

do dodawania drogą podstawienia zamiast odjemnika symetrycznego mu wektora.

Z uzyskanych wyników możemy wyprowadzić użyteczne prawidło do wyznaczania różnicy dwóch wektorów, których początki zlewają się ze sobą. Istotnie, oznaczmy przez \overline{OA} i \overline{OB} dwa wektory o wspólnym początku O , mamy tedy

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{BO} = \overline{BO} + \overline{OA}$$

na podstawie wyników uzyskanych poprzednio, a ponieważ mamy

$$\overline{BO} + \overline{OA} = \overline{BA},$$

przeto mamy także

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}.$$

Równość ta wyraża twierdzenie następujące:

I. *Jeżeli elementy, stanowiące odpowiednio odjemną i odjemnik pewnej różnicy, są współpoczątkowymi wektorami, to reszta równa się wektorowi, którego początkiem jest kraniec odjemnika, a kraniec — kraniec odjemnej.*

§ 110. **Pojęcie kierunku wektora i pojęcie osi.** Uważajmy dwa wektory właściwe położone na prostych równoległych lub zlewających się ze sobą \overline{AB} i $\overline{A'B'}$ i wyznaczmy trzeci wektor \overline{AB} z równania

$$\overline{AB_1} = \overline{A'B'}. \quad (1)$$

Punkt B_1 położony będzie na prostej AB i zachodzić będzie oczywiście jeden z dwóch wykluczających się wzajemnie przypadków następujących:

- 1°. Punkt A nie jest położony pomiędzy punktami B i B_1
- 2°. Punkt A jest położony pomiędzy punktami B i B_1 .

W pierwszym przypadku orzekamy, że kierunek wektora $\overline{A'B'}$ równy jest kierunkowi wektora \overline{AB} , a w drugim — że kierunek wektora $\overline{A'B'}$ przeciwny jest kierunkowi wektora \overline{AB} .

Pomiędzy wszystkimi wektorami, z których każdy ma kierunek równy oznaczonemu wektorowi właściwemu \overline{AB} , znajduje się oczywiście w myśl zasad rozdziału II-go i sam wektor \overline{AB} . Zatem, żeby powyższą definicję usprawiedliwić, należy tylko uzasadnić twierdzenia następujące:

A) Jeżeli kierunek pewnego wektora właściwego $\overline{A'B'}$ równy jest kierunkowi pewnego wektora właściwego \overline{AB} , to kierunek wektora \overline{AB} równy jest kierunkowi wektora $\overline{A'B'}$.

B) Jeżeli kierunki dwóch wektorów właściwych $\overline{A'B'}$ i $\overline{A''B''}$ równe są odpowiednio kierunkowi pewnego wektora właściwego \overline{AB} , to kierunki tych wektorów są pomiędzy sobą równe.

Żeby uzasadnić twierdzenie A, zachowajmy oznaczenia poprzedzające i uważajmy wektor $\overline{A'B'_1}$, określony równaniem

$$(2) \quad \overline{A'B'_1} = \overline{AB}.$$

Mamy twierdzenie następujące: jeżeli trzy proste (Δ_1) , (Δ_2) i (Δ_3) , pomiędzy sobą równoległe, są położone w tej samej płaszczyźnie, a dwie proste (D) i (D') przecinają odpowiednio prostą (Δ_1) w punktach P_1 i P'_1 , prostą (Δ_2) w punktach P_2 i P'_2 , a prostą (Δ_3) w punktach P_3 i P'_3 , jeżeli nadto punkt P_i , gdzie wskaźnik i oznacza pewną jedną z liczb 1, 2, 3, jest tym z punktów P_1, P_2, P_3 , który położony jest pomiędzy dwoma pozostałymi punktami tego układu, to pośród punktów P'_1, P'_2, P'_3 punkt P'_i jest tym punktem, który położony jest pomiędzy dwoma pozostałymi.

Otóż jeżeli proste AB i $A'B'$ nie zlewają się ze sobą, to na podstawie równości (1) i (2) proste

$$AA', B_1B' \text{ i } BB'_1$$

są pomiędzy sobą równoległe (§ 108, tw. III). Z drugiej strony, jeżeli kierunek wektora $\overline{A'B'}$ jest równy albo jest przeciwny kierunkowi wektora \overline{AB} , to punkt B'_1 leży w każdym razie na prostej $A'B'$.

Zatem na podstawie wspomnianego przed chwilą twierdzenia, jeżeli kierunek wektora $\overline{A'B'}$ równa się kierunkowi wektora \overline{AB} , jeżeli więc punkt B_1 położony jest na prostej AB , a punkt A nie jest położony pomiędzy punktami B i B_1 , to punkt B'_1 leży na prostej $A'B'$, a punkt A' nie jest położony pomiędzy punktami B' i B'_1 , skąd wynika, że kierunek wektora \overline{AB} rzeczywiście równa się kierunkowi wektora $\overline{A'B'}$. Ale może się zdarzyć, że wektory \overline{AB} i $\overline{A'B'}$ leżą na tej samej prostej (Δ) . W takim razie przyjmujemy w przestrzeni jakikolwiek, na prostej (Δ) nie położony, punkt X w przestrzeni i wyznaczamy punkty Y i Y' z równań

$$\overline{XY} = \overline{AB}$$

$$\overline{XY'} = \overline{A'B'}.$$

Punkty X, Y i Y' oczywiście położone będą na równoległej (D) , poprowadzonej przez punkt X do prostej (Δ) . Na podstawie ogólnego twierdzenia z teorii równoległych, na które powoływaliśmy

się przed chwilą, stwierdzamy, że w razie kiedy punkt A pomiędzy punktami B i B_1 położony nie jest, punkt X nie jest położony pomiędzy punktami Y i Y' , skąd wynika, na podstawie tegoż twierdzenia, że i punkt A' pomiędzy punktami B' i B'_1 w rozważanym przypadku położonym być nie może. Zatem nawet i w razie, kiedy wektory \overline{AB} i $\overline{A'B'}$ położone są na tej samej prostej, równość kierunku wektora $\overline{A'B'}$ kierunkowi wektora \overline{AB} pociąga za sobą równość kierunku wektora \overline{AB} kierunkowi wektora $\overline{A'B'}$.

Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie A .

Żeby wyrazić, że dwa wektory właściwe mają równe pomiędzy sobą kierunki, orzekać będziemy, że wektory te są współkierunkowe. Równe pomiędzy sobą wektory właściwe są oczywiście zawsze współkierunkowymi wektorami.

Przechodząc do uzasadnienia twierdzenia B , zachowujemy oznaczenia, w których twierdzenie to wysłowiliśmy, i wyznaczamy wektory $\overline{AB'_1}$ i $\overline{AB'_2}$ z równości

$$\overline{AB'_1} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AB'_2} = \overline{A''B''}. \quad (3)$$

Ponieważ wektor $\overline{A'B'}$ i wektor \overline{AB} są wektorami współkierunkowymi, przeto punkt B'_1 położony będzie na prostej AB po tej stronie punktu A , po której znajduje się B . Z przyczyny analogicznej punkt B'_2 także położony będzie na prostej AB po tej stronie punktu A , po której znajduje się punkt B . Zatem punkty B'_1 i B'_2 położone będą po tej samej stronie punktu A na prostej AB . Z tego wynika, że wektory $\overline{A''B''}$ i $\overline{AB'_1}$ będą współkierunkowymi wektorami. Z tego znów wynika, że punkt B'_2 wyznaczony z równości

$$\overline{A''B''} = \overline{AB'_1}, \quad (4)$$

położony będzie na prostej $A''B''$ po tej stronie punktu A'' , po której położony jest punkt B'' , a ponieważ z pierwszej z równości (3) i z równości (4) wynika równość

$$\overline{A'B'} = \overline{A''B''},$$

przeto wektory $\overline{A'B'}$ i $\overline{A''B''}$ będą współkierunkowymi wektorami. Udowodniliśmy więc i twierdzenie B .

Z definicji równości kierunków dwóch wektorów właściwych i z twierdzenia A wynika natychmiast, że dwa wektory właściwe, położone na prostych równoległych albo na tej samej prostej, są albo współkierunkowymi wektorami, albo wektorami kierunków

przeciwnych; odwrotnie, dwa wektory współkierunkowe, albo kierunków przeciwnych, położone być mogą tylko na prostych równoległych lub zlewających się ze sobą. Dwa wektory właściwe, pomiędzy sobą symetryczne, są oczywiście zawsze wektorami kierunków przeciwnych. Jeżeli każdy z pewnych dwóch wektorów właściwych $\overline{A'B'}$ i $\overline{A''B''}$ jest kierunku przeciwnego pewnemu wektorowi właściwemu \overline{AB} , to wektory te są współkierunkowymi wektorami, albowiem natychmiast spostrzegamy, że każdy z nich jest współkierunkowy wektorowi \overline{AB}_1 , symetrycznemu wektorowi \overline{AB} .

Wektor niewłaściwy uważamy za wektor pozbawiony kierunku.

Jeżeli na podstawie oznaczonej definicji (D) z dwóch dowolnie przyjętych elementów w pewnym zbiorze (Z) pewien jeden zawsze poprzedza drugi, jeżeli nadto definicja (D) ustawiona jest tak, żeby element, poprzedzający pewien drugi element, który znów poprzedza pewien trzeci element, zawsze poprzedzał ten trzeci element, to wówczas orzekamy, że na podstawie definicji (D) elementy zbioru (Z) zostały uszeregowane.

Orzeczenie, iż w pewnym uszeregowanym zbiorze z dwóch elementów pewien element e poprzedza drugi element e' wyraża to samo, co orzeczenie, iż element e' następuje po elemencie e . Tę samą myśl wyrażamy także, orzekając, że element e położony jest przed elementem e' , albo, że element e' położony jest za elementem e .

Punkty jakiegokolwiek oznaczonej prostej (Δ) możemy uszeregować w szczególności drogą przyjęcia definicji następującej: orzeczenie, że z dwóch jakiegokolwiek nie zlewających się ze sobą punktów prostej (Δ) jeden P poprzedza drugi punkt Q , wyraża, że wektor \overline{PQ} jest współkierunkowy z pewnym oznaczonym wektorem \overline{AB} , który oczywiście położony być może tylko albo na prostej (Δ), albo na pewnej prostej, równoległej do prostej (Δ).

Istotnie, jakiegokolwiek dwa odmienne od siebie punkty prostej (Δ) oznaczylibyśmy przez X i Y , jeden z wektorów \overline{XY} i \overline{YX} , ale jeden z nich tylko będzie wektorem współkierunkowym z wektorem \overline{AB} , zatem z punktów X i Y jeden położony będzie przed drugim. Z drugiej strony, jeżeli założymy, że pewien punkt P prostej (Δ) poprzedza pewien punkt Q , który znów poprzedza pewien punkt R , to w takim razie wektory \overline{PQ} i \overline{QR} będą wektorami współkierunkowymi z wektorem \overline{AB} ; zatem wektory \overline{QP} i \overline{QR} będą wektorami o kierunkach przeciwnych, skąd znów wynika, że punkt Q położony będzie pomiędzy punktami P i R ; zatem we-

który \overrightarrow{PQ} i \overrightarrow{PR} będą wektorami współkierunkowymi, a ponieważ wektory \overrightarrow{PQ} i \overrightarrow{AB} są też wektorami współkierunkowymi, przeto wektory \overrightarrow{PR} i \overrightarrow{AB} będą także wektorami współkierunkowymi. Stąd zaś wynika, że punkt P poprzedzać będzie punkt R . Rozważania poprzedzające stanowią dowód na to, że punkty prostej mogą rzeczywiście być uszeregowane na podstawie powyższej definicji.

Akt uszeregowania punktów prostej w sposób dopiero co omówiony, zowie się skierowaniem lub nadaniem oznaczonego kierunku rozważanej prostej, a pojęcie, powstające przez takie uszeregowanie punktów prostej, zowie się osią. Punkty prostej uważamy tedy za punkty osi, a wzajemny stosunek osi i prostej, której punkty stanowią punkty osi, wyrażamy, orzekając, że rozważana oś położona jest na rzeczonej prostej. Żeby określić oznaczoną oś, dostatecznem jest oczywiście oznaczyć dwa punkty tej osi, nadmieniając przytem, który z nich uważany ma być za punkt położony przed drugim. Oś określoną przez to, iż oś ta przechodzi przez pewne dwa punkty A i B , z których punkt A , uważany ma być za punkt położony przed punktem B , przedstawiamy przez symbol AB , a więc przez symbol, którym posługujemy się także do przedstawienia prostej nieograniczonej, przechodzącej przez punkty A i B . Należy jednak zaznaczyć, że w przypadku, kiedy chodzi o przedstawienie prostej, przechodzącej przez punkty A i B , symbole AB i BA mogą służyć bez różnicy do oznaczenia tej prostej; inny jest stan rzeczy w razie, kiedy chodzi o oś przechodzącą przez punkty A i B : oczywiście istnieją dokładnie dwie osie, przechodzące przez punkty A i B , jedną z tych osi przedstawia symbol AB a drugą symbol BA .

Orzeczenie, iż dwie osie albo oś i prosta są pomiędzy sobą równoległe, wyraża, że te dwa twory geometryczne położone są na tej samej płaszczyźnie i punktów wspólnych nie posiadają.

Uważajmy jakąkolwiek oś (T) i oznaczmy przez (Z) zbiór wszystkich wektorów położonych na osi (T) , które czynią zadość temu warunkowi, ażeby początek każdego z nich był punktem położonym na osi (T) przed punktem, stanowiącym koniec tegoż wektora.

Na podstawie definicji osi wszystkie wektory zbioru (Z) współkierunkowe będą z pewnym wektorem właściwym i będą z tej przyczyny wektorami współkierunkowymi pomiędzy sobą. Jeżeli oznaczmy przez AB jakikolwiek wektor właściwy, położony na

osi (T) albo na jakiejkolwiek prostej równoległej do osi (T'), to zachodzi zawsze jeden z przypadków następujących:

1°. Wektor \overline{AB} i wektory zbioru (Z) są współkierunkowymi pomiędzy sobą wektorami.

2°. Wektor \overline{AB} i wektory zbioru (Z) są wektorami o przeciwnych pomiędzy sobą kierunkach.

W pierwszym przypadku orzekamy, że wektor \overline{AB} i oś (T) mają ten sam kierunek lub są tworami współkierunkowymi, a w drugim — że wektor \overline{AB} i oś (T') są przeciwnych pomiędzy sobą kierunków.

Zachowując poprzednie znaczenie dla symbolów (T') i (Z), uważajmy drugą oś (T'') i oznaczmy przez (Z') zbiór wszystkich na osi (T'') położonych i z tą osią współkierunkowych wektorów. Zatem logiczny stosunek zbioru (Z') do osi (T'') jest taki, jakim jest logiczny stosunek zbioru (Z) do osi (T).

Może się wydarzyć, że każdy wektor każdego ze zbiorów (Z) i (Z') współkierunkowy jest z każdym wektorem drugiego zbioru; okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że osie (T) i (T'') są współkierunkowe, albo są tych samych kierunków.

Żeby zaś wyrazić, iż każdy wektor każdego ze zbiorów (Z) i (Z') jest kierunku przeciwnego kierunkowi każdego wektora drugiego zbioru, orzekamy, że osie (T) i (T'') są kierunków przeciwnych.

Oznaczmy przez A , B i C trzy twory geometryczne, z których każdy jest albo wektorem właściwym, albo osią. W takim razie należą do natychmiastowych następstw uzyskanych poprzednio twierdzeń twierdzenia, które możemy wyrazić w sposób następujący:

Jeżeli twory A i B oraz twory B i C są współkierunkowymi tworami, to twory A i C są także tworami współkierunkowymi.

Jeżeli twory A i B oraz twory B i C są tworami o kierunkach pomiędzy sobą przeciwnych, to i w takim razie twory A i C są tworami współkierunkowymi.

Jeżeli twory A i B są tworami współkierunkowymi, a twory B i C tworami przeciwnych pomiędzy sobą kierunkach, to twory A i C są przeciwnych sobie kierunków.

§ 111. Problem mierzenia wektorów położonych na oznaczonej prostej lub na prostych, tej prostej równoległych. — Oznaczmy przez (Δ) oznaczoną prostą, a przez (V) zbiór wszystkich wektorów, z których każdy położony jest na prostej (Δ) lub

na prostej, do prostej (Δ) równoległej. Po nadaniu pewnego, dowolnie przyjętego kierunku prostej (Δ) uzyskamy pewną oś, którą przedstawiać będziemy przez symbol $x'x$, oznaczając przez x' pewien punkt tej osi, położony przed pewnym innym punktem x tejże osi. Określiwszy oś $x'x$, możemy nadać zbiorowi (V), który jest już zbiorem wielkości w znaczeniu szerszym, charakter zbioru wielkości w znaczeniu ściślejszym, uzupełniając reguły porównywania ilościowego elementów zbioru (V) przez wprowadzenie definicji następującej: orzeczenie, iż pewien wektor v' zbioru (V) mniejszy jest od pewnego innego wektora v tegoż zbioru wyraża, że różnica

$$v - v'$$

równa się wektorowi właściwemu, współkierunkowemu z osią $x'x$. Ponieważ, jakiegokolwiek nierówne pomiędzy sobą wektory zbioru (V) oznaczylibyśmy przez w' i w , różnice

$$w' - w \quad \text{i} \quad w - w'$$

przedstawiają oznaczone wektory właściwe, pomiędzy sobą symetryczne, a więc kierunków przeciwnych, położone na prostej (Δ) albo na prostych do prostej (Δ) równoległych, przeto pewna jedna z powyższych różnic równać się będzie wektorowi współkierunkowemu osi $x'x$, a zatem na podstawie poprzedzającej definicji, zgodnie z zasadami rozdziału II-go, pewien jeden z dwóch nierównych pomiędzy sobą wektorów zbioru (V) zawsze mniejszy będzie od drugiego.

Zatem, żeby ze stanowiska zasad rozdziału II-go usprawiedliwić rozważaną definicję, należy tylko dowieść, że związki

$$v < v' \quad \text{i} \quad v' < v'' \tag{1}$$

pomiędzy trzema wektorami v , v' i v'' zbioru (V) pociągają za sobą związek

$$v < v''.$$

Spostrzegamy z łatwością, iż możemy bez szkody dla ogólności założyć, że początki rozważanych wektorów zlewają się z oznaczonym punktem O osi $x'x$. Oznaczając tedy przez A , A' i A'' końce wektorów v , v' i v'' , mamy na podstawie tw. I-go § 109-go równości

$$\overline{OA''} - \overline{OA'} = \overline{A'A''} \quad \text{i} \quad \overline{OA'} - \overline{OA} = \overline{AA'}.$$

Punkty A , A' i A'' oczywiście położone są na osi $x'x$, a na podstawie nierówności (1) ze związków poprzedzających wynika, że punkt A położony jest na osi $x'x$ przed punktem A' , a punkt A' przed punktem A'' .

Zatem punkt A położony jest na osi $x'x$ przed punktem A'' . Z tego znów wynika, że wektor AA'' jest współkierunkowy z osią $x'x$, a ponieważ mamy

$$\overline{OA''} - \overline{OA} = \overline{AA''},$$

przeto mamy

$$\overline{OA} < \overline{OA''}$$

czyli

$$v < v'',$$

o co właśnie chodziło.

Zbiór wektorów (V) jest na podstawie wprowadzonych definicji ciągłym zbiorem wielkości względnych.

Upewnijmy się najpierw, że zbiór (V) jest zbiorem wielkości względnych czyli zbiorem wielkości, sprawdzającym warunki, wyszczególnione pod C w § 106-tym. Zbiór (V) sprawdza oczywiście 1-szy, 2-gi i 4-ty ze wspomnianych warunków. Chodzi więc tylko o warunki 3-ci, 5-ty i 6-ty. Załóżmy, że dwa wektory v' i v'' sprawdzają nierówność

$$(1) \quad v' < v''.$$

Na podstawie znaczenia, jakie ma ten związek na podstawie dopiero co ustawionej definicji, mamy

$$v'' = v' + d,$$

oznaczając przez d pewien wektor współkierunkowy z osią $x'x$. Mamy więc

$$v + v'' = v + (v' + d) = (v + v') + d,$$

jakikolwiek wektor zbioru (V) oznaczylibyśmy przez v . Zatem

$$v + v'' - (v + v') = d,$$

skąd ostatecznie

$$(2) \quad v + v' < v + v'',$$

albowiem, jakeśmy zaznaczyli przed chwilą, wektor d współkierunkowy jest z osią $x'x$. Przeto nierówność (1) pociąga za sobą nierówność (2). Zatem zbiór (V) posiada rzeczywiście trzecią własność ciągłego zbioru wielkości. Zbiór ten posiada i piątą własność takiego zbioru.

Istotnie, oznaczmy przez \overline{AB} jakikolwiek wektor zbioru (V). W przypadku szczególnym, kiedy wektor \overline{AB} jest wektorem niewłaściwym, kiedy więc punkty A i B zlewają się ze sobą, mamy

$$\overline{AB} = \overline{AB} \cdot n,$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą i dodatnią oznaczylibyśmy przez n , albowiem w rozważanym przypadku wektor \overline{AB} równa się modułowi dodawania. Załóżmy więc, że wektor \overline{AB} jest wektorem właściwym i, oznaczając przez n dowolnie przyjętą liczbę całkowitą dodatnią, podzielimy odcinek prostoliniowy, ograniczony punktami A i B , na tyle równych części, ile wynosi liczba n . Oznaczając tedy przez B' najbliższy punktowi A punkt podziału, mamy oczywiście

$$\overline{AB} = \overline{AB'} \cdot n.$$

Zatem zbiór (V) posiada rzeczywiście własność, o którą chodzi.

Pozostaje tylko do udowodnienia, że zbiór (V) sprawdza także i warunek 6-ty. Spostrzegamy natychmiast, że zbiór wszystkich tych elementów zbioru (V), które większe są od modułu dodawania, zlewa się ze zbiorem wszystkich wektorów właściwych, współkierunkowych z osią $x'x$. Zatem chodzi o to, czy zachodzi okoliczność następująca: jeżeli tylko pewien wektor a zbioru (V) jest wektorem właściwym, współkierunkowym z osią $x'x$, to jakikolwiek wektor zbioru (V) oznaczylibyśmy przez v , zawsze istnieje będzie liczba całkowita i dodatnia n , sprawdzająca nierówność

$$a \cdot n > v.$$

Jeżeli wektor v jest wektorem niewłaściwym albo wektorem, którego kierunek jest kierunkowi osi $x'x$ przeciwny, to powyższa nierówność oczywiście zachodzi przy każdej od zera większej wartości na n . Chodzi więc tylko o zbadanie przypadku, w którym wektor v jest z osią $x'x$ współkierunkowy. Możemy oczywiście założyć bez szkody dla ogólności, że pewien punkt O osi $x'x$ jest wspólnym początkiem wektorów a i b .

Oznaczmy przez A_1 i B odpowiednio końce rozważanych wektorów i uważajmy na osi $x'x$ skończony ciąg punktów

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \quad (1)$$

określony równościami

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \overline{OA_1} \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Wszystkie punkty ciągu (1) położone będą po tej samej stronie punktu O , mianowicie po tej, po której leży punkt B , a nadto przy każdej wartości całkowitej i dodatniej na i , od $i=1$ do $i=n-1$, punkt A_i położony jest na odcinku, ograniczonym przez punkty O i A_n .

Ponieważ przyjmujemy za pewnik (str. 23), że o ile chodzi o odcinki prostoliniowe, to postulat Archimedesza zachodzi, przeto istnieje będzie taka wartość na liczbę całkowitą i dodatnią n , przy której odcinek, ograniczony punktami O i A_n , większy będzie od odcinka, ograniczonego punktami O i B . Ale w takim razie punkty O i A_n położone będą po różnych stronach punktu B , skąd wynika, że wektory $\overrightarrow{BA_n}$ i \overrightarrow{BO} będą kierunków przeciwnych pomiędzy sobą. Ponieważ zaś wektor \overrightarrow{BO} jest kierunku przeciwnego kierunkowi osi x' , przeto wektor $\overrightarrow{BA_n}$ jest z osią tą współkierunkowy. Mamy więc

$$\overrightarrow{OA_n} > \overrightarrow{OB},$$

a ponieważ mamy oczywiście

$$\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1} \cdot n,$$

przeto istnieje taka wartość całkowita i dodatnia na n , przy której mamy

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot n > \overrightarrow{OB},$$

czyli

$$a \cdot n > b.$$

Dowiedliśmy więc, że dla zbioru (V) postulat Archimedesza rzeczywiście zachodzi.

Obecnie dowiedliśmy już, że zbiór (V) jest zbiorem wielkości względnych. Możemy więc dla zbioru tego rozwiązać bezpośrednio problem mierzenia elementów jego na podstawie ogólnej teorii, wyłożonej pod C w paragrafie poprzedzającym.

Wynik, do którego w taki sposób dochodzimy jest następujący: żeby pewien wektor u zbioru (V) uważany mógł być za mianownik stosunku dwóch wektorów rozważanego zbioru, koniecznem jest i wystarczającym, żeby wektor u był wektorem właściwym; jeżeli warunek ten jest spełniony, to stosunek

$$\frac{v}{u},$$

gdzie v oznacza jakikolwiek wektor zbioru (V) , równa się w przypadku szczególnym, kiedy wektor v jest wektorem niewłaściwym, liczbie zero, a w każdym innym przypadku — liczbie rzeczywistej, dodatniej lub ujemnej, zależnie od tego, czy kierunki wektorów v i u są równe lub przeciwne pomiędzy sobą, a w każdym razie, co do wartości bezwzględnej, — równej liczbie dodatniej, która przedstawia stosunek odcinka prostoliniowego, ograniczonego kraniecami wektora v , do odcinka, ograniczonego kraniecami wektora u .

Opierając się na tw. I-szym § 64-go, stwierdzamy z łatwością, że zbiór wektorów (V) jest rzeczywiście zbiorem ciągłym wielkości względnych.

Przy mierzeniu wektorów zbioru (V) dostosowujemy zwykle do siebie wybór jednostki miary i kierunek osi $x'x$ w taki sposób, żeby wektor, przyjęty za jednostkę, był współkierunkowy z osią $x'x$. W takim razie miara wektora właściwego równa się oczywiście liczbie dodatniej lub ujemnej, zależnie od tego, czy kierunek wektora tego jest taki, jak kierunek osi $x'x$, czy też kierunkowi osi tej przeciwny.

Opierając się na uzyskanych wynikach, łatwo uzasadnić możemy dla zastosowań analizy matematycznej do geometrii podstawowe twierdzenie następujące:

V. Jeżeli oznaczymy przez A_1, A_2, \dots, A_n układ tyłu, na pewnej prostej (Δ) położonych punktów, ile wynosi jakakolwiek liczba całkowita n ($n \geq 2$), jeżeli nadto uważać będziemy symbol $\overline{A_i A_j}$, gdzie oznaczyliśmy przez i i j dwie odmienne pomiędzy sobą liczby całkowite z układu

$$1, 2, 3, \dots, n,$$

za symbol w sposób dopiero co omówiony oznaczonej miary wektora, którego początkiem jest punkt A_i a kraniec A_j , przyjmując za jednostkę oznaczony wektor położony na prostej (Δ) , to w takim razie mamy

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} + \overline{A_n A_1} = 0. \quad (1)$$

Istotnie, interpretując w sumie

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} + \overline{A_n A_1}$$

symbole postaci $\overline{A_i A_j}$, według reguł przyjętych wyżej do oznaczenia wektorów, przekonamy się, że suma poprzedzająca równa się wektorowi niewłaściwemu. Zatem suma miar składników rozważanej sumy

równa się liczbie zero. Otóż, gdy interpretujemy składniki wspomnianej sumy w sposób określony w twierdzeniu, to równość (1) właśnie wyraża, że okoliczność poprzedzająca zachodzi. Uzasadniiliśmy więc twierdzenie, o które chodziło.

§ 112. Gdybyśmy, rozważając zbiór (V) wszystkich wektorów, położonych na pewnej prostej (Δ) albo na prostych równoległych prostej (Δ), nadali charakter zbioru wielkości w znaczeniu ściślejszem w sposób omówiony wyżej i postawili problem mierzenia wektorów zbioru (V) w tej samej postaci jak poprzednio, a więc przy zastosowaniu zasad § 102-go, to w takim razie, gdybyśmy nie posiadali ogólnej teorii liczb rzeczywistych, a tylko teorię liczb bezwzględnych, stwierdzilibyśmy oczywiście, że zbiór liczb bezwzględnych nie wystarcza do rozwiązania tego problemu. Do tego samego wyniku doszlibyśmy, rozważając jakikolwiek inny zbiór wielkości względnych. Stawiając sobie następnie problem rozszerzenia zbioru liczb bezwzględnych w taki sposób, ażebyśmy po dokonaniu tego rozszerzenia uzyskali środek do rozwiązania problemu mierzenia wektorów zbioru (V), przywiedzeni bylibyśmy do ogólnego pojęcia liczby rzeczywistej. Tej drogi jednak nie obraliśmy z przyczyn następujących. Z jednej strony i w takim razie nie moglibyśmy pominąć teorii czysto arytmetycznej liczb rzeczywistych, ponieważ uznaliśmy, że teoria wszelkiego rodzaju liczb musi być w postaci ostatecznej ugruntowana wyłącznie na podstawach czysto arytmetycznych. Zatem wspomniana droga żmudniejsza byłaby od tej, którą obraliśmy. Z drugiej znów strony nie sądzimy, ażeby omawiana droga zalecała się ze stanowiska pedagogicznego, a to już z tego powodu, że nie odpowiadałaby historycznemu przebiegowi rozwoju teorii liczb względnych, podczas gdy metoda, którą przyjęliśmy, choć także odbiega od historycznego rozwoju pojęcia liczb względnych, jest jednak o wiele bardziej zbliżona do ewolucji pojęcia tego od tamtej.
