

XIV. Podstawy teorii zbieżności szeregów nieskończonych.

§ 118. Zanim przystąpimy do właściwego przedmiotu tego rozdziału, omówimy w sposób systematyczny pewną metodę symbolizowania sum, którą w sposób przygodny tylko mieliśmy sposobność poruszyć poprzednio.

Założmy, że na podstawie stosownej definicji odpowiada oznaczona liczba $F(i)$ każdej takiej wartości całkowitej pewnej liczby i , która sprawdza nierówności postaci

$$N \leq i \leq N', \quad (1)$$

gdzie oznaczyliśmy przez N i N' dwie liczby całkowite jakiegokolwiek, mogące zatem być i liczbami ujemnymi, ale sprawdzające oczywiście nierówność

$$N \leq N'.$$

Jeżeli tedy oznaczmy przez n i p dwie liczby całkowite ($n \leq p$), należące do zbioru wszystkich tych wartości liczby i , które sprawdzają nierówności (1), to w takim razie określamy symbol

$$\sum_{i=n}^p F(i) \quad (2)$$

w sposób następujący: przyjmujemy

$$\sum_{i=n}^n F(i) = F(n) \quad (3)$$

oraz

$$\sum_{i=n}^{k+1} F(i) = \sum_{i=n}^k F(i) + F(k+1), \quad (4)$$

jakąkolwiek od liczby N' mniejszą liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez k .

Na podstawie zasady indukcji matematycznej umowy poprzedzające określają oczywiście znaczenie symbolu (2) we wszystkich przypadkach, w których liczby n i p sprawdzają związek

$$(5) \quad n \leq p,$$

i należą do zbioru wszystkich tych wartości całkowitych liczby i , które sprawdzają nierówności (1).

Żeby definicję symbolu (2) wyzwolić z ograniczenia, polegającego na nierówności (5), uzupełnimy definicję poprzedzającą, określając znaczenie symbolu (2) w razie nierówności

$$p < n$$

równością

$$\sum_{i=n}^p F(i) = \sum_{i=p}^n F(i),$$

gdzie do wyrażenia, stanowiącego prawą stronę tej równości, oczywiście możemy zastosować powyższą definicję, uwzględniając naturalnie przytem tę okoliczność, iż obecnie litera p oznacza ten element, który we wspomnianej definicji oznaczyliśmy przez n , a litera n — element, któryśmy oznaczyli przez p .

Symbol (2) zowie się sumą pojedynczą, a liczby n i p granicami tej sumy, mianowicie liczba n dolną, a liczba p górną. Wspomniany symbol czytamy w sposób następujący:

$$\text{sigma od } i = n \text{ do } i = p, F(i).$$

Oznaczmy przez n , p i q trzy liczby całkowite, należące do zbioru tych wartości liczby i , które sprawdzają związki (1), i założmy, że mamy

$$(6) \quad n \leq p < q;$$

w takim razie mamy

$$(7) \quad \sum_{i=n}^p F(i) + \sum_{i=p+1}^q F(i) = \sum_{i=n}^q F(i).$$

Istotnie, w razie równości

$$q = p + 1$$

mamy

$$\sum_{i=p+1}^q F(i) = F(p+1)$$

oraz

$$\sum_{i=n}^q F(i) = \sum_{i=n}^{p+1} F(i) = \sum_{i=n}^p F(i) + F(p+1),$$

na podstawie definicji symbolu sumy pojedynczej, z równości zaś poprzedzających wynika równość (7).

Założmy chwilowo, że związek (7) zachodzi jeszcze w razie, kiedy mamy

$$q = p + k, \quad (8)$$

oznaczając przez k pewną liczbę całkowitą, od jedności nie mniejszą, i przyjmijmy

$$q = p + k + 1. \quad (9)$$

Mamy tedy

$$\sum_{i=p+1}^q F(i) = \sum_{i=p+1}^{p+k} F(i) + F(p+k+1)$$

oraz

$$\sum_{i=n}^q F(i) = \sum_{i=n}^{p+k} F(i) + F(p+k+1),$$

a ponieważ założyliśmy, że mamy

$$\sum_{i=n}^{p+k} F(i) = \sum_{i=n}^p F(i) + \sum_{i=p+1}^{p+k} F(i),$$

przeto stwierdzamy, że przy wartości (9) na q związek (7) także zachodzić będzie. Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnosimy z uzyskanych wyników, że równość (7) rzeczywiście zachodzić będzie w każdym razie.

Opierając się na uzyskanem twierdzeniu, dowiedlibyśmy z łatwością, że w przypadku, w którymby liczby n , p i q sprawdzały związku

$$n \geq p > q,$$

mielibyśmy zamiast równości (7) równość następującą:

$$\sum_{i=n}^p F(i) + \sum_{i=p+1}^q F(i) = \sum_{i=n}^q F(i).$$

Przyjmijmy

$$i = sk + h, \quad (10)$$

oznaczając przez s jedną z liczb

$$+1 \quad \text{albo} \quad -1,$$

a przez h dowolnie przyjętą, ale oznaczoną liczbę całkowitą. Ponieważ mamy

$$s^2 = +1,$$

przeto z równości (10) wynika równoważna jej równość

$$si = k + sh,$$

skąd

$$(11) \quad k = si - sh.$$

Powiadam, że mamy

$$(12) \quad \sum_{i=n}^p F(i) = \sum_{k=sn-sh}^{sp-sh} F(sk + h).$$

Ponieważ równość poprzedzająca zachodzi lub nie zachodzi zawsze tylko jednocześnie z równością następującą:

$$(13) \quad \sum_{i=p}^n F(i) = \sum_{k=sp-sh}^{sn-sh} F(sk + h),$$

przeto, żeby uzasadnić obie równości (12) i (13), możemy poprzestać na uzasadnieniu jednej z nich. Możemy więc bez szkody dla ogólności założyć, że dolna granica sumy, stanowiącej lewą stronę równości, którą pragniemy uzasadnić, nie jest większa od górnej.

Ponieważ z drugiej strony, przemieniając w razie potrzeby pomiędzy sobą znaczenia liter, możemy zawsze to uzyskać, żeby zachodził związek

$$n \leq p,$$

przeto ostatecznie możemy bez szkody dla ogólności założyć, że związek poprzedzający zachodzi. Przyjmijmy to założenie. W razie równości

$$(14) \quad p = n$$

mamy

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^p F(i) &= F(n), \\ \sum_{k=sn-sh}^{sp-sh} F(sk + h) &= F(s(sn - sh) + h), \end{aligned}$$

a ponieważ mamy

$$s^2 = 1,$$

skąd wynika równość

$$s(sn - sh) + h = n,$$

przeto mamy

$$\sum_{k=sn-sh}^{sp-sh} F(sh + h) = F(n).$$

Zatem w razie równości (14) równość (12) rzeczywiście zachodzi. Załóżmy chwilowo, że równość ta zachodzi jeszcze w przypadku, kiedy mamy

$$p = n + \nu, \quad (15)$$

oznaczając przez ν pewną od zera nie mniejszą liczbę i przyjmijmy

$$p = n + \nu + 1. \quad (16)$$

Mamy tedy

$$\sum_{i=n}^p F(i) = \sum_{i=n}^{n+\nu+1} F(i) = \sum_{i=n}^{n+\nu} F(i) + F(n + \nu + 1). \quad (17)$$

Żeby posunąć się dalej, należy osobno rozważyć przypadek, w którym mamy

$$s = +1 \quad (18)$$

i przypadek, w którym zachodzi równość

$$s = -1. \quad (19)$$

Założmy najpierw, że liczba s ma wartość (18). Mamy tedy

$$\begin{aligned} \sum_{k=sn-sh}^{sp-sh} F(sk + h) &= \sum_{k=n-h}^{n+\nu+1-h} F(k + h) = \\ &= \sum_{k=n-h}^{n+\nu-h} F(k + h) + F(n + \nu + 1 - h + h) = \\ &= \sum_{k=n-h}^{n+\nu-h} F(k + h) + F(n + \nu + 1), \end{aligned}$$

skąd

$$\sum_{k=sn-sh}^{sp-sh} F(sk + h) = \sum_{k=n-h}^{n+\nu-h} F(sk + h) + F(n + \nu + 1), \quad (20)$$

a ponieważ założyliśmy, że w razie równości (15) równość (12) zachodzi, przeto wnosimy z równości (17) i (20), że równość (12) zachodzić będzie także i w razie równości (16), jeżeli tylko liczba s ma wartość (18).

Założmy teraz, że liczba s ma wartość (19). Mamy tedy przy wartości (16) na p równość następującą:

$$(21) \quad \sum_{k=sn-sh}^{sp-sh} F(sk+h) = \sum_{k=h-n}^{h-n-v-1} F(h-k).$$

Mamy

$$(22) \quad \sum_{k=h-n}^{h-n-v-1} F(h-k) = \sum_{k=h-n-v-1}^{h-n} F(h-k).$$

Z drugiej strony, na podstawie twierdzenia, polegającego na równości (7), mamy

$$\begin{aligned} \sum_{k=h-n-v-1}^{h-n} F(h-k) &= \sum_{k=h-n-v-1}^{h-n-v-1} F(h-k) + \sum_{k=h-n-v}^{h-n} F(h-k) = \\ &= F(n+v+1) + \sum_{k=h-n-v}^{h-n} F(h-k); \end{aligned}$$

mamy więc

$$\sum_{k=sn-sh}^{sp-sh} F(sk+h) = \sum_{k=h-n-v}^{h-n} F(h-k) + F(n+v+1)$$

na podstawie równości (21) i (22), a ponieważ przy wartości (19) na s mamy

$$\sum_{k=h-n-v}^{h-n} F(h-k) = \sum_{k=sn-sh}^{s(n+v)-sh} F(sk+h),$$

przeto mamy

$$(23) \quad \sum_{k=sn-sh}^{sp-sh} F(sk+h) = \sum_{k=sn-sh}^{s(n+v)-sh} F(sk+h) + F(n+v+1).$$

Ponieważ zaś na podstawie chwilowo przyjętego założenia równość (12) zachodzi przy wartości (15) na p , przeto mamy

$$\sum_{k=sn-sh}^{s(n+v)-sh} F(sk+h) = \sum_{i=n}^{n+v} F(i).$$

Opierając się na tej równości, wnosimy z równości (17) i (23), że równość (12) i w rozważanym obecnie przypadku zachodzi.

Ostatecznie dowiedliśmy: 1^o, że równość (12) zachodzi przy wartości (14) na p ; 2^o, że równość (12) zachodziłaby i przy wartości (16) na p , gdyby tylko zachodziła przy wartości (15).

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnosimy z wyników tych, że równość (12) zachodzi przy wszystkich od liczby n nie mniejszych wartościach na p . Ponieważ zaś przekonaliśmy się już poprzednio, że dla ogólnego uzasadnienia równości (12) wystarczającym jest uzasadnienie równości tej w przypadku, kiedy liczba p od liczby n mniejsza nie jest, przeto stwierdzamy, że równość (12) zachodzi we wszystkich przypadkach bez wyjątku.

Oznaczmy przez $F_1(i)$ wyrażenie analogiczne do wyrażenia $F(i)$. Mamy tedy

$$\sum_{i=n}^p \{F(i) + F_1(i)\} = \sum_{i=n}^p F(i) + \sum_{i=n}^p F_1(i).$$

Równość tę czytelnik udowodni z największą łatwością drogą indukcji matematycznej. Równie łatwo uzasadni czytelnik, znowu drogą indukcji matematycznej, związek następujący:

$$\sum_{i=n}^p \{CF(i)\} = C \sum_{i=n}^p F(i),$$

gdzie oznaczyliśmy przez C jakąkolwiek od liczby i niezależną liczbę.

Pierwsza z dwóch równości powyższych jest w rzeczywistości wynikiem własności łączności i przemienności dodawania, a druga wyraża w symbolistyce, której poświęciliśmy obecny paragraf, własność rozdzielności mnożenia w stosunku do dodawania.

Załóżmy, że każdemu z tych układów wartości całkowitych na symbole i i j , które nam wypadnie rozważać, odpowiada oznaczona liczba

$$F(i, j).$$

W takim razie, uważając symbol j za symbol pewnej oznaczonej liczby całkowitej, znaczenie wyrażenia

$$\sum_{i=n}^p F(i, j), \tag{24}$$

gdzie oznaczyliśmy przez n i p pewne dwie liczby całkowite, określone będzie oczywiście powyższą definicją symbolów postaci (2); jeżeli na przykład mamy

$$n < p,$$

to wyrażenie (24) przedstawiać będzie sumę

$$F(n, j) + F(n+1, j) + \dots + F(p, j).$$

Samo wyrażenie (24) przedstawiać będzie liczbę określoną w zależności od wartości liczby całkowitej j . Możemy tedy rozważać wyrażenie

$$(25) \quad \sum_{j=\alpha}^{\beta} \sum_{i=n}^p F(i, j),$$

którego znaczenie znowu wynika z ogólnej definicji symbolów postaci (2). Wyrażenie postaci (25) zowie się sumą podwójną. Możemy oczywiście określić analogicznie sumę potrójną, poczwórną i wogóle sumę n -krotną. Nie tu miejsce szczegółowo omawiać sumy tego rodzaju. Chodzi nam tylko o to, żeby ze względu na dalsze zastosowania uwidocznić pewną okoliczność natury całkiem elementarnej. Poprzestaniemy przytem na rozważaniu sumy dwukrotnej, co dla dalszych zastosowań będzie wystarczającym; czytelnik rozszerzy z łatwością sam do przypadku ogólnego to, co powiemy o sumach podwójnych.

Zdarzyć się może, że w wyrażeniu (25) liczby n i p określone są w zależności od tej wartości na j , którą liczbie tej przypisujemy w wyrażeniu

$$\sum_{i=n}^p F(i, j);$$

ale przypadku tego omawiać bliżej nie będziemy i założymy, że liczby n i p określone są niezależnie od liczby j .

Powiadam, że w takim razie mamy związek następujący:

$$(26) \quad \sum_{j=\alpha}^{\beta} \sum_{i=n}^p F(i, j) = \sum_{i=n}^p \sum_{j=\alpha}^{\beta} F(i, j),$$

co wyrażamy słowami, orzekając, że w sumie podwójnej (25), w przypadku, kiedy liczby n i p od liczby j nie zależą, porządek

sumowania w stosunku do i i j może ulec przemianie bez wywarcia wpływu na wartość sumy.

Możemy oczywiście założyć bez szkody dla ogólności, że mamy

$$\alpha \leq \beta, \quad n \leq p.$$

W przypadku szczególnym, w którym mamy

$$\alpha = \beta, \quad n = p \quad (27)$$

mamy

$$\sum_{i=n}^p F(i, j) = F(n, j),$$

skąd

$$\sum_{j=\alpha}^{\beta} \sum_{i=n}^p F(i, j) = \sum_{j=\alpha}^{\beta} F(n, j) = \sum_{j=\alpha}^{\alpha} F(n, j) = F(n, \alpha). \quad (28)$$

Całkiem analogicznie uzyskujemy równości następujące:

$$\sum_{j=\alpha}^{\beta} F'(i, j) = F'(i, \alpha),$$

skąd

$$\sum_{i=n}^p \sum_{j=\alpha}^{\beta} F'(i, j) = \sum_{i=n}^p F'(i, \alpha) = F(n, \alpha). \quad (29)$$

Z równości (28) i (29) wnosimy natychmiast, że równość (26) rzeczywiście zachodzi w przypadku szczególnym, w którym zachodzą równości (27).

Założmy chwilowo, że równość (26) zachodzi jeszcze w razie, kiedy mamy

$$\beta = \alpha \quad (30)$$

oraz

$$p = n + k, \quad (31)$$

oznaczając przez k pewną liczbę całkowitą od zera nie mniejszą, i przyjmijmy

$$p = n + k + 1. \quad (32)$$

Mamy tedy

$$\sum_{i=n}^{n+k+1} F(i, j) = \sum_{i=n}^{n+k} F(i, j) + F(n+k+1, j)$$

skąd

$$(33) \quad \sum_{j=\alpha}^{\alpha} \sum_{i=n}^{n+k+1} F(i, j) = \sum_{j=\alpha}^{\alpha} \sum_{i=n}^{n+k} F(i, j) + F(n+k+1, \alpha).$$

Z drugiej strony mamy

$$(34) \quad \begin{aligned} \sum_{i=n}^{n+k+1} \sum_{j=\alpha}^{\alpha} F(i, j) &= \sum_{i=n}^{n+k} \sum_{j=\alpha}^{\alpha} F(i, j) + \sum_{i=n+k+1}^{n+k+1} \sum_{j=\alpha}^{\alpha} F(i, j) = \\ &= \sum_{i=n}^{n+k} \sum_{j=\alpha}^{\alpha} F(i, j) + F(n+k+1, \alpha). \end{aligned}$$

Z równości (33) i (34) wynika ze względu na chwilowo przyjęte założenie, że w razie równości (30) i (32) związek (26) zachodzi. Z uzyskanych wyników wnosimy, że związek (26) zachodzi, jeżeli tylko zachodzi równość (30), jakiegokolwiek byłyby wartości liczb n i p .

Założmy chwilowo, że związek (26) zachodzi bez względu na wartość różnicy liczb n i p , bylebyśmy mieli

$$(35) \quad \beta = \alpha + t,$$

gdzie t oznacza pewną od zera nie mniejszą liczbę całkowitą, i przyjmijmy

$$(36) \quad \beta = \alpha + t + 1.$$

Mamy tedy

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=\alpha}^{\alpha+t+1} \sum_{i=n}^p F(i, j) &= \sum_{j=\alpha}^{\alpha+t} \sum_{i=n}^p F(i, j) + \sum_{j=\alpha+t+1}^{\alpha+t+1} \sum_{i=n}^p F(i, j) \\ \sum_{j=n}^p \sum_{i=\alpha}^{\alpha+t+1} F(i, j) &= \sum_{i=n}^p \sum_{j=\alpha}^{\alpha+t} F(i, j) + \sum_{i=n}^p \sum_{j=\alpha+t+1}^{\alpha+t+1} F(i, j). \end{aligned} \right.$$

Na podstawie chwilowo przyjętego założenia mamy

$$\sum_{j=\alpha}^{\alpha+t} \sum_{i=n}^p F(i, j) = \sum_{i=n}^p \sum_{j=\alpha}^{\alpha+t} F(i, j),$$

a na podstawie jednego z wyników już uzasadnionych

$$\sum_{j=\alpha+t+1}^{\alpha+t+1} \sum_{i=n}^p F(i, j) = \sum_{i=n}^p \sum_{j=\alpha+t+1}^{\alpha+t+1} F(i, j).$$

Wnosimy więc z równości (37), że równość (26) zachodzi przy wartości (36) na β , jeżeli tylko równość ta zachodzi przy wartości (35) na β .

Ponieważ zaś dowiedliśmy, że równość (26) zachodzi przy wartości (30) na β , przeto na podstawie zasady indukcji matematycznej równość (26) zachodzi rzeczywiście w każdym razie.

Powyższe własności sum pojedynczych i podwójnych łatwo mogą być spostrzeżone intuicyjnie. Podaliśmy jednak szczegółowe dowody tych własności, ażeby uwidocznic ten fakt, iż powoływanie się na intuicyję w kwestiach tego rodzaju nie jest niezbędne.

§ 119. Szeregiem nazywamy ciąg

$$s_1, s_2, s_3, \dots \quad (1)$$

w którym wyraz ogólny s_n rzędu n uważamy za określony wzorem postaci

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad (2)$$

w zależności od wyrazów oznaczonego ciągu

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (3)$$

Wyraz u_n jakiegokolwiek rzędu n w ciągu (2) zowie się składnikiem rzędu n rozważanego szeregu.

Wobec tego symbol s_n , określony wzorem (2), przedstawia sumę n pierwszych składników powyższego szeregu.

Suma ta zowie się reduktem rzędu n odnośnego szeregu.

Szereg zowie się skończonym lub nieskończonym, zależnie od tego, czy ciąg składników jego jest skończony czy nieskończony. Właściwym przedmiotem rozważań naszych będą szeregi nieskończone.

Oznaczając ogólnie przez u_n składnik rzędu n pewnego szeregu nieskończonego, oznaczamy sam szereg przez symbol

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (4)$$

albo też przez symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (5)$$

Jeżeli ciąg (1) jest zbieżny, to w takim razie, i tylko w takim razie orzekamy, że szereg (4) jest zbieżny, a granicę ciągu (1) zo-

wiemy sumą rozważanego szeregu. Szereg, który zbieżny nie jest, zowie się szeregiem rozbieżnym.

Żeby wyrazić, iż suma pewnego szeregu zbieżnego równa się oznaczonej liczbie, orzekamy często, że szereg ten przedstawia wspomnianą liczbę.

W razie zbieżności oznaczonego szeregu uważamy symbol tegoż, utworzony według powyższych prawideł, za symbol przedstawiający nie tylko sam szereg, ale także i jego sumę.

Jeżeli więc założymy, że szereg (4) jest zbieżny, i oznaczmy przez s jego sumę, to mamy w takim razie równości następujące:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Jeżeli pewien szereg, np. szereg (4), jest zbieżny, a symbol s oznacza jego sumę, to w takim razie możemy przyjąć

$$s = \sum_{i=1}^n u_i + R_n.$$

Liczba R_n , określona tym równaniem, zowie się resztą rzędu n rozważanego szeregu.

Opierając się na związku

$$\sum_{i=1}^{n+m} u_i = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} u_i,$$

stwierdzamy, że

$$R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i.$$

§ 120. Jakikolwiek ciąg nieskończony

$$(1) \quad v_1, v_2, v_3, \dots$$

uważalibyśmy, zawsze istnieje jeden, i tylko jeden szereg nieskończony

$$(2) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

taki, żeby redukt rzędu n tego szeregu (czyli suma n pierwszych jego składników), jakkolwiek wartość przyjąłobyśmy na liczbę całkowitą i dodatnią n , równał się wyrazowi rzędu n ciągu (1).

Istotnie, spostrzegamy natychmiast, że okoliczność ta zachodzić będzie w razie, i tylko w razie, jeżeli określimy składniki szeregu (2) na podstawie wzorów następujących:

$$u_1 = v_1 \quad (3)$$

oraz ogólnie

$$u_n = v_n - v_{n-1} \quad (4)$$

jakąkolwiek, byle od jedności większą liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez n .

Zestawiając twierdzenie poprzedzające z definicyą szeregu, spostrzegamy, że pomiędzy ciągami nieskończonymi a szeregami możemy ustawić taką wzajemną odpowiedniość, żeby w odpowiadających sobie wzajemnie ciągu i szeregu wyraz n -tego rzędu ciągu równał się sumie n pierwszych składników szeregu, i to przy wszystkich możebnych wartościach na n .

Odpowiadający sobie wzajemnie w ten sposób ciąg i szereg jednocześnie tylko mogą posiadać własność zbieżności, a w razie zbieżności granica ciągu równa się oczywiście sumie szeregu. Zatem ciągi nieskończone i szeregi nieskończone stanowią dwa całkiem równorzędne narzędzia i do wyznaczania i do przedstawiania liczb. Wogóle ciągi nieskończone i szeregi nieskończone stanowią oczywiście dwie, tak ze sobą powiązane klasy tworów umysłowych, że z każdego twierdzenia, stosującego się do tworów jednej z tych klas, wynika natychmiast oznaczone twierdzenie, stosujące się do tworów drugiej klasy, a każdemu zagadnieniu (Z) z zakresu teorii tworów jednej ze wspomnianych klas odpowiada pewne takie zagadnienie (Z') z zakresu teorii tworów drugiej klasy, iż z rozwiązania jednego z zagadnień (Z) lub (Z') wynika natychmiast rozwiązanie drugiego zagadnienia. Z uwag tych nie należy jednak wnosić, że pojęciowy stosunek ciągów i szeregów nieskończonych jest symetryczny, że innemi słowy, konstrukcyja któregośkolwiek z tych pojęć oparta być może na drugim. Zwracając się do definicyi, ustawionych w poprzednim paragrafie, spostrzegamy natychmiast, że pojęciem podstawowem, które w żadnym razie pominięte być nie może, jest pojęcie ciągu; spostrzegamy nawet bez żadnej trudności, że teoria szeregów niczem innym być nie może, jak tylko tem, czym jest w rzeczywistości, a mianowicie teorią ciągów, przedstawioną zapomocą pewnej szczególnej terminologii. Terminologia teorii szeregów okazała się znakomicie podatną do

wymagań nauki i na tem właśnie polega przyczyna, dla której teoria ta ma pierwszorzędne znaczenie naukowe.

Pewne z twierdzeń, które mają być wyłożone niżej, będą wynikami prostego przekładu na terminologię teorii szeregów twierdzeń, uzasadnionych już w teorii ciągów; twierdzenia te czytelnik odróżni z łatwością od innych i spostrzeże, że dowód każdego z nich polega tylko na wykazaniu poprawności przekładu.

Opierając się na powyższych wyjaśnieniach, czytelnik przełoży sam z łatwością każde zagadnienie i każde twierdzenie, wysłowione w terminologii ciągów lub szeregów, na terminologię drugiej z tych teorii.

§ 121. Paragraf ten poświęcamy najogólniejszym twierdzeniom z teorii szeregów.

I. *Żeby szereg nieskończony*

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

był zbieżny, koniecznem i wystarczającym jest, żeby do każdej, byle od zera większej, a więc choć jak małej liczby ε możliwem było dobrać taką liczbę całkowitą i dodatnią N , żeby nierówność

$$(2) \quad i \geq N$$

pociągała za sobą nierówność

$$(3) \quad \left| \sum_{k=1}^p u_{i+k} \right| < \varepsilon,$$

jakąkolwiek, byle od jedności nie mniejszą wartość całkowitą przyjąćbyśmy na liczbę p .

Istotnie, na podstawie definicyi zasadniczych szereg (1) jest zbieżny lub rozbieżny jednocześnie z ciągiem

$$(4) \quad s_1, s_2, s_3, \dots,$$

którego ogólny wyraz s_n określony jest wzorem

$$(5) \quad s_n = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Z drugiej strony, na podstawie znanego twierdzenia (§ 116, tw. I), konieczny i wystarczający warunek zbieżności ciągu (4),

polega na możności dobrania do liczby ε takiej liczby całkowitej i dodatniej N , żeby nierówności

$$\left. \begin{array}{l} i \geq N \\ j \geq N \end{array} \right\} \quad (6)$$

pociągały za sobą nierówność

$$|s_j - s_i| < \varepsilon. \quad (7)$$

Ponieważ w razie równości $j = i$ nierówność (7) zachodziłaby bez względu na naturę ciągu (4), przeto chodzi tylko o to, żeby nierówności (6) pociągały za sobą nierówność (7) w razie nierówności

$$j \neq i.$$

Przyjmując tedy oznaczenia tak, żebyśmy mieli

$$j = i + p,$$

gdzie p oznacza liczbę całkowitą od zera większą, spostrzegamy, opierając się na wzorze (5), że warunek poprzedzający równoważny jest warunkowi podanemu w twierdzeniu, a więc właśnie warunkowi, o uzasadnienie którego chodziło. Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, które pragnęliśmy udowodnić.

U w a g a I. Jeżeli dwa szeregi

$$\begin{array}{l} u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ i \\ v_1 + v_2 + v_3 + \dots \end{array}$$

znajdują się w takim związku, iż istnieją pewne dwie liczby całkowite i dodatnie p i q takie, żebyśmy mieli

$$u_{p+i} = v_{q+i},$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą, byle od zera nie mniejszą oznaczylibyśmy przez i , to w takim razie szeregi te oczywiście zawsze jednocześnie są zbieżne lub rozbieżne.

Z wniosku tego wynika natychmiast, że jakiegokolwiek zmiany wartości skończonej liczby składników oznaczonego szeregu wpływu żadnego nie wywierają na własność zbieżności lub rozbieżności, którą mógł mieć pierwotnie rozważany szereg. Natomiast oczywiście zmianą wartości skończonej liczby składników szeregu zbież-

nego możemy wywołać jakąkolwiek zmianę wartości sumy tego szeregu.

Uwaga II. Jeżeli pewien szereg jest zbieżny, to redukty tego szeregu są ograniczone; innymi słowy, istnieją pewne dwie liczby L_1 i L_2 takie, iż mamy

$$L_1 \leq s_n \leq L_2$$

bez względu na wartość liczby całkowitej i dodatniej n .

Słuszność uwagi tej wynika bezpośrednio z twierdzenia poprzedzającego, ale może być także uważana za następstwo uwagi II przy tw. I-szem § 116-go.

II. Jeżeli pewien szereg, szereg (1), jest zbieżny, a do pewnej liczby ε , od zera większej, liczba N tak została dobrana, żeby nierówność (2) pociągała za sobą nierówność (3), to w takim razie nierówność (2) pociąga za sobą nierówność

$$\left| \sum_{k=1}^i u_k - s \right| \leq \varepsilon,$$

gdzie przez s oznaczyliśmy sumę szeregu.

Twierdzenie to jest natychmiastowem następstwem uwagi I-szej przy tw. I-szem § 116 go, a wielkie jego znaczenie polega na tem, że w przypadkach, kiedy jesteśmy w stanie liczbowo rozwiązać problem wyznaczenia liczby N w zależności od liczby ε tak, żeby nierówność (2) pociągała za sobą nierówność (3), mamy na podstawie twierdzenia obecnego środek do przybliżonego wyznaczenia sumy szeregu z błędem, nie przekraczającym *a priori* oznaczonej granicy.

III. *Konieczny* (ale jak się przekonamy o tem później *niedostateczny*) warunek zbieżności szeregu nieskończonego polega na tem, żeby ciąg składników jego był ciągiem zbieżnym o granicy równej zero.

Ponieważ na podstawie twierdzenia poprzedzającego, w razie zbieżności szeregu (1) możliwem jest dobranie do każdej, byle od zera większej liczby ε , takiej liczby całkowitej i dodatniej N na wartość liczby całkowitej i dodatniej p , żeby nierówność (2) pociągała za sobą nierówność (3), przeto w razie zbieżności rozważanego szeregu możliwem będzie w szczególności dobrać do każdej, byle

od zera większej wartości liczby ε taką liczbę całkowitą i dodatnią N , żeby nierówność (2) pociągała za sobą nierówność

$$|u_{i+1}| < \varepsilon.$$

którą wyprowadzamy z nierówności (3), przyjmując $p = 1$.

Wynik, do którego doszliśmy, wyraża, iż w razie zbieżności szeregu (1) ciąg

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

będzie ciągiem zbieżnym, o granicy równej zeru, a o to właśnie chodziło.

IV. Jeżeli szereg, wynikający z jakiegokolwiek szeregu danego drogą podstawienia w miejsce jego składników ich wartości bezwzględnych, jest zbieżny, to rozważany szereg także jest zbieżny.

Istotnie, zachowując oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się poprzednio, przyjmijmy jeszcze

$$U_n = |u_n|$$

i załóżmy, że szereg

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots \quad (8)$$

jest zbieżny. W takim razie do każdej, byle od zera większej wartości liczby ε , możebnem będzie dobranie takiej liczby całkowitej N , żeby nierówność (2) pociągała za sobą nierówność

$$\sum_{k=1}^p U_{i+k} < \varepsilon,$$

jakąkolwiek wartość dodatnią przyjęlibyśmy na liczbę całkowitą p . Ponieważ mamy

$$\left| \sum_{k=1}^p u_{i+k} \right| \leq \sum_{k=1}^p U_{i+k},$$

przeto przy powyższej wartości na N nierówność (2) pociągać będzie za sobą nierówność (3), zatem na podstawie tw. I-go szereg (1) rzeczywiście będzie zbieżny, co właśnie należało uzasadnić.

Przekonamy się później, że jakeśmy już zaznaczyli, twierdzenie poprzedzające nie może być odwrócone, innemi słowy szereg (8) może być rozbieżny nawet w razie zbieżności szeregu (1).

Jeżeli szereg, powstający z oznaczonego szeregu przez podstawienie w miejsce jego składników wartości bezwzględnych tychże, jest zbieżny, to w takim razie orzekamy, że rozważany szereg (niezawodnie zbieżny na podstawie twierdzenia poprzedzającego) jest bezwzględnie zbieżny. Szeregi zbieżne, które jednak bezwzględnie zbieżnymi nie są, zowią się szeregami warunkowo zbieżnymi.

Zestawiając z twierdzeniem § 117-go uwagi poczynione w § 120-tym o stosunku wzajemnym ciągów nieskończonych i szeregów, spostrzegamy natychmiast, że rozważając dwa lub kilka szeregów zbieżnych, możemy z łatwością określić szereg zbieżny, którego suma równałaby się jakiegokolwiek takiej kombinacji sum szeregów danych przez działania zasadnicze, która miałaby oznaczoną wartość, która zatem nie obejmowałaby dzielenia przez dzielnik równy liczbie zero. Najważniejsze ze związków, które możemy uzyskać na tej drodze, podajemy w twierdzeniu następującem.

V. Jeżeli każdy z szeregów

$$\begin{aligned} & u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ & v_1 + v_2 + v_3 + \dots \end{aligned}$$

jest zbieżny, to w takim razie zachodzą związki następujące :

$$(A) \quad \sum_{i=1}^{\infty} u_i + \sum_{i=1}^{\infty} v_i = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i + v_i),$$

$$(B) \quad \sum_{i=1}^{\infty} u_i - \sum_{i=1}^{\infty} v_i = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i - v_i),$$

$$(C) \quad a \sum_{i=1}^{\infty} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} a u_i,$$

$$(D) \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} \right) : b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i}{b},$$

gdzie symbol a oznacza liczbę całkiem dowolnie przyjętą, a symbol b liczbę od zera odmienną, ale poza tem jakąkolwiek.

Związki (A) (B) uzyskane być mogą w sposób tak bezpośredni drogą dopiero co wskazaną, że wszelkie dodatkowe wyjaśnienia byłyby zbędne; zwrócimy tylko uwagę czytelnika na to,

że związki te moglibyśmy także z łatwością wyprowadzić bezpośrednio z definicji sumy szeregu. Związek (D) jest natychmiastowo następstwem związku (C), albowiem dzielenie przez liczbę od zera odmienną b równoważne jest mnożeniu przez czynnik

$$\frac{1}{b}.$$

Pozostaje więc tylko parę słów do powiedzenia o równości (C). Liczba a uważana być może za granicę ciągu nieskończonego, którego wszystkie wyrazy równają się samej liczbie a . Ponieważ z drugiej strony suma szeregu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

jest granicą ciągu, w którym n -ty wyraz równa się sumie

$$\sum_{i=1}^n u_i,$$

przeto iloczyn liczby a przez sumę powyższego szeregu równa się na podstawie twierdzenia § 117-go granicy ciągu zbieżnego, w którym n -ty wyraz równa się wyrażeniu

$$a \sum_{i=1}^n u_i,$$

a które znów równe jest następującemu

$$\sum_{i=1}^n au_i.$$

Ponieważ zaś to ostatnie wyrażenie przedstawia sumę n pierwszych składników czyli reduct n -ty szeregu

$$au_1 + au_2 + au_3 + \dots,$$

przeto szereg ten jest zbieżny, a suma jego sprawdza równość (C).

Pozostawiamy czytelnikowi wyprowadzenie związku (C) bezpośrednio z tw. I-go paragrafu niniejszego.

Bezpośrednie zastosowywanie tw. I-go paragrafu niniejszego do rozstrzygnięcia, czy pewien szereg jest zbieżny, połączone jest często z poważnymi trudnościami; niejednokrotnie nawet napotykamy sze-

regi, co do których wogóle nie umiemy rozstrzygnąć pytania, czy one są czy nie są zbieżne. Wobec tego, badając niżej pewne szczególne typy szeregów, będziemy mieli przedewszystkiem na celu ustawienie twierdzeń, które nadają się do rozwiązywania kwestyi zbieżności szeregów w przypadkach mniej lub więcej szczególnych.

§ 122. Paragraf ten poświęcamy teorii szeregów o składnikach dodatnich. Szeregi tego rodzaju mają wyjątkowe znaczenie już z tej przyczyny, iż ze względu na tw. IV-te paragrafu poprzedzającego stwierdzenie zbieżności szeregu o składnikach, których znaki są jakiegokolwiek, może być w pewnych przypadkach osiągnięte przez stwierdzenie zbieżności pewnego szeregu o składnikach dodatnich, mianowicie szeregu, wynikającego z rozważanego szeregu przez podstawienie na miejsce jego składników wartości bezwzględnych tychże. Ale w rzeczywistości szeregi o składnikach dodatnich zasługują na szczególną uwagę i z innych względów: w jednym z następnych paragrafów przekonamy się, że szeregi zbieżne bezwzględnie wyróżniają się od innych szeregów własnością, która czyni z nich narzędzie szczególnie dogodne; otóż, ponieważ szereg zbieżny bezwzględnie określiliśmy, jako szereg tę własność mający, iż szereg, wynikający z niego drogą podstawienia na miejsce jego składników wartości bezwzględnych tychże, jest zbieżny, przeto problem zdecydowania, czy pewien szereg jest zbieżny bezwzględnie, polega w rzeczywistości na zdecydowaniu o zbieżności oznaczonego szeregu o składnikach dodatnich.

I. *Żeby szereg o składnikach dodatnich*

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

był zbieżny, koniecznem jest i wystarczajacem, żeby istniała oznaczona liczba A taka, iżby związek

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n u_i \leq A$$

zachodził, jakiegokolwiek wartość całkowitą i dodatnią przyjąlibyśmy na n .

Istotnie, szereg (1) jest zbieżny lub rozbieżny jednocześnie z ciągiem

$$(3) \quad s_1, s_2, s_3, \dots$$