

regi, co do których wogóle nie umiemy rozstrzygnąć pytania, czy one są czy nie są zbieżne. Wobec tego, badając niżej pewne szczególne typy szeregów, będziemy mieli przedewszystkiem na celu ustawienie twierdzeń, które nadają się do rozwiązywania kwestyi zbieżności szeregów w przypadkach mniej lub więcej szczególnych.

§ 122. Paragraf ten poświęcamy teorii szeregów o składnikach dodatnich. Szeregi tego rodzaju mają wyjątkowe znaczenie już z tej przyczyny, iż ze względu na tw. IV-te paragrafu poprzedzającego stwierdzenie zbieżności szeregu o składnikach, których znaki są jakiegokolwiek, może być w pewnych przypadkach osiągnięte przez stwierdzenie zbieżności pewnego szeregu o składnikach dodatnich, mianowicie szeregu, wynikającego z rozważanego szeregu przez podstawienie na miejsce jego składników wartości bezwzględnych tychże. Ale w rzeczywistości szeregi o składnikach dodatnich zasługują na szczególną uwagę i z innych względów: w jednym z następnych paragrafów przekonamy się, że szeregi zbieżne bezwzględnie wyróżniają się od innych szeregów własnością, która czyni z nich narzędzie szczególnie dogodne; otóż, ponieważ szereg zbieżny bezwzględnie określiliśmy, jako szereg tę własność mający, iż szereg, wynikający z niego drogą podstawienia na miejsce jego składników wartości bezwzględnych tychże, jest zbieżny, przeto problem zadecydowania, czy pewien szereg jest zbieżny bezwzględnie, polega w rzeczywistości na zadecydowaniu o zbieżności oznaczonego szeregu o składnikach dodatnich.

I. *Żeby szereg o składnikach dodatnich*

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

*był zbieżny, koniecznem jest i wystarczajacem, żeby istniała oznaczona liczba  $A$  taka, iżby związek*

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n u_i \leq A$$

*zachodził, jakiegokolwiek wartość całkowitą i dodatnią przyjąlibyśmy na  $n$ .*

Istotnie, szereg (1) jest zbieżny lub rozbieżny jednocześnie z ciągiem

$$(3) \quad s_1, s_2, s_3, \dots$$

którego ogólny wyraz  $s_n$  określony jest wzorem

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i,$$

a ponieważ na podstawie uwagi II-giej przy tw. I-szem § 116-go koniecznym warunkiem zbieżności ciągu nieskończonego jest to, żeby wyrazy jego były ograniczone, ponieważ z drugiej strony związek (2) wyraża, że co do ciągu (3) warunek ten jest spełniony, przeto istnienie liczby  $A$  jest rzeczywiście koniecznym warunkiem zbieżności szeregu (1). Ponieważ jednak na podstawie tw. II-go § 116-go wspomniany warunek jest wystarczającym warunkiem zbieżności ciągu (3), przeto warunek ten jest także warunkiem wystarczającym zbieżności szeregu (1). Uzasadniliśmy zatem twierdzenie w zupełności.

U w a g a I. Zestawiając uwagę III-cią przy tw. I-szem § 116-go z uwagą II-gą przy tw. II-giem z tegoż paragrafu i uwzględniając stosunek wzajemny szeregu (1) i ciągu (3), spostrzegamy natychmiast, że w razie kiedy warunek (2) jest spełniony, suma  $s$  szeregu (1) nie może być ani większa od liczby  $A$ , ani mniejsza od sumy

$$\sum_{i=1}^n u_i,$$

jakąkolwiek wartość przyjęlibyśmy na  $n$ ; możemy nawet dodać, że mamy

$$\sum_{i=1}^n u_i < s$$

z wykluczeniem równości, prócz tylko w przypadku, kiedy poczynając od pewnego składnika dostatecznie wysokiego rzędu, wszystkie składniki szeregu (1) równają się zeru.

U w a g a II. Jeżeli szereg o składnikach dodatnich jest rozbieżny, to suma  $n$  pierwszych jego składników rośnie nieograniczenie wraz z liczbą  $n$ . Innymi słowy, jeżeli szereg (1) o składnikach dodatnich jest rozbieżny, to do każdej, choćby jak wielkiej liczby  $M$  można dobrać taką liczbę całkowitą i dodatnią  $N$ , żeby nierówność

$$n > N$$

pociągała za sobą nierówność

$$\sum_{i=1}^n u_i > M,$$

albowiem w razie przeciwnym możnaby było dobrać liczbę  $M$  tak, żebyśmy mieli

$$\sum_{i=1}^n u_i \leq M,$$

bez względu na wartość liczby  $n$  i szereg byłby, wbrew założeniu, zbieżny.

Bezpośrednie zastosowywanie twierdzenia poprzedzającego bynajmniej nie jest zawsze łatwym, a nadto nawet w przypadkach, w których umielibyśmy je zastosować bezpośrednio, nie zawsze możemy z twierdzenia tego wysnuć rozwiązanie problemu przybliżonego wyznaczenia sumy szeregu z błędem, nie przekraczającym danej granicy.

Z tych przyczyn bardzo jest ważna, na porównywaniu pomiędzy sobą szeregów o składnikach dodatnich polegająca metoda badania tychże. Metoda ta opiera się na twierdzeniu następującem.

## II. Uważajmy dwa szeregi o składnikach dodatnich

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$i$

$$(2) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

Jeżeli szereg (1) jest zbieżny, jeżeli nadto pewnej liczbie dodatniej  $l$  odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia  $m$ , iżby nierówność

$$(3) \quad i > m$$

pociągała za sobą związek

$$(4) \quad v_i \leq l u_i,$$

to szereg (2) jest także zbieżny.

Jeżeli zaś szereg (1) jest rozbieżny, a pewnej od zera większej liczbie  $\lambda$  odpowiada taka liczba całkowita  $m$ , żeby nierówność (3) pociągała za sobą nierówność

$$(5) \quad v_i \geq \lambda u_i,$$

to wówczas szereg (2) jest rozbieżny.

Założmy najpierw, że szereg (1) jest zbieżny, a nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (4). Ponieważ szereg (1) jest zbieżny, przeto na podstawie tw. I-go paragrafu poprzedzającego dowolnie przyjętej, byle od zera odmiennie liczbie  $\mu$  odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia  $N$ , iż nierówność

$$i > N \quad (6)$$

pociąga za sobą nierówność

$$\sum_{k=1}^p u_{i+k} < \mu, \quad (7)$$

jakąkolwiek wartość całkowitą, byle od zera większą przyjęlibyśmy na liczbę  $p$ . Jeżeli przy pewnej wartości na  $N$  nierówność (6) pociąga za sobą nierówność (7), to okoliczność ta oczywiście zachodzić nie przestanie, jeżeli pierwotnie uzyskaną wartość na  $N$  zwiększymy. Przyjmijmy tedy, że liczba  $N$  sprawdza związek

$$N \geq m. \quad (8)$$

W takim razie nierówność (6) pociąga za sobą nierówność (3), która znów pociąga za sobą nierówność (4).

Zatem nierówność (6) pociąga za sobą nierówność

$$\sum_{k=1}^p v_{i+k} \leq a \sum_{k=1}^p u_{i+k}, \quad (9)$$

a ponieważ nierówność (6) pociąga za sobą także nierówność (7), przeto nierówność (6) pociąga za sobą nierówność

$$\sum_{k=1}^p v_{i+k} \leq a\mu, \quad (10)$$

jakąkolwiek, byle od zera większą wartość przyjęlibyśmy na  $p$ . Zważywszy, że jakąkolwiek od zera większą liczbę oznaczylibyśmy przez  $\varepsilon$ , możemy zawsze przyjąć na  $\mu$  taką od zera większą wartość, żebyśmy mieli

$$a\mu \leq \varepsilon,$$

wnosimy natychmiast z rozważań powyższych, opierając się na tw. I-szem paragrafu poprzedzającego, że szereg (2) jest zbieżny.

Żeby uzasadnić drugą część twierdzenia, założmy, że szereg (1)

jest rozbieżny, a nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (5). Ponieważ mamy

$$\lambda > 0,$$

przeto związek (5) równoważny jest związkowi

$$u_i \leq \frac{1}{\lambda} \cdot v_i.$$

Gdyby więc szereg (2) był zbieżny, to na podstawie pierwszej, już udowodnionej części twierdzenia, szereg (1) byłby, wbrew założeniu, zbieżny.

Uzasadniliśmy zatem w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

U w a g a. Jeżeli szereg (1) jest zbieżny, a nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (4), to w razie nierówności (3) mamy oczywiście

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_{i+k} \leq a \sum_{k=1}^{\infty} u_{i+k},$$

czyli w razie nierówności (3) reszta rzędu  $i$  szeregu (2) nie jest większa od iloczynu przez  $a$  reszty tegoż rzędu szeregu (1). Jeżeli więc możemy wyznaczyć liczbę  $i$  tak, żeby reduct rzędu  $i$  szeregu (1), czyli suma

$$\sum_{k=1}^i u_k$$

przedstawiała przybliżenie sumy szeregu tego z błędem, nie przekraczającym *a priori* oznaczonej granicy, to także możemy rozwiązać to samo zadanie co do szeregu (2).

Żeby twierdzenie poprzedzające mogło korzyść przynieść, koniecznem jest znać przykłady szeregów o składnikach dodatnich, których zbieżność lub rozbieżność moglibyśmy stwierdzić niezależnie od wspomnianego twierdzenia. Najważniejsze dwa typy szeregów, stanowiące takie przykłady, zbadamy w paragrafie następującym.

**§ 123.** Szeregiem geometrycznym nazywamy taki szereg nieskończony, w którym, poczynając od drugiego składnika, każdy składnik równa się iloczynowi składnika, który poprzedza go bezpośrednio, przez pewną liczbę stałą; ta liczba stała zowie się ilo-

razem szeregu. Żeby określić w zupełności szereg geometryczny, należy tylko oznaczyć pierwszy składnik  $a$  i iloraz  $r$ ; w takim razie mamy na składnik  $u_n$  jakiegokolwiek rzędu  $n$  wzór następujący:

$$u_n = a \cdot r^{n-1}, \quad (\alpha)$$

a sam szereg przyjmuje postać następującą:

$$a + ar + ar^2 + \dots$$

I. Żeby szereg geometryczny, którego pierwszy składnik  $a$  jest od zera odmienny, był zbieżny, koniecznem i wystarczającym jest, żeby wartość bezwzględna  $r$  ilorazu mniejsza była od jedności; gdy warunek ten jest spełniony, to szereg zbieżny jest bezwzględnie, a na sumę  $s$  rozważanego szeregu mamy wzór następujący:

$$s = \frac{a}{1-r}. \quad (1)$$

W razie równości  $a=0$ , szereg jest zawsze zbieżny, a jego suma równa się zeru.

W przypadku szczególnym, kiedy pierwszy składnik szeregu geometrycznego równa się zeru, wszystkie składniki jego równają się zeru na podstawie wzoru  $(\alpha)$ , zatem suma szeregu równa się w takim razie oczywiście także zeru. Zakładamy tedy, że pierwszy składnik  $a$  rozważanego szeregu geometrycznego jest od zera odmienny. Przyjmijmy

$$A = |a|, \quad (2)$$

$$R = |r|, \quad (3)$$

Oznaczywszy przez  $u_n$  składnik rzędu  $n$  rozważanego szeregu, mamy

$$u_n = r u_{n-1},$$

skąd

$$|u_n| = R \cdot |u_{n-1}|.$$

Jeżeli więc zachodzi związek

$$R \geq 1, \quad (4)$$

to mamy

$$|u_n| \geq |u_{n-1}|,$$

skąd wynika związek

$$|u_n| \geq A, \quad (5)$$

uwzględniając związek (2) i równość

$$u_1 = a.$$

Ponieważ założyliśmy, że pierwszy składnik  $a$  szeregu jest od zera odmienny, przeto mamy

$$A > 0;$$

ponieważ z drugiej strony, w razie związku (4), zachodzi związek (5), przeto w przypadku związku (4) ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

nie może mieć granicy równej zeru, skąd wynika (§ 121, tw. III), że rozważany szereg geometryczny jest rozbieżny. Dowiedliśmy więc, że warunek zbieżności szeregu geometrycznego, podany w twierdzeniu, jest konieczny. Załóżmy, że warunek ten jest spełniony, Drogą indukcji matematycznej stwierdzamy z łatwością, że mamy

$$1 - r^i = (1 - r) \sum_{k=1}^i r^{k-1},$$

jakąkolwiek liczbę oznaczylibyśmy przez  $r$ . Mamy więc

$$\sum_{k=1}^i ar^{k-1} = a \frac{1 - r^i}{1 - r},$$

zważywszy, że różnica  $1 - r$  jest od zera odmienna. Z równości powyższej mamy

$$\frac{a}{1 - r} - \sum_{k=1}^i ar^{k-1} = a \frac{r^i}{1 - r},$$

skąd

$$(6) \quad \left| \frac{a}{1 - r} - \sum_{k=1}^i ar^{k-1} \right| \leq \frac{A}{1 - R} \cdot R^i$$

na podstawie równości (2) i (3), jakiekolwiek byłyby znaki liczb  $r$  i  $a$ .

Żeby posunąć się dalej, udowodnimy najpierw ogólnie, że mamy nierówność następującą:

$$(7) \quad (1 + \alpha)^i \geq 1 + i\alpha,$$

jakąkolwiek, byle od zera nie mniejszą liczbę oznaczylibyśmy przez  $\alpha$  i jakąkolwiek, byle wartość całkowitą od zera większą przyjąlibyśmy na  $i$ . W razie równości

$$i = 1$$

powyższy związek oczywiście zachodzi. Gdybyśmy zaś mieli

$$(1 + \alpha)^k \geq 1 + k\alpha,$$

oznaczając przez  $k$  ( $k \geq 1$ ) pewną liczbę całkowitą, to mielibyśmy

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq (1 + k\alpha)(1 + \alpha) = 1 + (k + 1)\alpha + k\alpha^2,$$

mielibyśmy więc tem bardziej

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)\alpha.$$

Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej związek (7) rzeczywiście zachodzi przy podanych warunkach

Powracając do naszego właściwego przedmiotu, zważmy, że w przypadku szczególnym, w którym mielibyśmy

$$r = 0,$$

rozważany szereg oczywiście byłby zbieżny, a suma jego miałaby zapowiedzianą w twierdzeniu wartość.

Zakładamy tedy, że iloraz szeregu  $r$  ma od zera odmienną wartość. W takim razie wartość bezwzględna  $R$  liczby  $r$  jest także od zera odmienna i możemy przyjąć

$$R = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad (8)$$

skąd

$$\alpha = \frac{1 - R}{R}. \quad (9)$$

Ze względu na nierówność

$$R < 1,$$

którą zakładamy obecnie mamy oczywiście

$$\alpha > 0.$$

Na podstawie nierówności (7), mamy

$$\frac{1}{(1 + \alpha)^i} \leq \frac{1}{1 + i\alpha};$$



mamy więc

$$R^i \leq \frac{1}{1 + ia}$$

czyli

$$R^i \leq \frac{R}{R + i(1 - R)}$$

ze względu na wzór (9).

Na podstawie związku tego wynika ze związku (6) związek następujący:

$$(10) \quad \left| \frac{a}{1-r} - \sum_{k=1}^i ar^{k-1} \right| \leq \frac{A}{1-R} \cdot \frac{R}{R+i(1-R)}.$$

Ponieważ związek (6) zachodzi jakiegokolwiek byłyby znaki liczb  $r$  i  $a$ , przeto związek (10) zachodzi także bez względu na znaki liczb  $a$  i  $r$ . Zatem jednocześnie ze związkiem (10) mamy związek

$$(11) \quad \left| \frac{A}{1-R} - \sum_{k=1}^i AR^{k-1} \right| \leq \frac{A}{1-R} \cdot \frac{R}{R+i(1-R)}.$$

Oznaczmy przez  $\varepsilon$  jakąkolwiek, byle od zera większą liczbę. Nierówność

$$(12) \quad \frac{A}{1-R} \cdot \frac{R}{R+i(1-R)} < \varepsilon$$

oczywiście równoważna jest nierówności

$$\frac{A}{1-R} < \varepsilon \frac{R+i(1-R)}{R},$$

równoważnej nierówności

$$R+i(1-R) > \frac{A \cdot R}{\varepsilon(1-R)},$$

równoważnej znowu nierówności

$$i(1-R) < \frac{A \cdot R}{\varepsilon(1-R)} - R,$$

która znów równoważna jest nierówności

$$(13) \quad i \geq \frac{A \cdot R}{\varepsilon(1-R)^2} - \frac{R}{1-R}.$$

Jeżeli więc oznaczmy przez  $N$  jakąkolwiek, byle od liczby

$$\frac{AR}{\varepsilon(1-R^2)} - \frac{R}{1-R}$$

nie mniejszą liczbę całkowitą  $N$ , to nierówność

$$i > N, \quad (14)$$

która pociągać będzie za sobą nierówność (13), pociągać będzie za sobą z tejże przyczyny i nierówność (12), a ponieważ nierówność (12) pociąga za sobą, na podstawie związków (10) i (11) każdą z nierówności następujących:

$$\left| \frac{a}{1-r} - \sum_{k=1}^i ar^{k-1} \right| < \varepsilon, \quad (15)$$

$$\left| \frac{A}{1-R} - \sum_{k=1}^i AR^{k-1} \right| < \varepsilon, \quad (16)$$

przeto stwierdzamy, że, do dowolnie przyjętej, byle od zera większej, ale choćby jak małej liczby  $\varepsilon$ , możemy zawsze dobrać taką wartość na liczbę całkowitą i dodatnią  $N$ , żeby nierówność (14) pociągała za sobą jednocześnie nierówności (15) i (16).

Zatem szeregi

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} \quad (17)$$

i

$$\sum_{i=1}^{\infty} AR^{i-1} \quad (18)$$

są zbieżne i sumy ich równają się odpowiednio liczbom

$$\frac{a}{1-r} \quad \text{i} \quad \frac{A}{1-R}.$$

Ponieważ zaś składniki szeregu (18) równają się wartościom bezwzględnych składników szeregu (17), przeto szereg (17) jest bezwzględnie zbieżnym szeregiem. Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

II. Żeby szereg następujący :

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r},$$

gdzie oznaczyliśmy przez  $r$  liczbę od liczby  $k$  niezależną, był zbieżny, koniecznem jest i wystarcza, żeby zachodziła nierówność

$$(2) \quad r > 1.$$

Ponieważ w wykładach tych ustanowiliśmy pojęcie potęgi tylko dla przypadku, w którym wykładnik jest liczbą całkowitą, przeto winniśmy przyjąć, że symbol  $r$  oznacza liczbę całkowitą. Nadmieniamy jednak, że dowód powyższego twierdzenia, wyłożony niżej, nie wymagałby żadnej zmiany, gdybyśmy byli określili poprzednio pojęcie potęgi w przypadku ogólnym i gdybyśmy mogli zatem uważać symbol  $r$  za symbol jakiejkolwiek liczby rzeczywistej.

Możemy bez szkody dla ogólności założyć, że liczba  $r$  sprawdza związek

$$(3) \quad r \geq 1,$$

albowiem, skoro uzasadnimy rozbieżność szeregu (1) dla

$$r = 1,$$

to rozbieżność tegoż szeregu winna być uważana za dowiedzioną przy mniejszych od jedności wartościach na  $r$ , ponieważ zmniejszenie liczby  $r$  powoduje zwiększenie się składników szeregu, skąd znów wynika ze względu na tw. II-go paragrafu poprzedzającego, że jeżeli rozważany szereg rozbieżny jest przy pewnej wartości  $r_0$  liczby  $r$ , to będzie tem bardziej rozbieżny przy każdej wartości mniejszej od liczby  $r_0$ .

Zakładamy tedy, że zachodzi nierówność (3) i przyjmujemy

$$(4) \quad v_p = \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{k^r},$$

oznaczając przez  $p$  jakąkolwiek, byle od jedności nie mniejszą liczbę całkowitą. Liczba składników w sumie poprzedzającej oczywiście równa się

$$2^p - 1 - 2^{p-1} + 1 = 2^p - 2^{p-1} = 2^{p-1} (2 - 1) = 2^{p-1},$$

a najmniejszy składnik wspomnianej sumy równa się liczbie

$$\frac{1}{(2^p - 1)^r}$$

i jest oczywiście większy od

$$\frac{1}{2^{pr}},$$

największy zaś składnik tejże sumy ma wartość

$$\frac{1}{2^{(p-1)r}}.$$

Zatem, podstawiając w miejsce składników sumy (4) raz liczbę  $\frac{1}{2^{pr}}$ , a drugi raz liczbę  $\frac{1}{2^{(p-1)r}}$ , uzyskujemy nierówności następujące:

$$v_p > \frac{2^{p-1}}{2^{pr}} = \frac{2^{p-1}}{2^{(p-1)r}} \cdot \frac{1}{2^r},$$

$$v_p < \frac{2^{p-1}}{2^{(p-1)r}},$$

skąd

$$v_p > \frac{1}{2^r} a^{p-1}, \quad (5)$$

$$v_p < a^{p-1}, \quad (6)$$

przyjmując

$$a = \frac{2}{2^r}. \quad (7)$$

Powiadam, że w razie równości

$$r = 1 \quad (8)$$

szereg (1) jest rozbieżny. Istotnie, podstawiając wartość (8) na  $r$  do wzorów (5) i (7), otrzymujemy

$$v_p > \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Jeżeli więc oznaczmy przez  $M$  dowolnie przyjętą liczbę a przez  $n$  taką liczbę całkowitą, od zera większą, która sprawdzałaby nierówność

$$n > 2M,$$

to na podstawie nierówności (9) otrzymamy

$$\sum_{p=1}^n v_p > M,$$

a ponieważ na podstawie równania (4) suma, stanowiąca lewą stronę tej nierówności, przedstawia redukt rzędu

$$2^n - 1$$

szeregu (1), czyli sumę tylu początkowych składników tego szeregu, ile wynosi liczba  $2^n - 1$ , przeto nierówność

$$i \geq 2^n - 1$$

pociąga za sobą nierówność

$$\sum_{k=1}^i \frac{1}{k} > M,$$

gdzie pisząc sumę  $i$  pierwszych składników szeregu (1), uwzględniliśmy tę okoliczność, iż przyjęliśmy na  $r$  wartość (8).

Dowiedliśmy więc (§ 122, tw. I), że przy  $r = 1$ , a więc na podstawie uwagi uczynionej powyżej i przy każdej od jedności mniejszej wartości liczby  $r$  szereg (1) jest rozbieżny.

Założmy obecnie, że mamy

$$(10) \quad r > 1.$$

W takim razie ze wzoru (7) mamy

$$a < 1,$$

skąd wynika, na podstawie twierdzenia poprzedzającego, że szereg geometryczny

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

jest zbieżny. Ponieważ zaś składniki szeregu

$$(11) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

są na podstawie nierówności (6) odpowiednio mniejsze od składników równorzędnych poprzedzającego szeregu geometrycznego, przeto rozważany szereg jest (§ 122, tw. II) zbieżny. Zatem, jakkolwiek liczbę, byle od zera większą, oznaczylibyśmy przez  $\varepsilon$ , zawsze liczbie

tej odpowiadać będzie taka liczba całkowita i dodatnia  $m$ , żeby nierówność

$$\alpha \geq m \quad (12)$$

pociągała za sobą nierówność

$$\sum_{p=\alpha}^{\beta} v_p < \varepsilon, \quad (13)$$

jakąkolwiek, byle od liczby całkowitej  $\alpha$  większą liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez  $\beta$ . Przyjmijmy

$$N = 2^{m-1} \quad (14)$$

i uważajmy sumę

$$\sum_{k=1}^{i+t} \frac{1}{k^r}. \quad (15)$$

Jeżeli tylko liczba całkowita  $i$  sprawdza nierówność

$$i > N, \quad (16)$$

to w takim razie, jakąkolwiek, byle od zera nie mniejszą wartość całkowitą przyjęlibyśmy na  $t$ , będziemy mogli na liczby całkowite  $\alpha$  i  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) wyznaczyć takie wartości, żeby liczba  $\alpha$  sprawdzała związek (12) i żeby nadto po podstawieniu w sumie

$$\sum_{p=\alpha}^{\beta} v_p \quad (17)$$

wartości (4) na  $v_p$  suma ta przyjęła kształt sumy o składnikach dodatnich, pośród których znajdowałyby się wszystkie składniki sumy (15). W takim razie suma (15) nie miałaby wartości większej od sumy (17), a ponieważ ze względu na nierówność (12) zachodziłaby nierówność (13), przeto mielibyśmy

$$\sum_{k=1}^{i+t} \frac{1}{k^r} < \varepsilon. \quad (18)$$

Stwierdzamy więc, że dowolnie przyjętej, byle od zera większej liczbie  $\varepsilon$  odpowiada zawsze taka liczba całkowita i dodatnia  $N$ , iż nierówność (16) pociąga za sobą nierówność (18), jakąkolwiek wartość całkowitą i dodatnią przyjęlibyśmy na  $t$ .

Dowiedliśmy więc, że w razie nierówności (10), szereg (1) jest zbieżny, a to właśnie pozostawało nam jeszcze do uzasadnienia.

Uwaga I. Ostatnią część dowodu twierdzenia powyższego moglibyśmy byli przeprowadzić prościej, rozumując w sposób następujący: ponieważ mamy w każdym razie nierówność (6), a w przypadku nierówności (10) zachodzi jeszcze nierówność

$$a < 1,$$

przeto mamy

$$\sum_{p=1}^n v^p < \frac{1-a^n}{1-a} < \frac{1}{1-a},$$

jakąkolwiek wartość całkowitą i dodatnią przyjęlibyśmy na liczbę  $n$ . Z drugiej znów strony, jakąkolwiek liczbę całkowitą i dodatnią oznaczylibyśmy przez  $i$ , możemy oczywiście zawsze do liczby  $i$  dobrać taką wartość na  $n$ , żebyśmy mieli

$$\sum_{k=1}^i \frac{1}{k^r} \leq \sum_{p=1}^n v^p.$$

Mamy zatem

$$\sum_{k=1}^i \frac{1}{k^r} < \frac{1}{1-a}$$

jakąkolwiek wartość całkowitą i dodatnią przyjęlibyśmy na liczbę  $i$ , naturalnie przy założeniu, że liczba  $r$  sprawdza nierówność (10).

Zatem (§ 122, tw. I) nierówność (1) pociąga za sobą zbieżność szeregu (1). Dowód ten nie dostarcza jednak żadnego środka do wyznaczania w przybliżeniu, z błędem nie przekraczającym naprzód danej granicy sumy szeregu (1) w razie jego zbieżności. Natomiast dowód, któremu daliśmy pierwszeństwo, zapoznaje nas z faktami, które prowadzą prosto do rozwiązania wspomnianego zagadnienia. Istotnie, jeżeli przyjmiemy na  $\varepsilon$  oznaczoną wartość, to wyznaczenie liczby  $m$  w taki sposób, żeby nierówność (12) pociągała za sobą nierówność (13), sprowadza się do wyznaczenia takiej wartości na  $m$ , żeby związek (12) pociągał za sobą związek

$$\sum_{p=\alpha}^{\beta} a^{p-1} < \varepsilon,$$

a zadanie to możemy przy liczbowo znanych wartościach liczb  $a$  i  $\varepsilon$  rozwiązać z łatwością na podstawie wyników, uzyskanych w teorii

szeregów geometrycznych. Wyznaczywszy liczbę  $m$ , należy tylko wyznaczyć liczbę  $N$  z równania (14).

Ponieważ w takim razie nierówność (16) pociąga za sobą nierówność (18), przeto (§ 121, tw. II) suma

$$\sum_{k=1}^i \frac{1}{k^r}$$

przedstawia, jeżeli tylko liczba  $i$  sprawdza nierówność (16), sumę szeregu (1) przybliżenie, z błędem nie większym od liczby  $\varepsilon$ .

Uwaga II. Z dowiedzonego twierdzenia wynika w szczególności, że szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

zwany szeregiem harmonicznym, jest szeregiem rozbieżnym. Ponieważ zaś ciąg nieskończony

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

oczywiście jest zbieżny, a granica jego równa się zero, przeto stwierdzamy zgodnie z zapowiedzią uczynioną, przy wysławianiu tw. III-go § 121-go, że warunek, ażeby ciąg składników oznaczonego szeregu był ciągiem zbieżnym o granicy równej zero, bynajmniej nie jest wystarczającym warunkiem zbieżności rozważanego szeregu.

§ 124. Z twierdzeń przytoczonych w paragrafie poprzedzającym można wyprowadzić pewne bardzo użyteczne twierdzenia, na podstawie których możemy często z łatwością rozpoznać, czy oznaczony szereg nieskończony o składnikach dodatnich jest zbieżny czy rozbieżny. Z tych cech zbieżności, a względnie rozbieżności, przytoczymy dwa najpowszechniej znane i najbardziej użyteczne.

I. Twierdzenie d'Alemberta. *Uważajmy szereg o składnikach dodatnich:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (1)$$

*Jeżeli pewnej od jedności mniejszej liczbie dodatniej  $a$  odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia  $n$ , żeby związek*

$$k \geq n \quad (2)$$



pociągał za sobą związek

$$(3) \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq a,$$

to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś istnieje pewna taka wartość liczby całkowitej  $n$ , iż związek (2) pociąga za sobą związek

$$(4) \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1,$$

to rozważany szereg jest rozbieżny.

Założmy najpierw, że przy pewnej, dostatecznie wielkiej wartości liczby  $n$  nierówność (2) pociąga za sobą nierówność (3). W takim razie nierówność (2) pociąga także za sobą (indukcja mat.) nierówność

$$u_{k+1} \leq u_n a^{k-n+1},$$

zatem nierówność (2) pociąga za sobą związek następujący:

$$u_{k+1} \leq \frac{u_n}{a^n} \cdot a^{k+1}$$

pomiedzy składnikami rzędów  $k+1$  szeregu (1) i szeregu geometrycznego

$$1 + a + a^2 + \dots,$$

który jest zbieżny (§ 123, tw. I), ze względu na nierówność

$$a < 1.$$

Z tego zaś wynika (§ 122, tw. II), że szereg (1) jest rzeczywiście zbieżny.

Żeby uzasadnić i drugą część twierdzenia, założmy, że istnieje taka wartość na liczbę  $n$ , iżby nierówność (2) pociągała za sobą związek (4). Spostrzegamy natychmiast, że w takim razie związek (2) pociąga za sobą związek następujący:

$$u_{k+1} \geq u_n,$$

zatem, gdyby nawet ciąg

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

był zbieżny, granica jego liczbie zero równać się nie może, skąd wynika (§ 121, tw. III), że szereg (1) jest rozbieżny. Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

II. Twierdzenie Cauchy'ego. Uważajmy szereg o składnikach dodatnich:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (1)$$

Jeżeli pewnej od jedności mniejszej liczbie  $a$  odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia  $n$ , żeby nierówność

$$k \geq n \quad (2)$$

pociągała za sobą nierówność

$$\sqrt[k]{u_k} \leq a, \quad (3)$$

gdzie na pierwiastek przyjęta być winna wartość dodatnia, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś istnieje pewna taka wartość całkowita i dodatnia na  $n$ , przy której nierówność (2) pociąga za sobą nierówność

$$\sqrt[k]{u_k} \geq 1, \quad (4)$$

to szereg (1) jest rozbieżny.

Jeżeli nierówność (2) pociąga za sobą nierówność (3), to nierówność (2) pociąga za sobą także nierówność

$$u_k \leq a^k,$$

zatem w razie nierówności (2) składnik rzędu  $k$  szeregu (1) nie jest większy od składnika równorzędnego w szeregu geometrycznym

$$a + a^2 + a^3 + \dots,$$

który jest zbieżny ze względu na nierówność

$$a < 1.$$

Z tego wynika (§ 122, tw. II), że szereg (1) jest rzeczywiście zbieżny w przypadku, kiedy nierówność (2) pociąga za sobą nierówność (3).

Założmy obecnie, że związek (2) pociąga za sobą związek (4). Ponieważ związek (4) równoważny jest oczywiście związkowi

$$u_k \geq 1,$$

przeto w rozważanym przypadku  $n$ -ty i każdy dalszy składnik szeregu (1) nie jest od jedności mniejszy. Zatem (§ 121, tw. III) szereg (1) jest rzeczywiście rozbieżny. Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.