

wyrażał to, co wyrażał przed rozważaną zmianą związek

$$e > e'.$$

W paragrafie następującym podamy najbardziej typowy przykład ciągłego zbioru wielkości względnych. Przykład ten omówimy bardzo szczegółowo ze względu na jego wielkie znaczenie naukowe.

§ 107. Pojęcie wektora. Wektorem zwiemy oznaczone położenie w przestrzeni zajmujący odcinek prostoliniowy, którego jeden punkt końcowy, zwany początkiem wektora, został w jakikolwiek sposób wyróżniony od drugiego punktu końcowego, zwanego w takim razie końcem.

Oznaczając przez jakikolwiek symbol A początek wektora, a przez inny symbol B jego koniec, przyjmujemy za symbol samego wektora symbol

$$\overline{AB}.$$

Na podstawie definicyi tej symbole

$$\overline{AB} \text{ i } \overline{BA},$$

gdzie A i B są symbolami oznaczonych punktów, przedstawiają wektory pomiędzy sobą odmienne, jakkolwiek rozważane symbole, kiedy uważamy je za symbole odcinków prostoliniowych, oznaczają tenże sam odcinek.

Początek i koniec wektora obejmujemy wspólną nazwą jego punktów końcowych. Za zbiór wszystkich punktów oznaczonego wektora v uważamy zbiór wszystkich punktów odcinka prostoliniowego a , którego punkty końcowe zlewają się z punktami końcowymi rozważanego wektora. Długość odcinka prostoliniowego a zowie się długością wektora.

Wektor bywa często używany jako obraz geometryczny przemieszczenia prostoliniowego punktu, a w takim razie przyjmujemy za początek wektora początkowe położenie przemieszczanego punktu, a za koniec — położenie końcowe tegoż punktu.

Żeby wyrazić, iż jeden i drugi punkt końcowy oznaczonego wektora położone są na pewnej prostej nieograniczonej, orzekamy, że rozważany wektor położony jest na tej prostej. Żeby wyrazić, że prosta, na której położony jest pewien wektor leży w pewnej płaszczyźnie, orzekamy, że rozważany wektor położony jest w tej płaszczyźnie.

Na podstawie przyjętej definicyi, początek i koniec oznaczonego wektora muszą być odmiennymi pomiędzy sobą punktami.

Jednak w interesie nadania teorii wektorów najodpowiedniejszej postaci, umawiamy się, że zaliczać będziemy do klasy przedmiotów, zwanych wektorami, także pojedyncze punkty, uważając w takim razie punkt jednocześnie za początek i koniec tego samego wektora. Żeby uwydatnić tę okoliczność, iż wektor, którego początek i koniec zlewają się ze sobą, nie jest objęty podaną na początku definicyą wektora, nadajemy wektorowi takiemu nazwę wektora niewłaściwego w przeciwieństwie do nazwy wektorów właściwych, którą dajemy wszystkim innym wektorom.

§ 108. Żeby określić treść orzeczenia, iż dwa wektory są pomiędzy sobą równe, i tem samem nadać zbiorowi wszystkich wektorów charakter zbioru wielkości w znaczeniu szerszem, zważmy, że przy rozważaniu dwóch wektorów v i v' zawsze wydarzyć się musi jeden z przypadków następujących:

1^o. Każdy z wektorów v i v' jest wektorem właściwym, a proste, na których wektory te położone są, nie zlewają się ze sobą.

2^o. Każdy z wektorów v i v' jest wektorem właściwym, ale proste, na których wektory te są położone, zlewają się ze sobą.

3^o. Jeden przynajmniej z wektorów v i v' jest wektorem niewłaściwym.

W pierwszym przypadku równość

$$(1) \quad v = v'$$

wyraża, że zachodzą dwie okoliczności następujące:

A) Proste, na których wektory te są położone, są pomiędzy sobą równoległe.

B) Prosta, przechodząca przez początki rozważanych wektorów, i prosta, przechodząca przez ich końce, są pomiędzy sobą równoległe.

W drugim przypadku równość (1) wyraża, że istnieje trzeci wektor właściwy v'' , nie położony na prostej, na której położone są wektory v i v' , równy w znaczeniu dopiero co określonym każdemu z wektorów v i v' .

W trzecim przypadku równość (1) wyraża, że każdy z wektorów v i v' jest wektorem niewłaściwym.

Na podstawie definicyi powyższej równość (1) oczywiście wyraża to samo, co równość

$$v' = v,$$

a pomiędzy wektorami równymi oznaczonemu wektorowi znajduje się oczywiście i sam ten wektor.

Zatem, żeby wspomnianą definicyę usprawiedliwić ze stanowiska zasad rozdziału II-go, należy tylko dowieść, że dwa wektory a i b , z których każdy równy jest pewnemu trzeciemu wektorowi c , są także pomiędzy sobą równe.

Okoliczność ta zachodzi oczywiście w przypadku, kiedy jeden z wektorów a , b i c jest wektorem niewłaściwym. Zakładamy więc, że każdy z wektorów tych jest wektorem właściwym.

Oznaczmy przez A_1 , B_1 i C_1 początki, a przez A_2 , B_2 i C_2 końce wektorów a , b i c . Chodzi tedy o okazanie, że równości

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_1 A_2} &= \overline{C_1 C_2} \\ \overline{C_1 C_2} &= \overline{B_1 B_2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

pociągają za sobą równość

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{B_1 B_2}. \quad (3)$$

Załóżmy najpierw, że trzy proste, na których położone są odpowiednio rozważane wektory, nie znajdują się w tej samej płaszczyźnie. W takim razie prosta $A_1 C_1$ z pewnością nie zlewa się z prostą $B_1 C_1$, a prosta $A_2 C_2$ nie zlewa się z prostą $B_2 C_2$.

Zatem pierwsza para prostych określa w zupełności pewną płaszczyznę (P_1), przez każdą z nich przechodzącą, a druga para — pewną drugą płaszczyznę (P_2), która znów przechodzi przez każdą z prostych $A_2 C_2$ i $B_2 C_2$.

Ponieważ mamy

$$A_1 C_1 \parallel A_2 C_2, \quad B_1 C_1 \parallel B_2 C_2,$$

przeto mamy

$$(P_1) \parallel (P_2),$$

skąd znów wynika, że mamy

$$A_1 B_1 \parallel A_2 B_2. \quad (4)$$

Ponieważ na podstawie równości (2) mamy także

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &\parallel C_1 C_2 \\ B_1 B_2 &\parallel C_1 C_2, \end{aligned}$$

przeto

$$A_1 A_2 \parallel B_1 B_2.$$

Związek ten w połączeniu ze związkiem (4) wyraża, że zachodzi równość (3), o uzasadnienie której właśnie chodziło.

Pozostaje do zbadania przypadek, kiedy proste

$$(5) \quad A_1A_2, \quad B_1B_2, \quad C_1C_2$$

położone są na tej samej płaszczyźnie (P).

Załóżmy najpierw, że żadne dwie z powyższych prostych nie zlewają się ze sobą. Przyjmijmy dowolnie w przestrzeni punkt X_1 , nie położony jednak w płaszczyźnie (P). W takim razie istnieje jeden i tylko jeden wektor $\overline{X_1X_2}$ sprawdzający równość

$$(6) \quad \overline{X_1X_2} = \overline{C_1C_2}$$

Istotnie, jeżeli wogóle istnieje wektor X_1X_2 , czyniący zadość równości powyższej, to końcem jego X_2 może być tylko punkt przecięcia się prostej (D), przechodzącej przez punkt X_1 i równoległej do prostej C_1C_2 , z prostą (D'), przechodzącą przez punkt C_2 i równoległą do prostej C_1X_1 . Ponieważ punkt X_1 nie leży na prostej C_1C_2 , przeto z łatwością stwierdzamy, że proste (D) i (D') przecinają się dokładnie w jednym punkcie. Jeżeli wektor, o który chodzi, istnieje, to końcem jego, jakśmy już zaznaczyli, może być tylko ten punkt. Z drugiej strony, oznaczając punkt ten przez X_2 spostrzegamy natychmiast, że wektor $\overline{X_1X_2}$ sprawdza równość (6). Usprawiedliwiliśmy więc w zupełności uczynioną uwagę.

Oczywiście nie istnieje płaszczyzna, w której położone byłyby jednocześnie wektory $\overline{A_1A_2}$, $\overline{C_1C_2}$ i $\overline{X_1X_2}$; analogicznie nie istnieje taka płaszczyzna, w której położone byłyby jednocześnie wektory $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ i $\overline{X_1X_2}$.

Zatem, zestawiając kolejno równość (6) z pierwszą i z drugą z równościami (2), spostrzegamy, że mamy

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2} &= \overline{X_1X_2}, \\ \overline{B_1B_2} &= \overline{X_1X_2} \end{aligned}$$

na podstawie wyniku uzyskanego przed chwilą.

Na tej samej podstawie i ze względu na to, że nie istnieje taka płaszczyzna, w której leżałyby jednocześnie wektory $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ i $\overline{X_1X_2}$, wnosimy z równości poprzedzających, że zachodzi równość (3), o uzasadnienie której właśnie chodziło.

Zwróćmy się obecnie do przypadku, kiedy dwie, ale dwie tylko, z prostych (5) zlewają się ze sobą. Gdyby niemi były proste A_1A_2 i B_1B_2 , to równość (3) zachodziłaby bezpośrednio na

podstawie definicji równości dwóch wektorów i nie potrzebowałyby dowodu. Mamy więc tylko do zbadania przypadek, w której prosta C_1C_2 zlewa się albo z prostą A_1A_2 albo z prostą B_1B_2 . Te dwa przypadki pojęciowo oczywiście nie różnią się od siebie. Założmy tedy, że prosta C_1C_2 zlewa się z prostą A_1A_2 . W takim razie na podstawie definicji równości dwóch wektorów pierwsza z równości (2) wyraża, że istnieje pewien wektor $\overline{E_1E_2}$, nie położony na prostej A_1A_2 , sprawdzający równości

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_1A_2} &= \overline{E_1E_2} \\ \overline{C_1C_2} &= \overline{E_1E_2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Jeżeli wektor $\overline{B_1B_2}$ na prostej E_1E_2 położony nie jest, to żadne dwie z prostych

$$B_1B_2, \quad C_1C_2, \quad E_1E_2$$

nie zlewają się ze sobą, i w takim razie na podstawie już uzyskanych wyników druga z równości (2) w połączeniu z drugą z równości (8) pociąga za sobą równość

$$\overline{B_1B_2} = \overline{E_1E_2},$$

a ponieważ żadne dwie z prostych

$$A_1A_2, \quad B_1B_2 \quad \text{ i } \quad E_1E_2$$

ze sobą nie zlewają się, przeto ostatnia równość w połączeniu z pierwszą z równości (8) pociąga za sobą równość (3), o którą właśnie chodziło.

Przypuścimy, że wektor $\overline{B_1B_2}$ położony jest na prostej E_1E_2 . Przyjawszy tedy punkt X_1 w taki sposób, żeby punkt ten nie był położony ani na prostej A_1A_2 ani na prostej E_1E_2 , wyznaczmy wektor $\overline{X_1X_2}$ tak, żeby zachodziła równość

$$\overline{X_1X_2} = \overline{E_1E_2}. \quad (8)$$

Na podstawie wyników uzyskanych wyżej wektor $\overline{X_1X_2}$ istnieje niezawodnie, a z równości (8) i równości (7) wnosimy, że zachodzą równości

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_1A_2} &= \overline{X_1X_2} \\ \overline{C_1C_2} &= \overline{X_1X_2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ponieważ wektor $\overline{B_1B_2}$ nie leży ani na prostej X_1X_2 , ani na prostej, na której położone są wektory $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{C_1C_2}$, ponieważ nadto

prosta X_1X_2 nie zlewa się z prostymi A_1A_2 i C_1C_2 , przeto stwierdzamy najpierw, zestawiając ze sobą drugą z równości (2) i drugą z równości (9), że mamy

$$\overline{B_1B_2} = \overline{X_1X_2},$$

a następnie, zestawivszy uzyskaną równość z pierwszą z równości (9), że zachodzi równość (3), o którą właśnie chodziło.

Obecnie pozostaje jedynie do zbadania przypadek, w którym wektory $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ i $\overline{C_1C_2}$ leżą na tej samej prostej (Δ). W takim razie pierwsza z równości (2) wyraża, że istnieje pewien wektor $\overline{E_1E_2}$ nie położony na prostej (Δ), sprawdzający równości (7), a druga z równości (2), że istnieje pewien wektor $\overline{G_1G_2}$, także na prostej (Δ) nie położony, który sprawdza równości

$$(10) \quad \begin{cases} \overline{B_1B_2} = \overline{G_1G_2} \\ \overline{C_1C_2} = \overline{G_1G_2} \end{cases}$$

Ponieważ nie istnieje prosta, na którejby leżały jednocześnie wektory $\overline{C_1C_2}$, $\overline{E_1E_2}$ i $\overline{G_1G_2}$, przeto z drugiej z równości (7) i z drugiej z równości (10) mamy

$$\overline{G_1G_2} = \overline{E_1E_2}.$$

Ponieważ nie istnieje także prosta, na której położone byłyby wektory $\overline{B_1B_2}$, $\overline{G_1G_2}$ i $\overline{E_1E_2}$, przeto wnosimy z ostatniej równości i z pierwszej z równości (10), że mamy

$$(11) \quad \overline{B_1B_2} = \overline{E_1E_2}.$$

Ponieważ dalej wektory $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{B_1B_2}$ położone są na tej samej prostej, a wektor $\overline{E_1E_2}$ na prostej tej położony nie jest, przeto pierwsza z równości (7) i równość (11) wyrażają łącznie właśnie to, co na podstawie definicyi równości dwóch wektorów umówiliśmy się wyrażać przez równość (3) w tym przypadku, kiedy wektory $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{B_1B_2}$ położone są na tej samej prostej. Zatem i w przypadku omawianym obecnie równości (2) pociągają za sobą równość (3).

Ostatecznie równości (2) pociągają za sobą w każdym razie równość (3). Zatem usprawiedliwiliśmy w zupełności tę definicyę równości dwóch wektorów, którą przyjęliśmy.

I. *Dwa równe pomiędzy sobą wektory, których wspólnym początkiem jest pewien ten sam punkt, zlewają się ze sobą w zupełności.*

Twierdzenie to jest oczywiste w razie, kiedy jeden z rozważanych wektorów, a więc także i drugi jest wektorem niewłaściwym. Zakładamy tedy, że okoliczność ta nie zachodzi, i oznaczmy przez \overline{AB} i \overline{AC} dwa równe pomiędzy sobą wektory właściwe o wspólnym początku A . Ponieważ na podstawie definicyi równości dwóch wektorów proste, na których dwa równe pomiędzy sobą wektory właściwe są położone, albo zlewają się ze sobą, albo są pomiędzy sobą równoległe, ponieważ dalej proste AB i AC , jako mające punkt wspólny, mianowicie punkt A , równoległymi do siebie być nie mogą, przeto ze względu na równość

$$\overline{AB} = \overline{AC},$$

wspomniane proste zlewają się ze sobą. Zatem równość poprzedzająca wyraża, że istnieje pewien wektor \overline{EF} , nie położony na prostej (Δ), na której położone są wektory \overline{AB} i \overline{AC} , sprawdzające równość

$$\overline{AB} = \overline{EF}$$

$$\overline{AC} = \overline{EF}.$$

Z pierwszej z tych równości wynika, że

$$AE \parallel BF,$$

a z drugiej, że

$$AE \parallel CF.$$

Na podstawie postulatu Euklidesa i związków powyższych proste BF i CF zlewają się ze sobą, skąd wynika, że ich punkty przecięcia się B i C z prostą (Δ) zlewają się także ze sobą. Zatem wektory \overline{AB} i \overline{AC} rzeczywiście zlewają się jeden z drugim.

II. *Każdemu punktowi przestrzeni A odpowiada jeden i tylko jeden wektor, którego początek leży w tymże punkcie i który równa się dowolnie danemu a priori wektorowi v .*

Twierdzenie to jest oczywiste w razie, kiedy wektor v jest wektorem niewłaściwym. Załóżmy więc, że okoliczność ta nie zachodzi. W razie kiedy punkt A nie jest położony na prostej, na której leży wektor v , mieliśmy sposobność uzasadnić rozważane twierdzenie przy rozwijaniu dowodu tego, iż dwa wektory, równe odpowiednio pewnemu temu samemu trzeciemu wektorowi, są także pomiędzy sobą równe. Pozostaje tedy do zbadania tylko przypadek, kiedy punkt A położony jest na prostej (Δ), na której leży

także wektor v . Przyjawszy dowolnie na prostej (Δ) nie położony punkt X w przestrzeni, możemy na podstawie uwagi dopiero co uczynionej, zbudować wektor \overline{XY} równy wektorowi v . Następnie, opierając się na tej samej uwadze, stwierdzamy, że istnieje będzie wektor \overline{AB} równy wektorowi \overline{XY} , a więc i wektorowi v . Zatem wektor \overline{AB} o początku A , równy wektorowi v , istnieje w każdym razie. Dwa takie wektory, nie zlewające się ze sobą, istnieć nie mogą, albowiem w razie równości

$$\overline{AB} = v \quad \text{i} \quad \overline{AB'} = v,$$

mielibyśmy

$$\overline{AB} = \overline{AB'}$$

i wektory \overline{AB} i $\overline{AB'}$, na podstawie twierdzenia I-go zlewałyby się ze sobą. Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

III. Jeżeli pomiędzy dwoma wektorami \overline{AB} i $\overline{A'B'}$ zachodzi równość

$$(1) \quad \overline{AB} = \overline{A'B'},$$

to w takim razie wektory $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ sprawdzają równość

$$(2) \quad \overline{AA'} = \overline{BB'}.$$

Twierdzenie to wymaga dowodu tylko (def. równ. wekt.) w razie, kiedy wektory \overline{AB} i $\overline{A'B'}$ są niezlewającymi się ze sobą wektorami właściwymi, położonymi na tej samej prostej (Δ). Zakładamy tedy, że okoliczności te zachodzą. W takim razie istnieje pewien wektor $\overline{A''B''}$, nie położony na prostej (Δ), sprawdzający równości

$$(3) \quad \overline{AB} = \overline{A''B''}$$

$$(4) \quad \overline{A'B'} = \overline{A''B''}.$$

Oznaczmy przez U punkt, nie położony w płaszczyźnie (P), w której leżą wektory \overline{AB} , $\overline{A'B'}$ i $\overline{A''B''}$, i uważajmy punkty przecięcia się U'' i U' płaszczyzny (Q), przechodzącej przez punkt U i równoległej do płaszczyzny (P), z prostymi równoległymi do prostej AU , przechodzącymi odpowiednio przez punkty A'' i A' . Mamy tedy

$$(5) \quad \overline{AA'} = \overline{UU'}$$

oraz

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{UU''} = \overline{AA''} \\ \overline{U''U'} = \overline{A''A'} \end{array} \right.$$

Z drugiej strony mamy

$$\overline{AA''} = \overline{BB''}$$

$$\overline{A''A'} = \overline{B''B'}.$$

Z równości tych i równości (6) wynikają równości

$$\overline{UU''} = \overline{BB''},$$

$$\overline{U''U'} = \overline{B''B'}.$$

Z tych znów równości wynika, że mamy

$$BU \parallel B''U',$$

$$B''U'' \parallel B'U'.$$

Zatem

$$BU \parallel B'U',$$

a ponieważ

$$BB' \parallel UU',$$

przeto mamy

$$\overline{BB'} = \overline{UU'}.$$

Z równości tej i równości (5) wynika równość (2), o dowód której właśnie chodziło.

§ 109. Dodawanie i odejmowanie wektorów. Żeby określić wynik dodania oznaczonego wektora b do drugiego oznaczonego wektora a , czyli sumę

$$a + b, \quad (1)$$

przyjmijmy dowolnie w przestrzeni pewien punkt O i zbudujmy wektory \overline{OA} i \overline{OB} , odpowiednio równe wektorom a i b . W takim razie wektor \overline{OB} przedstawia sumę (1).

Spostrzegamy natychmiast, że jeżeli pewien wektor c uważany być może za sumę $a + b$ pewnego wektora a i pewnego wektora b , to ten sam wektor c uważany być może za sumę jakiegokolwiek wektora a' , równego wektorowi a , i jakiegokolwiek wektora b' , równego wektorowi b .

Upewnijmy się teraz, że dwa wektory $O'B'$ i $O''B''$, z których każdy na podstawie definicji powyższej uważany być może za wynik dodania oznaczonego wektora b do oznaczonego drugiego wektora a , są pomiędzy sobą równe. Jeżeli każdy z wektorów $O'B'$ i $O''B''$ uważany być może za sumę (1), to wektorom tym odpowiadają punkty A' i A'' takie, żebyśmy mieli

$$\overline{O'A'} = a, \quad \overline{A'B'} = b$$

$$\overline{O''A''} = a, \quad \overline{A''B''} = b.$$

Z równości tych mamy

$$\begin{aligned}\overline{O'A'} &= \overline{O''A''} \\ \overline{A'B'} &= \overline{A''B''},\end{aligned}$$

skąd na podstawie tw. III-go wynikają równości

$$\begin{aligned}\overline{O'O''} &= \overline{A'A''} \\ \overline{A'A''} &= \overline{B'B''}.\end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\overline{O'O''} = \overline{B'B''},$$

skąd, opierając się ponownie na tw. III-ciem, wyprowadzamy równość

$$\overline{O'B'} = \overline{O''B''},$$

o którą właśnie chodziło.

Powiadam, że dodawanie wektorów posiada własność łączności. Twierdzenie to będzie uzasadnione (tw. I, § 28), jeżeli tylko udowodnimy, że mamy

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

jakikolwiek wektory oznaczylibyśmy przez a , b i c .

Oznaczając przez O dowolnie przyjęty punkt w przestrzeni, wyznaczamy punkty A , B i C z równości

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= a \\ \overline{AB} &= b \\ \overline{BC} &= c.\end{aligned}$$

Mamy tedy

$$(a + b) + c = \overline{OC}.$$

Z drugiej strony mamy oczywiście

$$\begin{aligned}b + c &= \overline{AC} \\ a + \overline{AC} &= \overline{OC}.\end{aligned}$$

Mamy więc

$$a + (b + c) = \overline{OC},$$

zatem mamy także

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

o co właśnie chodziło.

Powiadam obecnie, że działanie dodawania wektorów posiada własność przemienności. Istotnie, zachowując poprzednio nadane znaczenie symbolom a i b , przyjmujemy w przestrzeni dowolnie pewien punkt O i wyznaczamy kolejno wektory OA i AB z równości

$$\left. \begin{aligned} \overline{OA} &= a \\ \overline{AB} &= b. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Mamy tedy

$$a + b = \overline{OB}. \quad (2)$$

Uważajmy wektor OB_1 , określony równością

$$\overline{OB_1} = b. \quad (3)$$

Na podstawie równości tej i drugiej równości z układu (1) mamy

$$\overline{AB} = \overline{OB_1}$$

skąd

$$\overline{B_1B} = \overline{OA}$$

na podstawie tw. III-go.

Zestawiając uzyskaną równość z pierwszą z równości (1), otrzymujemy

$$\overline{B_1B} = a.$$

Z równości tej i równości (3) wynika równość

$$b + a = \overline{OB}.$$

Z zestawienia równości tej z równością (2) wynika, że dodawanie wektorów posiada własność przemienności w razie istnienia dwóch składników, a ponieważ dowiedliśmy przed chwilą, że dodawanie wektorów posiada własność łączności, przeto (tw. II, § 28) dodawanie wektorów posiada rzeczywiście własność przemienności w przypadku najogólniejszym.

Stwierdzamy z największą łatwością, że w przypadku, kiedy dwa wektory b i b' sprawdzają związek

$$b \neq b',$$

mamy zawsze

$$a + b \neq a + b'$$

jakikolwiek wektor oznaczylibyśmy przez a .

Ponieważ zaś dodawanie wektorów posiada własność przemienności, przeto (§ 31) istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania wekto-

rów, a działanie to, o ile jest wykonalne, jest działaniem jednoznaczem. W rzeczywistości *działanie odejmowania wykonalne jest na wektorach bez zastrzeżeń*. Żeby twierdzenie to udowodnić, zważmy najpierw, że wspólna wartość wektorów niewłaściwych równa się modułowi dodawania wektorów, a następnie przyjmijmy definicyę następującą: orzeczenie, że dwa wektory są pomiędzy sobą symetryczne, wyraża, że suma tych wektorów równa się modułowi dodawania czyli wektorowi niewłaściwemu. Każdemu wektorowi \overline{AB} odpowiada wektor jemu symetryczny, a zbiór wektorów symetrycznych wektorowi \overline{AB} oczywiście zlewa się ze zbiorem wektorów równych wektorowi \overline{BA} . Zatem dwa wektory symetryczne odpowiednio pewnemu temu samemu wektorowi, są pomiędzy sobą równe. Jeżeli dwa wektory są pomiędzy sobą symetryczne, to wektory te tylko jednocześnie mogą być wektorami niewłaściwymi, a w takim razie i tylko w takim razie dwa wektory symetryczne są pomiędzy sobą równe.

Uważajmy dwa jakiegokolwiek wektory a i b , oznaczając przytem przez b' wektor symetryczny wektorowi b . Powiadam, że mamy

$$(1) \quad a - b = a + b'.$$

Istotnie, mamy

$$(2) \quad (a + b') + b = a + (b' + b),$$

na podstawie własności łączności dodawania, a ponieważ mamy

$$b' + b = \mu,$$

oznaczając ogólnie przez μ moduł dodawania, przeto

$$(3) \quad a + (b' + b) = a + \mu = a.$$

Ze związków (2) i (3) mamy równość

$$(a + b') + b = a,$$

równoważną równości (1), którą pragnęliśmy uzasadnić. Ponieważ wektor b' istnieje w każdym razie, przeto suma $a + b'$ istnieje też w każdym razie, zatem na podstawie równości (1) odejmowanie wektorów jest, zgodnie z zapowiedzią, działaniem wykonalnem bez zastrzeżeń.

Ostatecznie odejmowanie wektorów jest działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń i mogącym być sprowadzonym

do dodawania drogą podstawienia zamiast odjemnika symetrycznego mu wektora.

Z uzyskanych wyników możemy wyprowadzić użyteczne prawidło do wyznaczania różnicy dwóch wektorów, których początki zlewają się ze sobą. Istotnie, oznaczmy przez \overline{OA} i \overline{OB} dwa wektory o wspólnym początku O , mamy tedy

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{BO} = \overline{BO} + \overline{OA}$$

na podstawie wyników uzyskanych poprzednio, a ponieważ mamy

$$\overline{BO} + \overline{OA} = \overline{BA},$$

przeto mamy także

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}.$$

Równość ta wyraża twierdzenie następujące:

I. *Jeżeli elementy, stanowiące odpowiednio odjemną i odjemnik pewnej różnicy, są współpoczątkowymi wektorami, to reszta równa się wektorowi, którego początkiem jest kraniec odjemnika, a kraniec — kraniec odjemnej.*

§ 110. **Pojęcie kierunku wektora i pojęcie osi.** Uważajmy dwa wektory właściwe położone na prostych równoległych lub zlewających się ze sobą \overline{AB} i $\overline{A'B'}$ i wyznaczmy trzeci wektor \overline{AB} z równania

$$\overline{AB_1} = \overline{A'B'}. \quad (1)$$

Punkt B_1 położony będzie na prostej AB i zachodzić będzie oczywiście jeden z dwóch wykluczających się wzajemnie przypadków następujących:

- 1°. Punkt A nie jest położony pomiędzy punktami B i B_1
- 2°. Punkt A jest położony pomiędzy punktami B i B_1 .

W pierwszym przypadku orzekamy, że kierunek wektora $\overline{A'B'}$ równy jest kierunkowi wektora \overline{AB} , a w drugim — że kierunek wektora $\overline{A'B'}$ przeciwny jest kierunkowi wektora \overline{AB} .

Pomiędzy wszystkimi wektorami, z których każdy ma kierunek równy oznaczonemu wektorowi właściwemu \overline{AB} , znajduje się oczywiście w myśl zasad rozdziału II-go i sam wektor \overline{AB} . Zatem, żeby powyższą definicję usprawiedliwić, należy tylko uzasadnić twierdzenia następujące:

A) Jeżeli kierunek pewnego wektora właściwego $\overline{A'B'}$ równy jest kierunkowi pewnego wektora właściwego \overline{AB} , to kierunek wektora \overline{AB} równy jest kierunkowi wektora $\overline{A'B'}$.