

żeby zatem wszystkie twierdzenia § 102-go w zastosowaniu do zbioru ( $W$ ) były uzasadnione. W rzeczywistości postępujemy zawsze w sposób poprzedzający.

Na tej właśnie drodze wytwarzamy sobie precyzyjne pojęcie o coraz to nowych rodzajach wielkości, do których, jak się przekonywamy na podstawie nowszych badań, należą pojęcia pola figury płaskiej i pojęcie objętości figury przestrzennej <sup>1)</sup>.

Ostatecznie, drogą ustawiania odpowiednich umów i definicji, zawsze dopinamy tego, żeby w każdym przypadku szczególnym po zupełnem opracowaniu problemu mierzenia zachodziły wszystkie twierdzenia z § 102-go.

**§ 106.** Obecnie pragniemy omówić najprostsze trzy przypadki, w których warunki § 102-go określają bez żadnej dwuznaczności wynik rozwiązania problemu mierzenia.

**Przypadek A).** Zbiór ( $E$ ), dla elementów którego problem mierzenia ma być rozwiązany, posiada własności następujące:

1°. Zbiór ( $E$ ) jest zbiorem wielkości w znaczeniu szerszem.

2°. Działanie dodawania elementów zbioru ( $E$ ) zostało określone zgodnie z zasadami rozdziału II-go.

3°. Każdy element zbioru ( $E$ ), jeżeli nie jest ani elementem równym modułowi dodawania <sup>2)</sup>, ani elementem równym pewnemu szczególnemu elementowi  $e_1$  rozważanego zbioru, równa się sumie skończonej liczby elementów równych elementowi  $e_1$ .

Załóżmy chwilowo, że problem mierzenia elementów zbioru ( $E$ ) jest rozwiązalny, i oznaczmy ogólnie przez  $e_i$  taki element zbioru ( $E$ ), który uważany być może za sumę  $i$  elementów równych elementowi  $e_1$ .

Ze względu na tw. II-gie i III-cie § 103-go możemy na próbę przyjąć za jednostkę miary tylko jeden z elementów  $e_i$ . Oznaczmy tedy przez  $n$  dowolnie dobraną, byle od zera większą liczbę całkowitą i spróbujmy przyjąć za jednostkę miary element  $e_n$ .

Na podstawie tw. IV-go § 102-go mamy tedy równania

$$\begin{aligned} n \cdot x &= 1 \\ y &= ix, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Lebesgue. Intégrale, aire, surface. Annali di matematica 1092.

<sup>2)</sup> Moduł dodawania elementów zbioru ( $E$ ) może nie istnieć. W takim razie zastrzeżenie to staje się zbytecznem.

oznaczając przez  $x$  miarę elementu  $e_i$ , a przez  $y$  — miarę jakiegokolwiek elementu  $e_i$ . Z równań poprzedzających otrzymujemy na miarę  $y$  elementu  $e_i$  wzór następujący:

$$y = \frac{i}{n}, \quad (1)$$

skąd na stosunek

$$\frac{e_m}{e_p}$$

dwóch jakichkolwiek niezerowych elementów zbioru ( $E$ ) wynika wzór następujący

$$\frac{e_m}{e_p} = \frac{m}{p},$$

a na stosunek elementu zerowego  $e_0$  do jakiegokolwiek elementu niezerowego  $e_p$  — wzór

$$\frac{e_0}{e_p} = 0.$$

Zatem, jeżeli problem mierzenia elementów rozważanego zbioru jest wogóle w myśl zasad § 102-go rozwiązalny, to problem ten posiada jedno tylko rozwiązanie, określone wzorem (1). Sprawdzamy z największą łatwością, że wzór (1) czyni zadość wszystkim warunkom § 102-go i dochodzimy do wyniku, że w omówionym przypadku problem mierzenia jest rozwiązalny, a rozwiązanie problemu tego określone jest w zupełności rzeczonymi warunkami. Przykładem na przypadek  $A$  jest zbiór wszystkich skończonych zbiorów oznaczonej klasy przedmiotów (np. jabłek). Omówiony przypadek jest najprostszymi, jaki wogóle zajść może.

**Przypadek B).** Zbiór ( $E$ ) posiada własności następujące:

- 1°. Zbiór ( $E$ ) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem.
- 2°. Działanie dodawania jest dla elementów zbioru tego określone zgodnie z zasadami rozdziału V-go i posiada nadto własności łączności i przemienności.

3°. Jeżeli dwa elementy  $e'$  i  $e''$  zbioru ( $E$ ) sprawdzają nierówność

$$e' < e'',$$

to w takim razie mamy

$$e + e' < e + e'',$$

jakikolwiek element zbioru ( $E$ ) oznaczylibyśmy przez  $e$ .

4°. Działanie odejmowania na elementach zbioru ( $E$ ), jednoznaczne na podstawie warunku poprzedzającego (§ 31), wykonalne jest w razie, ale tylko w razie, kiedy odjemnik od odjemnej nie jest większy.

W następstwie tego warunku i warunków wysłowionych poprzednio istnieje moduł dodawania elementów zbioru ( $E$ ) i przedstawia najmniejszą wartość, jaką mieć może element zbioru ( $E$ ).

Istotnie, powtarzając z nieznaczną odmianą rozumowanie, które wyłożyliśmy już przy innej sposobności<sup>1)</sup>, stwierdzamy, że wszystkie te elementy zbioru ( $E$ ), z których każdy uważany być może za różnicę dwóch równych pomiędzy sobą elementów tegoż zbioru, są pomiędzy sobą równe, a wspólna ich wartość przedstawia moduł dodawania elementów rozważanego zbioru. Z drugiej strony, jakkolwiek element zbioru ( $E$ ) oznaczyliśmy przez  $e$ , mamy

$$e + \mu = e,$$

oznaczając przez  $\mu$  moduł dodawania elementów rozważanego zbioru. Zatem

$$e = e - \mu,$$

skąd wynika, że odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$e - \mu,$$

jest wykonalne. Skoro zaś okoliczność ta zachodzi, to na podstawie warunku wykonalności odejmowania na elementach zbioru  $e$  mamy

$$e \geq \mu,$$

a związek ten właśnie wyraża, że moduł dodawania przedstawia najmniejszą wartość, jaką mieć może element zbioru ( $E$ ).

5°. Jakkolwiek element zbioru ( $E$ ) oznaczylibyśmy przez  $e$ , zawsze można element ten przedstawić w postaci sumy tylu równych pomiędzy sobą elementów tegoż zbioru, ile wynosi dowolnie przyjęta, byle od jedności większa liczba całkowita  $n$ .

Własność tę elementów zbioru ( $E$ ) wyrażamy krótko, orzekając, że elementy zbioru ( $E$ ) są nieograniczenie podzielne na równe części, rozumując przez podzielenie oznaczonego elementu  $e$  na  $n$  równych części przedstawienie go w postaci sumy  $n$

<sup>1)</sup> Str. 361, uwaga A.

równych pomiędzy sobą składników, z których każdy przybiera nazwę  $n$ -tej części elementu  $e$ .

6°. Jeżeli tylko pewien element  $e$  zbioru  $(E)$  większy jest od modułu dodawania, co na podstawie uwagi uczynionej wyżej zachodzi, skoro tylko element  $e$  od modułu dodawania jest odmienny, to jakikolwiek inny element tegoż zbioru oznaczylibyśmy przez  $e'$ , zawsze istnieje taka liczba całkowita  $n$ , żeby suma tylu składników równych elementowi  $e$ , ile wynosi liczba  $n$ , większa była od elementu  $e'$ . Warunek ten zowie się postulatem Archimedes'a.

Wszelki zbiór wielkości  $(E)$ , sprawdzający warunki poprzedzające zowie się zbiorem wielkości bezwzględnych.

Przekonamy się, że problem mierzenia elementów zbioru  $(E)$  posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie.

Orzeczenie, że pewien element  $e$  zbioru  $(E)$  mieści się w drugim elemencie  $e'$  tegoż zbioru tyle razy, ile wynosi pewna liczba całkowita  $n$  od zera nie mniejsza, wyrażać będzie w razie nierówności  $n > 1$ , iż element  $e'$  równa się sumie  $n$  elementów równych elementowi  $e$ , w razie równości  $n = 1$ , iż mamy

$$e' = e,$$

a w przypadku, kiedy liczba  $n$  równa się zeru, iż element  $e'$  równa się modułowi dodawania [zbiór  $(E)$  obejmuje niezawodnie jeden przynajmniej element równy modułowi dodawania ze względu na warunek 4-ty.] Element  $e'$  zowie się tedy wielokrotnością elementu  $e$ , a element  $e$  — podwielokrotnością elementu  $e'$ .

Tę okoliczność, że pewien element  $e$  mieści się w pewnym elemencie  $e'$   $n$  razy, wyrażamy równością

$$e' = e \cdot n.$$

Jeżeli każdy z pewnych dwóch elementów  $e_1$  i  $e_2$  zbioru  $(E)$  jest wielokrotnością pewnego tego samego elementu  $e$  tegoż zbioru, to element  $e$  zowie się wspólną podwielokrotnością elementów  $e_1$  i  $e_2$ , które w rozważanym przypadku zowią się elementami wspólnymi.

Żałóźmy chwilowo, że problem mierzenia elementów zbioru  $(E)$  rozwiązany być może, oznaczmy przez  $u$  jakikolwiek, byle od modułu dodawania odmienny element zbioru  $(E)$  i, przyjąwszy element ten za jednostkę, usiłujmy wyznaczyć miarę dowolnie danego elementu  $e$  zbioru  $(E)$ .

Zwróćmy się najpierw do przypadku szczególnego, kiedy elementy  $u$  i  $e$  są współmierne. Mamy tedy

$$(1) \quad u = d \cdot p$$

$$(2) \quad e = d \cdot m,$$

oznaczając przez  $d$  wspólną podwielokrotność elementów  $u$  i  $e$ , a przez  $p$  i  $m$  dwie liczby całkowite.

Ponieważ miara elementu  $u$  równa się jedności, przeto na podstawie tw. IV-go § 102-go wnosimy z równości (1), że miara elementu  $d$  równa się liczbie

$$\frac{1}{p}.$$

Opierając się ponownie na temże twierdzeniu, wnosimy następnie z równości (2), że ze względu na uzyskany wynik miara elementu  $e$  równa się liczbie ułamkowej

$$\frac{m}{p}.$$

Oznaczmy przez  $(E')$  zbiór wszystkich tych elementów zbioru  $(E)$ , które są z elementem  $u$  współmierne i zacieśniając chwilowo rozważany problem do problemu mierzenia elementów zbioru  $(E')$ , zbadajmy, czy uzyskany wynik sprawdza wszystkie warunki § 102-go.

Uważajmy prócz elementów  $u$  i  $e$  zbioru  $(E')$  jeszcze trzeci element  $e'$  tegoż zbioru. Na podstawie uzyskanego przed chwilą wyniku, miarą elementu  $e'$  może być tylko liczba ułamkowa równa liczbie

$$\frac{m'}{p'},$$

której mianownik i licznik równają się odpowiednio liczbom razy, ile mieści się pewna wspólna podwielokrotność w elemencie  $u$  i w elemencie  $e'$ . Powiadam, że równość

$$(3) \quad \frac{m}{p} = \frac{m'}{p'}$$

i równość

$$(4) \quad e = e'$$

są pomiędzy sobą równoważne. Istotnie, podzielmy element  $u$  na tyle równych części, ile wynosi iloczyn  $p \cdot p'$ , i oznaczmy przez  $\delta$  jedną z nich.

Stwierdzamy z łatwością (porównaj § 18), że mieć będziemy

$$\left. \begin{aligned} e &= \delta . (m . p') \\ e' &= \delta . (m' . p) . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Założmy, że zachodzi równość (3). Mamy tedy

$$m . p' = m' . p . \quad (6)$$

Jeżeli wspólna wartość tych iloczynów jest od zera odmienna, to na podstawie równości (5) równość (4) zachodzić będzie niezawodnie. Założmy więc, że mamy

$$m . p' = m' . p = 0 ,$$

skąd

$$m = m' = 0 ,$$

gdyż każda z liczb  $p$  i  $p'$  jest od zera odmienna.

W takim razie elementy  $e$  i  $e'$  równe będą modułowi dodawania na podstawie jednej z definicyi przyjętych wyżej.

Ostatecznie równość (3) pociąga za sobą w każdym razie równość (4). Odwrotnie, równość (4) pociąga za sobą równość (3).

Istotnie element  $\delta$  modułowi dodawania nie jest równy, albowiem, gdyby tak było, to element  $u$ , jako równy sumie tylu elementów równych elementowi  $\delta$ , ile wynosi iloczyn  $p . p'$ , byłby także wbrew założeniu elementem równym modułowi dodawania. Ale skoro element  $\delta$  modułowi dodawania nie jest równy, to równość

$$\delta . (m . p') = \delta . (m' . p) ,$$

która jest następstwem równości (4), pociąga za sobą ze względu na własność 3-cią zbioru ( $E$ ) równość (6), a więc i równość (4).

Ostatecznie dowiedliśmy równoważności równości (3) i (4). Z tego wynika, że liczby, które jedynie za miary elementów zbioru ( $E'$ ) uważane być mogą, czynią zadość tw. III-mu i IV-mu § 102-go. Kierując się ścisłą analogią, jaka zachodzi pomiędzy rozważaniami obecnymi a temi, któreśmy mieli sposobność rozwinąć, omawiając problem mierzenia odcinków w rozdziale IV-tym. z łatwością dowiedlibyśmy, że uzyskane wyrażenia na miary elementów zbioru ( $E'$ ) czynią także zadość i trzem pozostałym twierdzeniom § 102-go. Spostrzegamy przytem z łatwością, że każdej liczbie wymiernej, bezwzględnej odpowiada zawsze taki element zbioru ( $E$ ), którego miarą jest właśnie ta liczba.

Istnienie niewspółmiernych pomiędzy sobą elementów w zbiorze ( $E$ ) oczywiście nie jest następstwem wyszczególnionych wyżej założeń, ale nie jest także z założeniami temi w sprzeczności. Założmy tedy, że elementy takie w zbiorze ( $E$ ) istnieją i usiłujmy wyznaczyć miarę elementu  $e$  niewspółmiernego z jednostką. Elementowi  $e$  odpowiada oczywiście oznaczony przekrój ( $P$ ) drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych bezwzględnych, który możemy określić w sposób następujący: zbiór ( $A_1$ ) liczb wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do przekroju ( $P$ ) stanowią liczby, które są miarami elementów mniejszych od elementu  $e$ , a zbiór ( $A_2$ ) liczb wymiernych większych w stosunku do tegoż przekroju stanowią liczby wymierne, które są miarami elementów większych od elementu  $e$ .

Na podstawie tw. V-go § 102-go miarą elementu  $e$  oczywiście być może tylko liczba  $x$  położona na przekroju ( $P$ ), a ponieważ założyliśmy, że problem mierzenia elementów zbioru ( $E$ ) jest rozwiązalny w myśl warunków § 102-go, przeto przyjmujemy liczbę  $x$  za miarę elementu  $e$ .

Na podstawie umów poprzedzających odpowiada każdemu elementowi zbioru ( $E$ ) pewna liczba bez względu na to, czy problem mierzenia elementów zbioru jest, czy nie jest rozwiązalny zgodnie z zasadami § 102-go. Przyjmując tedy każdą taką liczbę za miarę odnośnego elementu zbioru ( $E$ ), możemy oświadczyć, że pewne rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru ( $E$ ) uzyskaliśmy; możemy nawet dodać, że jeżeli wogóle problem mierzenia elementów zbioru ( $E$ ) może być rozwiązany w myśl zasad § 102-go, to ten problem posiada jedno tylko rozwiązanie, to mianowicie, które uzyskaliśmy. Pozostaje tedy do sprawdzenia, czy rzeczzone rozwiązanie rzeczywiście spełnia warunki wyszczególnione w § 102-gim.

W tym celu oznaczmy przez  $e$  i  $e'$  dwa jakiegokolwiek elementy zbioru ( $E$ ), a przez  $x$  i  $x'$  ich miary. Powiadam, że równość

$$(1) \quad e = e'$$

równoważna jest równości

$$(2) \quad x = x',$$

a nierówność

$$(3) \quad e < e'$$

nierówności

$$(4) \quad x < x'.$$

Widzieliśmy już wyżej, że w przypadku, kiedy każdy z elementów  $e$  i  $e'$  jest z jednostką  $u$  współmierny, równoważność równości (1) i (2) z jednej strony, a równoważność nierówności (3) i (4) z drugiej są spełnione. Te same okoliczności zachodzą oczywiście na podstawie definicji miary niewspółmiernego z jednostką  $u$  elementu zbioru ( $E$ ) i w tym jeszcze przypadku, kiedy jeden tylko z elementów  $e$  i  $e'$  jest z jednostką współmierny. Zakładamy tedy, że żaden z rozważanych elementów z jednostką współmierny nie jest. Ta okoliczność, że równość (1) pociąga za sobą równość (2), wynika bezpośrednio z definicji miary elementu niewspółmiernego z jednostką. Przypuśćmy więc, że zachodzi nierówność (3). Przyjmijmy

$$a = e' - e.$$

Ze względu na nierówność (3) element  $a$  modułowi dodawania równać się nie będzie. Zatem na podstawie przyjętego przez nas postulatu Archimedesesa znajdzie się liczba całkowita  $p$ , sprawdzająca nierówność

$$a \cdot p > u. \quad (5)$$

Oznaczmy przez  $d$  taki element zbioru ( $E$ ), żebyśmy mieli

$$d \cdot p = u. \quad (6)$$

Na podstawie przyjętej przez nas nieograniczonej podzielności elementów zbioru ( $E$ ) element  $d$  istnieć będzie. Element ten nie będzie równać się modułowi dodawania, gdyż w takim razie z równości (6) wynikałoby, że wbrew założeniu element  $u$  równa się modułowi dodawania. Ze związków (5) i (6) wnosimy łatwo drogą indukcji matematycznej, opierając się przytem na własności 3-ciej zbioru ( $E$ ), że mamy

$$d < a.$$

Stąd zaś, uwzględniając ponownie postulat Archimedesesa i posługując się rozumowaniem, które już niejednokrotnie mieliśmy sposobność poprzednio rozwinąć, wnosimy, że istnieć będzie pewna liczba całkowita  $m$ , sprawdzająca nierówności

$$e < d \cdot m < e'. \quad (7)$$



Symbol

$d.m$

przedstawia pewien z jednostką miary  $u$  współmierny element zbioru  $(E)$ . Miara tego elementu równa się oczywiście liczbie

$$\frac{m}{p}.$$

Z nierówności (7) i definicji liczb  $x$  i  $x'$  wynika, że liczba

$$\frac{m}{p}$$

położona jest poza przekrojem  $(P)$  zbioru liczb wymiernych, na którym położona jest liczba  $x$ , ale przed tym przekrojem  $(P')$  zbioru liczb wymiernych, na którym leży liczba  $x'$ . Zatem przekrój  $(P)$  położony jest przed przekrojem  $(P')$ , a liczby  $x$  i  $x'$  zgodnie z zapowiedzią sprawdzają nierówność (4).

Obecnie dowiedliśmy już całkiem ogólnie, że związki (1) i (3) pociągają odpowiednio za sobą związki (2) i (4).

Załóżmy, że zachodzi równość (2). W takim razie elementy  $e$  i  $e'$  nie mogą być nierówne pomiędzy sobą, bo wówczas jeden z nich byłby mniejszy od drugiego i na podstawie tego, cośmy udowodnili przed chwilą, jedna z liczb  $x$  i  $x'$  byłaby od drugiej mniejsza. Zatem w razie równości (2) zachodzi niezawodnie i równość (1). Równie łatwo spostrzegamy, że nierówność (4) pociąga za sobą nierówność (3), gdyż założenie, iż tak nie jest, prowadzi do wyniku, iż wbrew założeniu zachodzi związek

$$x \geq x'.$$

Ostatecznie dowiedliśmy, że równość (1) równoważna jest równości (2), a nierówność (3) — nierówności (4). Stąd wnosimy natychmiast, że omawiane rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru  $(E)$  czyni zadość tw. III-mu i VI-mu § 102-go. Kierując się ścisłą analogią, zachodzącą pomiędzy przypadkiem szczególnym, w którym chodzi o mierzenie odcinków prostoliniowych, a przypadkiem bardziej ogólnym, stanowiącym przedmiot obecnych rozważań, dowiedlibyśmy z łatwością, że omawiane rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru  $(E)$  czyni także zadość trzem pozostałym twierdzeniom § 102-go. Zatem problem

mierzenia elementów zbioru ( $E$ ) posiada zgodnie z zapowiedzią jedno i tylko jedno rozwiązanie, sprawdzające warunki § 102-go.

Do rozważań poprzedzających nawiązujemy uwagę następującą: Jeżeli pewien zbiór ( $E$ ) sprawdza warunki, przyjęte za podstawę tych rozważań, to miarą elementu zbioru ( $E$ ) może być tylko liczba od zera nie mniejsza, a każdej liczbie wymiernej, byle od zera nie mniejszej, odpowiada taki element zbioru ( $E$ ), którego miara tejże liczbie się równa; natomiast ze wspomnianych rozważań nie wynika bynajmniej, żeby każdej liczbie niewymiernej odpowiadał taki element zbioru ( $E$ ), którego miara równałaby się tej liczbie; zdarzyć się nawet może, że w zbiorze ( $E$ ) nie istnieje ani jeden element, którego miara równałaby się liczbie niewymiernej. Gdyby jednak pokazało się, że w razie przyjęcia pewnego elementu zbioru ( $E$ ) za jednostkę każda liczba bezwzględna uważana być może za miarę pewnego elementu rozważanego zbioru, to moglibyśmy łatwo udowodnić, opierając się na tw. II-giem § 102-go, że ta sama okoliczność zachodziłaby, jakikolwiek inny (byle nie zerowy) element rozważanego zbioru przyjęlibyśmy za jednostkę miary.

W przypadku szczególnym, kiedy każda liczba bezwzględna, byle od zera nie mniejsza, uważana być może za miarę pewnego elementu zbioru ( $E$ ), orzekamy, że zbiór ( $E$ ) jest ciągłym zbiorem wielkości bezwzględnych. Spostrzegamy z łatwością, że warunek konieczny i wystarczający, ażeby zbiór ( $E$ ), sprawdzający powyższe warunki, był ciągłym zbiorem wielkości, polega na tem, iżby każdemu podziałowi elementów zbioru tego na dwie kategorie w taki sposób, żeby każdy element pewnej jednej ( $K_1$ ) z tych dwóch kategorii był mniejszy od każdego elementu drugiej kategorii ( $K_2$ ), odpowiadał pewien taki element rozważanego zbioru, który byłby albo największym elementem kategorii ( $K_1$ ), albo najmniejszym elementem kategorii ( $K_2$ ); jednym słowem, każdy przekrój zbioru ( $E$ ) powinien być przekrojem pierwszego gatunku.

Zbiór odcinków prostoliniowych stanowi najbardziej typowy przykład ciągłego zbioru wielkości bezwzględnych, ale napotykamy w badaniach naukowych i inne przykłady ciągłych zbiorów wielkości bezwzględnych, np. masy ciał materyalnych.

**Przypadek C).** Przystępujemy do omówienia problemu mierzenia elementów takiego zbioru wielkości ( $E$ ), który sprawdza warunki następujące:

1°. Zbiór ( $E$ ) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem.

2°. Działanie dodawania jest dla elementów zbioru tego określone zgodnie z zasadami rozdziału V-go i posiada własności łączności i przemienności.

3°. Jeżeli dwa elementy  $e'$  i  $e''$  zbioru  $(E)$  sprawdzają nierówność

$$e' < e'',$$

to w takim razie mamy

$$e + e' < e + e''$$

jakikolwiek element zbioru  $(E)$  oznaczylibyśmy przez  $e$ .

4°. Działanie odejmowania na elementach zbioru  $(E)$ , jednoznaczne na podstawie warunku poprzedzającego (§ 31), wykonalne jest bez żadnych zastrzeżeń.

Podobnie jak w przypadku  $B$  i z przyczyn całkiem analogicznych istnieje moduł dodawania elementów zbioru  $(E)$  i w przypadku rozważanym obecnie, ale wartość modułu dodawania w przypadku obecnym nie jest najmniejszą wartością, jaką mieć może element zbioru  $(E)$ ; przy obecnych warunkach wogóle nie istnieje najmniejsza wartość na element zbioru  $(E)$ , gdyż reszta odejmowania od jakiegokolwiek elementu zbioru  $(E)$ , elementu od modułu dodawania większego, jest od tego elementu mniejsza.

5°. Elementy zbioru  $(E)$  są nieograniczenie podzielne na równe części.

6°. Jeżeli oznaczony element  $a$  zbioru  $(E)$  większy jest od modułu dodawania, a symbol  $e$  oznacza jakikolwiek element zbioru  $(E)$ , to zawsze istnieje będzie taka liczba całkowita bezwzględna  $n$ , która sprawdzać będzie nierówność

$$a \cdot n > e,$$

innymi słowy, zbiór  $(E)$  spełnia postulat Archimedesza.

Wszelki zbiór wielkości, sprawdzający warunki poprzedzające, zowie się zbiorem wielkości względnych; zbiór wielkości względnych oczywiście pod tym tylko względem różni się od zbioru wielkości bezwzględnych, iż działanie odejmowania wykonalne jest na elementach zbioru wielkości bezwzględnych bez żadnych zastrzeżeń, w przeciwieństwie do tego, co zachodzi przy wielkościach bezwzględnych.

Podobnie, jak w przypadkach poprzedzających, zakładamy chwilowo, że problem mierzenia elementów zbioru  $(E)$  rozwiązalny

jest zgodnie z zasadami § 102-go, i przyjąwszy pewien element  $u$  zbioru tego za jednostkę, przystępujemy do wyznaczenia miary dowolnie danego elementu  $e$  rozważanego zbioru.

Ze względu na tw. II-gie i III-cie § 103-go element  $u$  nie może równać się modułowi dodawania. Jeżeli więc oznaczymy przez  $\mu$  moduł dodawania, to element  $u$  będzie albo większy, albo mniejszy od elementu  $\mu$ .

Założmy najpierw, że mamy

$$u > \mu \quad (1)$$

i uważajmy jakikolwiek element  $e$  zbioru  $(E)$ . W razie równości

$$e = \mu$$

miara elementu  $e$  równałaby się zeru na podstawie tw. III-go § 103-go. Zwracamy się tedy do przypadku, kiedy równość poprzedzająca nie zachodzi, i przyjmujemy na początek, że mamy

$$e > \mu. \quad (2)$$

Oznaczmy przez  $(E')$  zbiór wszystkich od elementu  $\mu$  nie mniejszych elementów zbioru  $(E)$ . Zbiór  $(E')$  jest oczywiście zbiorem wielkości bezwzględnych, innemi słowy, przy zbiorze tym zachodzi przypadek  $B$ . Oznaczmy przez  $x$  liczbę, która stanowiłaby miarę elementu  $e$ , gdybyśmy element ten uważali za element zbioru  $(E')$ . Spostrzegamy natychmiast, że miara elementu  $e$ , uważanego za element zbioru  $(E)$ , równać się musi liczbie  $x$ .

Zwróćmy się obecnie do przypadku, w którym mamy

$$e < \mu. \quad (3)$$

Otóż oznaczając przez  $e'$  element symetryczny elementowi  $e$ , czyli element sprawdzający równanie

$$e + e' = \mu, \quad (4)$$

mieć będziemy

$$e' > \mu. \quad (5)$$

Istnienie elementu  $e'$  nie ulega wątpliwości na podstawie warunku 4-go, a ta okoliczność, że zachodzić będzie nierówność (5), może być uzasadniona w sposób następujący: z równania (4) mamy

$$\mu - e = e'.$$

Na podstawie tej równości i nierówności (3) oraz 3-ciej własności zbioru ( $E$ ) mamy

$$e + (\mu - e) < \mu + e';$$

a ponieważ mamy

$$\begin{aligned} e' + \mu &= e', \\ (\mu - e) + e &= \mu, \end{aligned}$$

przeto nierówność (5) zachodzić będzie niezawodnie.

Ponieważ na podstawie nierówności (5) element  $e'$  należy do zbioru ( $E'$ ), przeto ze względu na wyniki, uzyskane wyżej, miarą elementu  $e'$  będzie oznaczona liczba dodatnia  $x'$ .

Ponieważ zaś miara elementu  $\mu$  równa się zeru, przeto na podstawie tw. IV-go § 102-go i równości (5) mamy na miarę  $x$  elementu  $e$  równanie

$$x + x' = 0,$$

skąd

$$x = -x'.$$

Założmy teraz, że jednostka miary  $u$  sprawdza nierówność

$$(6) \quad u < \mu,$$

i oznaczmy przez  $u'$  element symetryczny elementowi  $u$ . Mamy tedy

$$u' > \mu.$$

Zatem na podstawie wyniku, uzyskanego powyżej, będziemy mogli wyznaczyć miarę  $x'$  jakiegokolwiek elementu  $e$  zbioru ( $E$ ), gdy przyjmiemy element  $u'$  za jednostkę; w szczególności miara elementu  $u$ , gdy przyjmiemy element  $u'$  za jednostkę, równać się będzie liczbie

$$-1.$$

Z tego wynika, na podstawie tw. II-go z § 102-go, że miara  $x$  elementu  $e$ , gdy przyjmiemy element  $u$  za jednostkę, sprawdzać będzie równanie

$$(-1) \cdot x = x',$$

skąd

$$x = -x'.$$

Na podstawie poprzednich rozważań odpowiada każdemu układowi dwóch elementów  $u$  i  $e$  zbioru ( $E$ ) w przypadku, kiedy

element  $u$  modułowi dodawania  $\mu$  równy nie jest, oznaczona liczba  $x$ , której musiałaby równać się miara elementu  $e$ , w razie przyjęcia elementu  $u$  za jednostkę, gdyby problem mierzenia elementów zbioru  $(E)$  wogóle mógł być rozwiązany bez uchybienia zasadom z § 102-go. Możemy oczywiście niezależnie od tego, czy problem mierzenia elementów zbioru  $(E)$  jest wrzeczony sposób rozwiązalny, przyjąć liczbę  $x$  za miarę elementu  $e$  w razie przyjęcia elementu  $u$  za jednostkę i zbadać *a posteriori*, czy takie rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru  $(E)$  czyni zadość warunkom § 102-go.

Twierdzenie I-sze z § 102-go zachodzi tedy oczywiście.

Powiadam, że tw. II-gie tegoż paragrafu zachodzi także. Istotnie, oznaczmy przez  $u$  i  $u_1$  dwa jakiegokolwiek; byle od modułu dodawania  $\mu$  odmienne elementy zbioru  $(E)$ ,

przez  $e$  całkiem dowolnie przyjęty element zbioru  $(E)$ ,

przez  $x$  miarę elementu  $e$ , przyjmując element  $u$  za jednostkę,

przez  $x_1$  miarę elementu  $e$  w razie przyjęcia elementu  $u_1$  za jednostkę,

przez  $\lambda$  miarę elementu  $u_1$  w razie przyjęcia elementu  $u$  za jednostkę.

Chodzi tedy o uzasadnienie związku

$$x = x_1 \cdot \lambda. \quad (7)$$

W każdym razie zachodzić będzie jeden z układów nierówności następujących:

$$\left. \begin{array}{l} u > \mu \\ u_1 > \mu; \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} u > \mu \\ u_1 < \mu; \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} u < \mu \\ u_1 > \mu; \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} u < \mu \\ u_1 < \mu. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Załóżmy, że zachodzą nierówności (8). Jeżeli element  $e$  sprawdza związek

$$e \geq \mu, \quad (12)$$

to w takim razie elementy  $u$ ,  $u_1$  i  $e$  należą do zbioru  $(E')$  wszystkich elementów zbioru  $(E)$ , z których żaden nie jest mniejszy od elementu  $\mu$ . Zbiór  $(E')$  sprawdza warunki przypadku  $B$  zbadanego wyżej, a liczby  $x$ ,  $x_1$  i  $\lambda$  równają się w takim razie, na podstawie swej definicyi tym liczbom, które przedstawiają wartość stosunków

$$\frac{e}{u}, \quad \frac{e_1}{u_1} \quad \text{ i } \quad \frac{u_1}{u}$$

w tym przypadku, kiedy uważamy elementy  $u$ ,  $u_1$  i  $e$  za elementy zbioru  $(E')$ , wyznaczwszy wartości tych stosunków na podstawie reguł ustawionych przy badaniu przypadku  $B$ .

Zatem w razie nierówności (12) równość (7) zachodzi niezawodnie. Przypuśćmy, że mamy

$$e < \mu,$$

i oznaczmy przez  $e'$  element symetryczny elementowi  $e$ , przez  $x'$  — miarę elementu  $e'$ , przyjmując element  $u$  za jednostkę, a przez  $x'_1$  — miarę elementu  $e'$  w razie przyjęcia elementu  $u_1$  za jednostkę. Ponieważ mamy

$$e' > \mu,$$

przeto mamy na podstawie uwag, odnoszących się do przypadku, kiedy zachodzi nierówność (12), równość

$$x' = x'_1 \cdot \lambda,$$

a ponieważ mamy

$$x = -x' \quad \text{ oraz } \quad x_1 = -x'_1,$$

przeto równość (7) będzie także zachodzić.

Ostatecznie dowiedliśmy, że w razie nierówności (8) równość (7) zachodzi rzeczywiście.

Założmy, że zachodzą nierówności (9). Oznaczmy przez  $u'_1$  element symetryczny elementowi  $u_1$ , przez  $\lambda'$  miarę elementu  $u'_1$ , przyjmując element  $u$  za jednostkę, a przez  $x'_1$  miarę elementu  $e$ , przyjmując element  $u'_1$  za jednostkę. Ponieważ mamy

$$u'_1 > \mu,$$

przeto na podstawie wyniku, uzyskanego w przypadku, kiedy zachodzą nierówności (8), mamy

$$x = x'_1 \cdot \lambda',$$

a ponieważ mamy

$$\begin{aligned}x_1 &= -x' \\ \lambda &= -\lambda',\end{aligned}$$

przeto równość (7) zachodzi także i w przypadku obecnym.

Przejdźmy do przypadku, kiedy zachodzą nierówności (10). Oznaczmy przez  $u'$  element symetryczny elementowi  $u$ , przez  $x'$  i  $\lambda'$  miary elementów  $e$  i  $u_1$  w razie przyjęcia elementu  $u'$  za jednostkę.

Mamy tedy

$$x' = \lambda' \cdot x_1,$$

a ponieważ

$$x = -x', \quad \lambda = -\lambda',$$

przeto związek (7) zachodzi i w razie nierówności (10).

Pozostaje do zbadania przypadek, kiedy zachodzą nierówności (11). Oznaczmy przez  $u'_1$  element symetryczny elementowi  $u_1$ , przez  $\lambda'$  miarę elementu  $u'$ , przyjmując element  $u$  za jednostkę, a przez  $x'_1$  miarę elementu  $e$  w razie przyjęcia elementu  $u'_1$  za jednostkę. Ponieważ mamy

$$u'_1 > \mu,$$

przeto na podstawie wyniku uzyskanego w przypadku, kiedy zachodzą nierówności (11), mamy

$$x = \lambda' \cdot x'_1,$$

a ponieważ mamy

$$\lambda' = -\lambda, \quad x_1 = -x'_1,$$

przeto i w przypadku obecnym równość (7) zachodzi.

Ostatecznie dowiedliśmy, że równość (7) zachodzi w każdym razie; innemi słowy, rozważane rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru  $(E)$  czyni zadość temu wymaganiu, żeby tw. II-gie z § 102-go zachodziło.

Żeby dowieść, że rozwiązanie to czyni także zadość i temu żądaniu, żeby zachodziły tw. III-cie, IV-te i V-te z § 102-go, zwróćmy się najpierw do przypadku, kiedy jednostka miary  $u$  sprawdza nierówność

$$u > \mu \tag{13}$$

i oznaczmy przez  $e_1$ ,  $e_2$  i  $e_3$  trzy jakiekolwiek elementy zbioru  $(E)$ , a przez  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  odpowiednio miary tych elementów.



Jeżeli elementy  $e_1$  i  $e_2$  sprawdzają nierówności,

$$(14) \quad e_1 \geq \mu, \quad e_2 \geq \mu,$$

to elementy  $u$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  i  $e_3$  należą do zbioru  $(E')$  i z tej przyczyny związki

$$(15) \quad e_1 = e_2,$$

$$(16) \quad e_1 < e_2,$$

$$(17) \quad e_1 + e_2 = e_3$$

równoważne są odpowiednio związkom

$$(18) \quad x_1 = x_2,$$

$$(19) \quad x_1 < x_2,$$

$$(20) \quad x_1 + x_2 = x_3.$$

Załóżmy, że mamy

$$(21) \quad e_1 < \mu.$$

W razie równości (15) mamy tedy także i

$$(22) \quad e_2 < \mu,$$

a element  $e'_1$  symetryczny elementowi  $e_1$ , jest też symetryczny i elementowi  $e_2$ . Mamy więc

$$x_1 = -x'_1, \quad x_2 = -x'_1,$$

oznaczając przez  $x'_1$  miarę elementu  $e'_1$ .

Zatem równość (15) pociąga za sobą w każdym razie równość (18).

Przypuśćmy, że jednocześnie z nierównością (21) zachodzi nierówność (16). Jeżeli tedy element  $e_2$  od elementu  $\mu$  nie jest mniejszy, to miara jego równa się liczbie nie mniejszej od zera, a ponieważ ze względu na nierówność (21) miara elementu  $e_1$  jest od zera mniejsza, przeto w rozważanym przypadku nierówność (16) pociąga za sobą nierówność (19).

Załóżmy nareszcie, że zachodzą jednocześnie związki (16), (21) i (22), i oznaczmy przez  $e'_1$  i  $e'_2$  elementy symetryczne elementom  $e_1$  i  $e_2$ .

Na podstawie nierówności (16) i 3-ciej własności zbioru  $(E)$  mamy

$$e_1 + (e'_1 + e'_2) < e_2 + (e'_1 + e'_2),$$

czyli

$$(e_1 + e'_1) + e'_2 < (e_2 + e'_2) + e'_1,$$

skąd

$$e'_2 < e'_1,$$

ze względu na związki

$$e_1 + e'_1 = e_2 + e'_2 = \mu; \quad \mu + e'_2 = e'_2; \quad \mu + e'_1 = e'_2.$$

Ponieważ zaś mamy

$$e'_2 > \mu, \quad e'_1 > \mu,$$

przeto mamy

$$x'_2 > x'_1, \tag{23}$$

oznaczając przez  $x'_1$  i  $x'_2$  miary elementów  $e'_1$  i  $e'_2$ . Ale ponieważ mamy

$$x_1 = -x'_1, \quad x_2 = -x'_2,$$

przeto z nierówności (23) wynika nierówność (19).

Ostatecznie nierówność (16) pociąga za sobą w każdym razie nierówność (19).

Ponieważ na podstawie rozważań poprzedzających, związek (15) pociąga za sobą (18), a związek (16) — związek (19) bez żadnych zastrzeżeń co do elementów  $e_1$  i  $e_2$ , przeto odwrotnie, w razie istnienia związku (18) mamy związek (15), a w razie nierówności (19) nierówność (16), albowiem założenie, iż tak nie jest, doprowadziłoby oczywiście do sprzeczności. Dowiedliśmy więc, że związek (15) równoważny jest związkowi (18), a związek (16) — związkowi (19).

Zamierzamy teraz wykazać, że równości (17) i (20) są pomiędzy sobą równoważne bez żadnych zastrzeżeń co do elementów  $e_1$  i  $e_2$ . W tym celu czynimy najpierw ogólną uwagę następującą: jeżeli oznaczymy przez  $e'_1$  i  $e'_2$  elementy symetryczne odpowiednio elementom  $e_1$  i  $e_2$ , to sumy

$$e_1 + e_1 \quad \text{ i } \quad e'_1 + e'_2$$

równają się symetrycznym pomiędzy sobą elementom, albowiem mamy

$$(e_1 + e_2) + (e'_1 + e'_2) = (e_1 + e'_1) + (e_2 + e'_2) = \mu + \mu = \mu.$$

Zatem zachowując oznaczenia poprzedzające i oznaczając jeszcze przez  $e'_3$  element symetryczny elementowi  $e_3$ , możemy orzec, że równość (17) równoważna jest równości następującej:

$$e'_1 + e'_2 = e'_3. \tag{24}$$

Ponieważ mamy

$$x_1 = -x'_1, \quad x_2 = -x'_2, \quad x_3 = -x'_3,$$

oznaczając przez  $x'_1$ ,  $x'_2$  i  $x'_3$  miary elementów  $e'_1$ ,  $e'_2$  i  $e'_3$ , przeto w razie równoważności równości (24) i równości

$$(25) \quad x'_1 + x'_2 = x'_3$$

równości (17) i (20) będą pomiędzy sobą równoważne, a to ze względu na równoważność równości (17) i (24). Gdybyśmy mieli

$$e_3 < \mu,$$

to mielibyśmy

$$e'_3 > \mu,$$

zatem, pragnąc podać ogólny dowód równoważności równości (17) i (20), możemy bez szkody dla ogólności założyć, że mamy

$$(26) \quad e_3 \geq \mu.$$

Przyjmijmy to założenie. Mamy do zbadania przypadki, w których jeden przynajmniej ze związków (14) nie zachodzi. Ze względu na nierówność (26) nie może być jednocześnie

$$e_1 < \mu \quad \text{ i } \quad e_2 < \mu.$$

Zatem jedna tylko z tych nierówności zachodzić może. Przeto przez stosowny dobór oznaczeń, sprowadzamy ogólny przypadek do przypadku szczególnego, w którym mamy

$$e_1 > \mu \quad \text{ i } \quad e_2 < \mu.$$

Założmy, że nierówności te zachodzą, i oznaczmy przez  $e'_2$  element symetryczny elementowi  $e_2$ , a przez  $x'_2$  miarę elementu  $e'_2$ . Mamy tedy

$$(27) \quad x_2 = -x'_2.$$

Spostrzegamy z łatwością, że równość (17) równoważna jest równości

$$(28) \quad e_1 = e'_2 + e_3;$$

jeżeli bowiem dodamy do obu stron równości (17) element  $e'_2$ , to uzyskamy równość (28); jeżeli zaś dodamy obustronnie do równości (28) element  $e_2$ , to uzyskamy równość (17). Ponieważ żaden z elementów  $e_1$ ,  $e'_2$  i  $e_3$  od elementu  $\mu$  mniejszy nie jest, przeto równość (28) równoważna jest równości

$$x_1 = x'_2 + x_3,$$

która znów równoważna jest równości (20) na podstawie związku (27).  
Zatem równości (17) i (20) rzeczywiście równoważne są pomiędzy sobą bez żadnych zastrzeżeń co do elementów  $e_1$  i  $e_2$ .

Uzyskane wyniki stanowią oczywiście dowód na to, że jeżeli jednostka miary  $u$  jest od modułu dodawania większa, to omawiane rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru  $(E)$  czyni zadość wymaganiu, ażeby tw. III-cie, IV-te i V-te z § 102-go zachodziły. Z drugiej strony, jeżeli założymy, że mamy

$$u < \mu \quad (29)$$

i, zachowując znaczenia poprzedzające symbolów  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$ , oznaczmy jeszcze przez  $x'_1$ ,  $x'_2$  i  $x'_3$  miary elementów  $e_1$ ,  $e_2$  i  $e_3$ , przyjmąwszy za jednostkę element  $u'$ , symetryczny elementowi  $u$ , to ze względu na nierówność

$$u' > \mu,$$

którą sprawdzać będzie element  $u'$ , związki (15), (16) i (17) odpowiednio równoważne będą, na podstawie uzyskanych już wyników, związkom

$$\begin{aligned} x'_1 &= x'_2 \\ x'_1 &< x'_2 \\ x'_1 + x'_2 &= x'_3. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś mamy

$$x_1 = -x'_1, \quad x_2 = -x'_2, \quad x_3 = -x'_3,$$

przeto związki (15) i (17) odpowiednio równoważne będą związkom (18) i (20) i w przypadku obecnym. Zatem, przy rozważanym rozwiązaniu problemu mierzenia elementów zbioru  $(E)$ , tw. III-cie i IV-te z § 102-go zachodzić będą nawet w razie nierówności (29). Co się zaś tyczy związku (16), to w razie zakładanej obecnie nierówności (29), związek ten nie będzie równoważny nierówności (19) lecz nierówności

$$x_1 > x_2,$$

ale pomimo to i obecnie także miara elementu, położonego pomiędzy dwoma innymi elementami  $e$  i  $e'$ , równać się będzie liczbie, położonej pomiędzy miarami  $x$  i  $x'$  elementów  $e$  i  $e'$ , i odwrotnie, element, którego miara położona byłaby pomiędzy miarami elementów  $e$  i  $e'$ , byłby położony pomiędzy elementami  $e$  i  $e'$ . Stwier-

dzamy więc, że tw. V-te zachodzi także niezależnie od tego, czy jednostka miary mniejsza jest, czy większa od elementu  $\mu$ .

Z rozważań poprzedzających wynika, że to rozwiązanie problemu mierzenia elementów zbioru  $(E)$ , które stanowiło przedmiot dociekań poprzedzających, czyni zadość w zupełności wszystkim wymaganiom § 102-go i jest jedynem, które warunki te spełnia.

Ponieważ zbiór  $(E')$  wszystkich tych elementów zbioru  $(E)$ , z których żaden od elementu  $\mu$  mniejszy nie jest, stanowi zbiór wielkości bezwzględnych, ponieważ dalej każdemu elementowi zbioru  $(E')$  odpowiada symetryczny mu element w zbiorze  $(E)$ , przeto uwzględniając rozważania poprzedzające oraz pod  $B$  wyłożoną teorię zbiorów wielkości bezwzględnych, dochodzimy do wyniku następującego: *każdej liczbie wymiernej rzeczywistej odpowiada, przy oznaczonej jednostce miary, oznaczonej wartości element zbioru  $(E)$ , którego miarą jest właśnie rozważana liczba wymierna.* Natomiast jest rzeczą możliwą, że przy tychże warunkach nie każdej liczbie niewymiernej odpowiada taki element zbioru  $(E)$ , żeby miara jego tej liczbie była równa. Jeżeli jednak każdej liczbie rzeczywistej bez wyjątku odpowiada taki element zbioru  $(E)$ , którego miarą jest ta liczba, to w takim razie orzekamy, że zbiór  $(E)$  jest ciągłym zbiorem wielkości względnych.

Spostrzegamy z największą łatwością, że *warunek konieczny i wystarczający, ażeby pewien zbiór wielkości względnych był ciągłym zbiorem wielkości polega na tem, żeby każdy przekrój rozważanego zbioru był przekrojem pierwszego gatunku.*

W praktyce, rozważając zbiory wielkości względnych, urządzamy się zazwyczaj w ten sposób, żeby jednostka miary była od modułu dodawania większa. Wynik ten osiągamy albo drogą odpowiedniego wyboru jednostki miary, albo drogą stosownej zmiany umów, określających reguły porównywania ilościowego elementów rozważanego zbioru. Żeby się przekonać, że ostatnia droga do celu prowadzi, należy tylko zważyć, iż oznaczony zbiór wielkości względnych zbiorem takim być nie przestanie, jeżeli nie zmieniając ani definicyi równości, ani definicyi sumy dwóch elementów rozważanego zbioru, zmienimy reguły porównywania ilościowego nierównych pomiędzy sobą elementów w ten sposób, żeby po tej zmianie, związek

$$e < e'$$

wyrażał to, co wyrażał przed rozważaną zmianą związek

$$e > e'.$$

W paragrafie następującym podamy najbardziej typowy przykład ciągłego zbioru wielkości względnych. Przykład ten omówimy bardzo szczegółowo ze względu na jego wielkie znaczenie naukowe.

**§ 107. Pojęcie wektora.** Wektorem zwiemy oznaczone położenie w przestrzeni zajmujący odcinek prostoliniowy, którego jeden punkt końcowy, zwany początkiem wektora, został w jakikolwiek sposób wyróżniony od drugiego punktu końcowego, zwanego w takim razie końcem.

Oznaczając przez jakikolwiek symbol  $A$  początek wektora, a przez inny symbol  $B$  jego koniec, przyjmujemy za symbol samego wektora symbol

$$\overline{AB}.$$

Na podstawie definicyi tej symbole

$$\overline{AB} \text{ i } \overline{BA},$$

gdzie  $A$  i  $B$  są symbolami oznaczonych punktów, przedstawiają wektory pomiędzy sobą odmienne, jakkolwiek rozważane symbole, kiedy uważamy je za symbole odcinków prostoliniowych, oznaczają tenże sam odcinek.

Początek i koniec wektora obejmujemy wspólną nazwą jego punktów końcowych. Za zbiór wszystkich punktów oznaczonego wektora  $v$  uważamy zbiór wszystkich punktów odcinka prostoliniowego  $a$ , którego punkty końcowe zlewają się z punktami końcowymi rozważanego wektora. Długość odcinka prostoliniowego  $a$  zowie się długością wektora.

Wektor bywa często używany jako obraz geometryczny przemieszczenia prostoliniowego punktu, a w takim razie przyjmujemy za początek wektora początkowe położenie przemieszczanego punktu, a za koniec — położenie końcowe tegoż punktu.

Żeby wyrazić, iż jeden i drugi punkt końcowy oznaczonego wektora położone są na pewnej prostej nieograniczonej, orzekamy, że rozważany wektor położony jest na tej prostej. Żeby wyrazić, że prosta, na której położony jest pewien wektor leży w pewnej płaszczyźnie, orzekamy, że rozważany wektor położony jest w tej płaszczyźnie.

Na podstawie przyjętej definicyi, początek i koniec oznaczonego wektora muszą być odmiennymi pomiędzy sobą punktami.