

gnięcia w pewnych przypadkach o zbieżności lub rozbieżności oznaczonego ciągu.

§ 117. Rozwiązaniem drugiego z problemów podstawowych (§ 115) teorii ciągów jest twierdzenie następujące:

Oznaczmy przez  $u_n$  i  $v_n$  wyrazy rzędu  $n$ -tego dwóch ciągów nieskończonych zbieżnych i, posługując się symbolistyką określoną w § 114-tym, przyjmijmy

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} u_n = a$$

$$(2) \quad \lim_{n=\infty} v_n = b.$$

W takim razie zachodzić będą związki następujące:

$$(3) \quad \lim_{n=\infty} (u_n + v_n) = a + b,$$

$$(4) \quad \lim_{n=\infty} (u_n - v_n) = a - b,$$

$$(5) \quad \lim_{n=\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b,$$

oraz w razie, kiedy zachodzi nierówność

$$(6) \quad b \neq 0,$$

jeszcze i związek następujący:

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

Związki (1) i (2) wyrażają, że każdej dowolnie przyjętej, byle od zera większej liczbie  $\varepsilon$  odpowiadają dwie liczby całkowite  $N'$  i  $N''$  takie, żeby nierówność

$$u > N'$$

pociągała za sobą nierówność

$$|u_n - a| < \varepsilon,$$

a nierówność

$$n > N''$$

nierówność

$$|v_n - b| < \varepsilon.$$

Jeżeli, wyznaczwszy w sposób powyższy liczby  $N'$  i  $N''$ , oznaczmy przez  $N$  liczbę nie mniejszą od żadnej z liczb  $N'$  i  $N''$ , to nierówność

$$(8) \quad n > N$$

pociągać będzie za sobą jednocześnie nierówności

$$\left. \begin{aligned} |u_n - a| &< \varepsilon, \\ |v_n - b| &< \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Zatem każdej od zera większej liczbie  $\varepsilon$  odpowiada taka liczba całkowita  $N$ , żeby nierówność (8) pociągała za sobą jednocześnie nierówności (9). Ponieważ nierówności (9) pociągają za sobą nierówności

$$\left. \begin{aligned} |(u_n + v_n) - (a + b)| &< 2\varepsilon, \\ |(u_n - v_n) - (a - b)| &< 2\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

przeto nierówność (8) pociąga za sobą jednocześnie te ostatnie nierówności. Jeżeli więc oznaczymy przez  $\mu$  dowolnie przyjętą, byle od zera większą liczbę i wyznaczymy liczbę  $\varepsilon$  z równania

$$2\varepsilon = \mu,$$

a liczbę  $N$  tak, żeby nierówność (8) pociągała za sobą nierówności (9), a więc i nierówności (10), to nierówność (8) pociągać będzie za sobą nierówności

$$\left. \begin{aligned} |(u_n + v_n) - (a + b)| &< \mu, \\ |(u_n - v_n) - (a - b)| &< \mu. \end{aligned} \right\}$$

Uzyskany wynik wyraża właśnie, że równości (3) i (4) zachodzą rzeczywiście.

Żeby uzasadnić równość (5), zważmy najpierw, że na podstawie uwagi II-giej przy tw. I-szem paragrafu poprzedzającego istnieć będą ze względu na zbieżność ciągów

$$\begin{aligned} &u_1, u_2, u_3 \dots \\ \text{i} & \\ &v_1, v_2, v_3 \dots \end{aligned}$$

takie liczby  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$  i  $B''$ , żebyśmy mieli

$$\begin{aligned} A' &\leq u_n \leq A'', \\ B' &\leq v_n \leq B'' \end{aligned}$$

dla wszystkich wartości wskaźnika  $n$ . Jeżeli tedy oznaczymy przez  $L$  liczbę nie mniejszą od wartości bezwzględnej żadnej z liczb  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$  i  $B''$ , to przy wszystkich wartościach wskaźnika  $n$  zachodzić będą nierówności

$$|u_n| \leq L, \quad |v_n| \leq L. \quad (11)$$

Mamy oczywiście

$$u_n \cdot v_n - a \cdot b = (u_n - a) v_n + a (v_n - b),$$

skąd

$$|u_n v_n - ab| \leq |u_n - a| \cdot |v_n| + |a| \cdot |v_n - b|,$$

skąd znowu wynika związek <sup>1)</sup>

$$(12) \quad |u_n \cdot v_n - ab| \leq |u_n - a| \cdot L + |v_n - b| \cdot L$$

ze względu na drugi ze związków (11) oraz związek

$$|a| \leq L,$$

który znów wynika z pierwszego ze związków (11), równoważnego związkom

$$-L \leq u_n \leq L,$$

ze względu na uwagę III-cią przy tw. I-szem paragrafu poprzedzającego.

Ponieważ nierówność (8) pociąga za sobą nierówności (9), przeto ze względu na związek (12) nierówność (8) pociąga za sobą także nierówność

$$|u_n v_n - ab| < 2L\varepsilon.$$

Jeżeli więc, przyjąwszy dowolnie od zera większą, ale choćby jak małą liczbę  $\mu$ , wyznaczmy liczbę  $\varepsilon$  z równania

$$2L\varepsilon = \mu$$

i wyznaczmy następnie liczbę  $N$  tak, żeby nierówność (8) pociągała za sobą nierówności (9), to nierówność (8) pociągać będzie za sobą nierówność

$$|u_n v_n - ab| < \mu.$$

Zatem ciąg nieskończony, w którym wyraz rzędu  $n$  równa się iloczynowi

$$u_n \cdot v_n,$$

jest zbieżny, a granica jego równa się iloczynowi

$$a \cdot b.$$

Na tem właśnie polega treść równości (5), którą mieliśmy uzasadnić.

<sup>1)</sup> Por. z tw. II-giem § 92-go, str. 330.

Pozostaje do okazania, że w razie nierówności (6), zachodzi równość (7). Nierówność (6) stanowi oczywiście warunek konieczny, ażeby wogóle mogła zachodzić równość (7), ponieważ gdyby zachodziła równość

$$b = 0,$$

to dzielenie, zaznaczone we wzorze

$$\frac{a}{b},$$

byłoby niewykonalne lub prowadziłoby do wyniku nieoznaczonego. Zatem wyzwolenie się od warunku ograniczającego, polegającego na nierówności (6) jest rzeczą niemożliwą. Czy obok równości (1) i (2) nierówność (6), jest warunkiem wystarczającym, ażeby zachodziła równość (7)? Można by zarzucić, że warunek ten dostatecznym nie jest, albowiem chociażby nierówność (6) zachodziła, możliwem jest, żeby pewne wyrazy ciągu

$$v_1, v_2, v_3, \dots \quad (13)$$

równały się zeru, a w takim razie wzór

$$\frac{u_n}{v_n}$$

na wyraz rzędu  $n$ -tego ciągu

$$\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3}, \dots$$

którego granicą miałyby być liczba

$$\frac{a}{b},$$

stawalby się dla pewnych wartości wskaźnika  $n$  iluzorycznym czyli pozbawionym znaczenia. Na to odpowiadamy, że równość (7) wyraża, iż każdej od zera większej, ale choćby jak małej liczbie  $\mu$  odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia  $N$ , żeby nierówność (8) pociągająca sa sobą nierówność.

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} \right| < \mu. \quad (14)$$

Otóż, chociażby pewne wyrazy ciągu (13) równe były zeru, to i w takim razie, jeżeli tylko, poczynając od pewnej dostatecznie wielkiej wartości na  $n$ , wyraz

$$v_n$$

pozostaje stale od zera odmienny (a przekonamy się, że okoliczność ta w rzeczywistości zachodzi), nie jest rzeczą niemożliwą *a priori*, żeby wspomniana odpowiedniość pomiędzy wartościami liczb  $\mu$  i  $N$  zachodzić mogła.

Ponieważ ciąg (12) jest zbieżny a granica jego równa się liczbie  $b$ , przeto dowolnie przyjętej, byle od zera większej liczbie  $\eta$  odpowiadać będzie taka liczba całkowita  $N_1$ , żeby nierówność

$$(15) \quad n > N_1$$

pociągała za sobą nierówność

$$(16) \quad |v_n - b| < \eta.$$

Ze względu na nierówność (6), możemy oczywiście przyjąć na  $\eta$  pewną taką wartość, żebyśmy mieli

$$0 < \eta < |b|.$$

W dalszym ciągu założymy, żeśmy na  $\eta$  przyjęli pewną, nierówność poprzedzającą sprawdzającą wartość i wyznaczyli następnie  $N_1$  tak, żeby nierówność (15) pociągała za sobą nierówność (16). W takim razie ze względu na związek

$$v_n = (v_n - b) + b,$$

nierówność (15) pociągać będzie za sobą nierówność

$$\text{a więc} \quad |v_n| \geq |b| - |v_n - b|,$$

$$(17) \quad |v_n| > l,$$

gdzie przyjęliśmy

$$l = |b| - \eta.$$

Zważmy obecnie, że jeżeli przy pewnej wartości na  $N$  nierówność (8) pociąga za sobą nierówności (9), to przy każdej większej wartości na  $N$ , nierówność (8) niezawodnie także pociągać będzie za sobą nierówności (9). Wobec tego możemy założyć, co też uczynimy, że wyznaczając liczbę  $N$  z warunku, żeby nierówność (8) pociągała za sobą nierówności (9), uwzględniony został jeszcze warunek dodatkowy, polegający na nierówności

$$(18) \quad N \geq N_1.$$

W dalszym ciągu założymy, że wskaźnik  $n$  sprawdza nierówność (8). W takim razie ze względu na nierówność (18) liczba  $n$  sprawdzać będzie nierówność (15), a ponieważ nierówność ta pociąga za sobą nierówność (17), z której znów wynika nierówność

$$v_n \neq 0,$$

przeto iloraz

$$\frac{u_n}{v_n}$$

będzie przyjmował przy rozważanych wartościach wskaźnika  $n$ , wartości oznaczone w zupełności. Mamy

$$\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} = \frac{u_n b - v_n a}{v_n b},$$

skąd

$$\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} = \frac{b(u_n - a) + a(b - v_n)}{v_n b}.$$

Z równości poprzedzającej wynika nierówność

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{A |u_n - a| + A |v_n - b|}{|v_n| \cdot |b|}, \quad (19)$$

gdzie  $A$  oznacza liczbę nie mniejszą od żadnej z liczb

$$|a| \quad \text{ i } \quad |b|.$$

Na podstawie nierówności (17) i nierówności

$$|b| > l,$$

która wynika z definicji liczby  $l$ , mamy z nierówności (19) i (9),

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{2A\varepsilon^1}{l^2}$$

pod tym jedynym warunkiem, że zachodzi nierówność (8). Ponieważ możemy, wyznaczywszy liczbę  $\varepsilon$  z równości

$$\frac{2A\varepsilon}{l^2} = \mu,$$

tak wyznaczyć liczbę  $N$ , żeby zachodziła nierówność (18), a nadto, żeby nierówność (8) pociągała za sobą nierówności (9), przeto stwier-

<sup>1)</sup> Por. tw. II-cie, str. 331.

dzamy, że każdej od zera większej, ale choćby jak małej liczbie  $\mu$  odpowiada taka wartość liczby  $N$ , żeby nierówność (8) pociągała za sobą nierówność (14). Dowiedliśmy więc równości (7), która pozostawała jeszcze do uzasadnienia.

Na podstawie twierdzenia poprzedzającego możemy oczywiście ustawić ciąg nieskończony zbieżny, którego granica równałaby się jakiegokolwiek możliwej kombinacyi granic ciągów zbieżnych danych drogą czterech działań zasadniczych.

Posługując się wyrażeniem możliwa kombinacya granic ciągów danych, pragnęliśmy zaznaczyć, że mieliśmy na myśli takie kombinacje granic ciągów danych, które byłyby rzeczywiście jednoznacznie wykonalne, których wykonanie zatem nie wymagałoby wyznaczania ilorazów w przypadkach, kiedy dzielnik równa się zeru.

