregiem geometrycznym. Zwracając się do twierdzeń d'Alemberta i Cauchyego, z łatwością spostrzedz możemy, że twierdzenia te, które oczywiście tylko w takich razach podać mogą środek do stwierdzenia rozbieżności szeregu o składnikach dodatnich, kiedy okoliczność ta uzasadniona być może na podstawie tw. II-go § 122-go drogą porównania rozważanego szeregu z szeregiem geometrycznym, nawet w takim przypadku nie zawsze dają możność udowodnienia rozbieżności szeregu. Istotnie załóżmy, że ciąg

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

jest ciągiem malejącym o granicy g od zera większej, ale od jedności mniejszej. W takim razie składniki szeregu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (36)$$

są odpowiednio nie mniejsze od składników równorzędnych szeregu

$$g + g + g + g \dots,$$

który jest szeregiem geometrycznym o ilorazie równym jedności, skąd wynika, że rozbieżność szeregu (37) mogłaby być stwierdzona drogą porównywania szeregu tego z szeregiem geometrycznym.

Jednakże rozbieżność szeregu (36) nie mogłaby być wywnioskowana ani z twierdzenia d'Alemberta, ani z twierdzenia Cauchyego. Istotnie, mamy stale

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$$

oraz

$$(37) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} u_{k+1}}{\lim_{k \rightarrow \infty} u_k} = \frac{g}{g} = 1,$$

skąd wynika, że twierdzenie d'Alemberta pozostawiłoby nas w niepewności co do rozbieżności rozważanego szeregu. Ponieważ zaś z drugiej strony mamy

$$g < 1,$$

przeto, począwszy od pewnej dostatecznie wielkiej wartości na k , mielibyśmy

$$u_k < 1,$$

a więc i

$$\sqrt[k]{u_k} < 1,$$

a ponieważ z drugiej strony, na podstawie twierdzenia przygotowawczego, uzasadnionego wyżej, równość (37) pociąga za sobą równość

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = 1,$$

przeto i twierdzenie Cauchyego nie dostarczyłoby odpowiedzi na zapytanie, czy szereg (36) jest rozbieżny.

Żeby już całkiem wyczerpać dyskusję twierdzeń d'Alemberta

Cauchyego okażemy, że kiedy chodzi o stwierdzenie rozbieżności szeregu o składnikach dodatnich, to żadne z tych twierdzeń nie może być uważane za ogólniejsze od drugiego. Istotnie, jeżeli określmy ogólnie składnik u_k rzędu k pewnego szeregu wzorem

$$u_k = \frac{k}{k+1},$$

to mamy stale

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$$

i rozbieżność szeregu wynika z twierdzenia d'Alemberta. Ponieważ zaś mamy stale

$$u_k < 1,$$

przeto mamy

$$\sqrt[k]{u_k} < 1$$

oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{u_k} = 1$$

ze względu na równość

$$\lim \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1;$$

przeto twierdzenie Cauchyego pozostawiłoby nas w niepewności, czy rozważany szereg jest zbieżny, czy też rozbieżny. Gdybyśmy zaś przyjęli

$$u_k = \frac{k+1}{k},$$

to mielibyśmy stale

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$$

i twierdzenie d'Alemberta nie dałoby możności rozstrzygnięcia o zbieżności lub rozbieżności szeregu. Natomiast, ponieważ mielibyśmy stale

$$u_k > 1,$$

przeto mielibyśmy także

$$\sqrt[k]{u_k} > 1,$$

skąd wynika, że twierdzenie Cauchyego przywiodłoby nas do stwierdzenia rozbieżności rozważanego szeregu.

Przechodzimy do omówienia pewnych ogólnych i zajmujących wniosków, które wysnuć możemy z dyskusji poprzedzającej.

Widzieliśmy, że klasa przypadków, w których zbieżność szeregu o składnikach dodatnich stwierdzona być może na podstawie twierdzenia Cauchyego, szerszą jest od klasy przypadków, w których to samo uskutecznione być może na podstawie twierdzenia d'Alemberta. Ponieważ jednak zastosowywanie twierdzenia d'Alemberta jest z reguły daleko łatwiejsze, aniżeli zastosowywanie twierdzenia Cauchyego, przeto twierdzenie to, pomimo okoliczności wspo-

mnianej dopiero co niekorzyści, jest ze stanowiska zastosowań nadzwyczaj ważne.

Żeby jednak wytworzyć sobie należyte pojęcie o doniosłości twierdzenia d'Alemberta, należy uwzględnić okoliczność następującą: te szeregi o składnikach dodatnich, do badania których bywamy przywiedzeni, posiadają prawie zawsze tę właściwość, iż stosunek składnika rzędu $k+1$ do składnika rzędu k zmierza do oznaczonej granicy a , gdy k rośnie nieograniczenie; otóż w takich razach twierdzenia d'Alemberta i Cauchyego, uważane jako środki do stwierdzenia zbieżności szeregów, najzupełniej mogą zastępować siebie wzajemnie i prowadzą do wyniku następującego: *jeżeli liczba, którą dopiero co oznaczyliśmy przez a , jest od jedności mniejsza, to rozważany szereg jest zbieżny.*

Jeżeli chodzi o stwierdzenie rozbieżności szeregu o składnikach dodatnich, to metoda porównywania rozważanego szeregu z szeregiem geometrycznym, a zatem także twierdzenia d'Alemberta i Cauchyego, wielkiego znaczenia nie mają, a to z przyczyny następującej: rozbieżność szeregu stwierdzona być może wspomnianą metodą, jakeśmy widzieli wyżej, tylko w razie, kiedy składniki szeregu, poczynając od składnika pewnego dostatecznie wysokiego rzędu, pozostają stale większymi od oznaczonej, od zera większej liczby; otóż okoliczność ta, która ze względu na tw. III-cie § 121-go stanowi dostateczny warunek rozbieżności, z reguły łatwo stwierdzona być może bezpośrednio. Wobec tego wielkie ma bardzo znaczenie tw. II-gie § 123-go, albowiem na podstawie tego twierdzenia możemy, posługując się metodą porównywania dwóch szeregów, rozstrzygnąć, czy pewien szereg jest zbieżny lub rozbieżny w takich przypadkach, w których twierdzenia d'Alemberta i Cauchyego pozostawiałyby nas w niepewności.

§ 126. Zamierzamy obecnie omówić klasę szeregów, która obejmuje pewne szeregi zbieżne warunkowo, nie zaś bezwzględnie, przez co udowodnimy istnienie szeregów zbieżnych, które nie są zbieżnymi bezwzględnie. Szeregi, które mamy na myśli, są tak zwane szeregi przemienne, których własność charakterystyczna polega na tem, iż składniki takiego szeregu równają się naprzemian liczbom dodatnim i ujemnym, co wysłowić możemy wyraźniej, orzekając, że szeregiem przemennym nazywamy wszelki szereg, w którym każde dwa sąsiednie składniki równają się liczbom o znakach przeciwnych.

I. Jeżeli wartości bezwzględne składników szeregu przemienneo tworzą ciąg malejący o granicy równej zeru, to rozważany szereg jest zbieżny.

Istotnie założmy, że szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (1)$$

czyni zadość założeniom twierdzenia. Możemy bez szkody dla ogólności przyjąć, że pierwszy składnik szeregu tego jest dodatni, albowiem w razie przeciwnym pierwszy składnik szeregu

$$u_2 + u_3 + u_4 + \dots,$$

który oczywiście jest zbieżny jednocześnie z szeregiem (1) i sprawdza założenia twierdzenia, równałby się liczbie dodatniej i dowód zbieżności szeregu (1) sprowadzałby się do dowodu zbieżności szeregu analogicznego, w którymby pierwszy składnik równał się liczbie dodatniej. Zakładamy tedy, że mamy

$$u_1 > 0. \quad (2)$$

W takim razie składniki rzędów nieparzystych szeregu (1) równać się będą liczbom dodatnim, a składniki rzędów parzystych — liczbom ujemnym. Mamy nadto stale

$$|u_k| \geq |u_{k+1}| \quad (3)$$

oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0. \quad (4)$$

Przyjmijmy ogólnie

$$s_p = \sum_{k=1}^p u_k \quad (5)$$

i uważajmy ciągi nieskończone następujące:

$$s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2k+1}, \dots \quad (6)$$

$$s_2, s_4, s_6, \dots, s_{2k}, \dots \quad (7)$$

Ciągi te mają własności następujące:

1°. Ciąg (6) jest ciągiem malejącym, albowiem mamy

$$s_{2k+3} = s_{2k+1} + (u_{2k+2} + u_{2k+3}),$$

skąd

$$s_{2k+3} \leq s_{2k+1},$$

ponieważ mamy związki

$$\begin{aligned} |u_{2k+2}| &\geq |u_{2k+3}|, \\ u_{2k+2} &\leq 0, \quad u_{2k+3} \geq 0, \end{aligned}$$

z których wynika związek

$$u_{2k+2} + u_{2k+3} \leq 0.$$

2°. Ciąg (7) jest ciągiem wzrastającym, albowiem mamy

$$s_{2k+2} = s_{2k} + (u_{2k+1} + u_{2k+2}),$$

skąd wynika związek

$$s_{2k+2} \geq s_{2k},$$

na podstawie związku

$$u_{2k+1} + u_{2k+2} \geq 0,$$

który znów jest następstwem związków

$$\begin{aligned} |u_{2k+1}| &\geq |u_{2k+2}|, \\ u_{2k+1} &\geq 0, \quad u_{2k+2} \leq 0, \end{aligned}$$

zachodzących na podstawie założeń, poczynionych o składnikach szeregu (1).

3°. Każdy wyraz ciągu (7) ma wartość nie mniejszą od wartości jakiegokolwiek wyrazu ciągu (6). Istotnie, uważajmy jakikolwiek wyraz s_{2j+1} ciągu (6) i jakikolwiek wyraz s_{2i} ciągu (7).

Oznaczmy przez k jakąkolwiek liczbę całkowitą, byle czyniąc zadość jednocześnie nierównościom

$$k > j, \quad k > i.$$

Na podstawie wyników, dopiero co uzyskanych, mamy

$$\begin{aligned} s_{2j+1} &\geq s_{2k+1}, \\ s_{2i} &\leq s_{2k}, \end{aligned}$$

a ponieważ mamy

$$s_{2k+1} = s_{2k} + u_{2k+1}$$

oraz

$$u_{2k+1} \geq 0,$$

przeto mamy

$$s_{2k} \leq s_{2k+1}.$$

Mamy więc rzeczywiście

$$s_{2i} \leq s_{2j+1},$$

jakąkolwiek wartość całkowitą, byle od jedności nie mniejszą, przyjąćlibyśmy na i i jakąkolwiek, byle od zera nie mniejszą wartość całkowitą miałyby liczba j , a o to właśnie chodziło.

Zestawiając pierwszą i ostatnią z trzech uwag powyższych, stwierdzamy, że ciąg (6) jest ciągiem malejącym, którego żaden wyraz nie jest mniejszy od oznaczonej liczby, za którą przyjąć możemy dowolny wyraz ciągu (7), na przykład wyraz s_1 . Zatem (§ 116, tw. II) ciąg (6) jest ciągiem zbieżnym. Na podstawie tegoż twierdzenia ciąg (7) jest także ciągiem zbieżnym, albowiem zestawiając drugą i trzecią z uwag dopiero co uzasadnionych, stwierdzamy, że ciąg (7) jest ciągiem wzrastającym, którego żaden wyraz nie jest większy od oznaczonej liczby, za którą przyjąć możemy którykolwiek wyraz ciągu (6).

Ponieważ na różnicę wyrazów równorzędnych ciągów (6) i (7) mamy wzór następujący:

$$s_{2k+2} - s_{2k+1} = u_{2k+2},$$

ponieważ na podstawie równości (4) mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+2} = 0,$$

przeto granice ciągów (6) i (7) mają pewną wspólną wartość g . Z tego zaś wynika natychmiast, że ciąg

$$s_1, s_2, s_3, \dots \quad (8)$$

jest zbieżny, a granica jego równa się wspólnej wartości g granic ciągów (6) i (7). Ale orzec, że ciąg (11) jest zbieżny, znaczy orzec, że szereg (1) jest zbieżny.

Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast *istnienie szeregów zbieżnych, które bezwzględnie zbieżnymi szeregami nie są*. Istotnie, uważajmy szereg rozbieżny o składnikach dodatnich

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

taki, żebyśmy mieli

$$U_k > U_{k+1}$$

oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = 0.$$

Szeregi takie istnieją, czego przykładem jest szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Z drugiej strony, jeżeli przyjmiemy ogólnie

$$\begin{aligned} u_{2k+1} &= U_{2k+1}, \\ u_{2k} &= -U_{2k}, \end{aligned}$$

to szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

zbieżny na podstawie dopiero co udowodnionego twierdzenia, będzie właśnie szeregiem zbieżnym, który jednak bezwzględnie zbieżnym szeregiem nie będzie. Uzasadniliśmy więc istnienie takich szeregów.

Powróćmy do szeregu (1), rozważanego w twierdzeniu udowodnionem wyżej. Ponieważ suma s szeregu tego jest wspólną granicą ciągów (6) i (7), ponieważ nadto ciąg (6) jest ciągiem malejącym, a ciąg (7) — ciągiem wzrastającym, przeto mamy

$$(9) \quad s_{2i} \leq s \leq s_{2j-1},$$

jakikolwiek od jedności nie mniejsze wartości przyjęlibyśmy na liczby całkowite i i j . Przyjmując

$$j = i + 1$$

i uwzględniając związek

$$s_{2i+1} = s_{2i} + u_{2i+1},$$

wyprowadzamy łatwo ze związków (9), związek

$$(10) \quad |s_{2i} - s| < |u_{2i+1}|.$$

Przyjmując zaś w związkach (9).

$$j = i$$

i uwzględniając równość

$$s_{2i} = s_{2i-1} + u_{2i}$$

spostrzegamy równie łatwo, że z nierówności (9) wynika nierówność

$$(11) \quad |s_{2i-1} - s| < |u_{2i}|.$$

Czytelnik z łatwością spostrzeże, że związki (10) i (11) zachodzą bez względu na to, czy pierwszy składnik szeregu (1) jest dodatni czy ujemny; powyższe związki wyrażają łącznie twierdzenie następujące:

II. *Suma n pierwszych składników szeregu przemiennego, w którym wartości bezwzględne składników tworzą ciąg malejący o granicy równej zeru i który zatem jest zbieżny, przedstawia sumę szeregu z błędem nie większym od wartości bezwzględnej pierwszego wyrazu już nie uwzględnionego.*

Związki (9) odpowiadają przypadkowi, kiedy pierwszy składnik szeregu (1) równa się liczbie dodatniej. Gdyby pierwszy składnik rozważanego szeregu był ujemny, to zamiast związków (9) mielibyśmy związki następujące:

$$s_{2i} \geq s \geq s_{2i-1}.$$

W każdym więc razie wyrazy ciągu (8) są naprzemian to nie mniejsze, to nie większe od dokładnej wartości sumy szeregu (1).

§ 127. Żeby uwidocznąć zasadniczą różnicę, która zachodzi pomiędzy własnościami szeregów zbieżnych bezwzględnie a własnościami szeregów zbieżnych tylko warunkowo, winniśmy najpierw wytłómaczyć czem jest rzecz, którą oznaczamy przez wyrażenie zmiana porządku składników szeregu nieskończonego.

Orzeczenie, iż każdy z dwóch szeregów nieskończonych

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (1)$$

i

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (2)$$

uważany być może za wynik zmiany porządku składników drugiego, albo różni się od drugiego tylko porządkiem składników, wyraża, iż pomiędzy składnikami obu szeregów ustawiona być może odpowiedniość, która zadość czyni warunkom następującym:

1°. Jeżeli pewien składnik jednego z powyższych szeregów odpowiada pewnemu składnikowi drugiego, to odwrotnie, wspomnianemu składnikowi drugiego szeregu odpowiada wspomniany składnik pierwszego. Innemi słowy, jeżeli przyjmiemy pewien składnik u_i z szeregu (1) i pewien składnik v_j z szeregu (2), to zachodzi jedno z dwojga: albo każdy ze składników tych odpowiada drugiemu, albo żaden drugiemu z nich nie odpowiada.

2°. Jeżeli oznaczymy ogólnie przez u_i i v_j parę odpowiadają-