

Z drugiej strony, jeżeli pewien zbiór liczb (Z) rzeczzone własności posiada, to obejmować on będzie, jako podzbiór, zbiór liczb, który oznaczyliśmy wyżej przez (W). Zatem, na podstawie tw. XII-go, twierdzenie, o które chodzi, rzeczywiście zachodzi w podanem brzmieniu.

§ 98. Jeżeli oznaczmy przez (Z) jakikolwiek zbiór liczb, byle sprawdzający warunki wykazu z § 96-go, to twierdzenia, uzasadnione w paragrafie poprzedzającym, oczywiście zachodzą nie przestaną, gdyż zbiór (Z) sprawdzałby w takim razie wszystkie założenia twierdzeń rzeczzonego paragrafu, ale wówczas wyniki uzyskane w paragrafie poprzedzającym będą mogły być uzupełnione. Takiemu właśnie uzupełnieniu wyników paragrafu poprzedzającego poświęcamy paragraf obecny, umawiając się jednocześnie, że symbol (Z) uważać będziemy we wszystkich rozważaniach paragrafu niniejszego za symbol zbioru liczb, posiadającego wszystkie własności, wyszczególnione w wykazie z § 96-go.

Na podstawie własności 11^o w § 96-tym (czyli postulatu Archimedes'a) i tw. IX-go paragrafu poprzedzającego zachodzi oczywiście twierdzenie następujące:

I. Jeżeli tylko liczba a zbioru (Z) sprawdza nierówność

$$a > \xi_0,$$

a symbol b oznacza dowolnie przyjętą liczbę ze zbioru (Z), to w takim razie istnieje zawsze w zbiorze liczb (Cb) taka liczba ξ_n , która czyni zadość nierówności

$$a \cdot \xi_n > b.$$

II. Jeżeli oznaczmy przez a i b dwie liczby zbioru (Z), to równość

$$(1) \quad a = b$$

równoważna jest równości

$$(2) \quad a - b = \xi_0,$$

a nierówność

$$(3) \quad a > b$$

— nierówności

$$(4) \quad a - b > \xi_0.$$

Istotnie, równość (2) oczywiście równoważna jest równości

$$(5) \quad a = b + \xi_0,$$

a ze względu na własność 4^o wykazu z § 96-go i na związki

$$\begin{aligned}(a - b) + b &= b \\ (b + \zeta_0) + (-b) &= \zeta_0,\end{aligned}$$

nierówność (4) równoważna jest nierówności

$$a > b + \zeta_0. \quad (6)$$

Ponieważ zaś związki (5) i (6) są, na podstawie definicyi modułu dodawania ζ_0 , równoważne odpowiednio związkom (1) i (3), przeto te ostatnie są, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, odpowiednio równoważne związkom (2) i (4).

III. Jeżeli każda z dwóch liczb a i b zbioru (Z) jest od modułu dodawania ζ_0 odmienna, to wyrażenia

$$ab \quad \text{ i } \quad a : b$$

równają się odpowiednio liczbom większym od liczby ζ_0 w razie, kiedy liczba ζ_0 nie jest liczbą pośrednią pomiędzy liczbami a i b ; jeżeli zaś liczba ζ_0 jest liczbą pośrednią pomiędzy temi liczbami, to każde z rozważanych wyrażeń równa się liczbie mniejszej od liczby ζ_0 .

Istotnie, jeżeli liczba a nie jest większa od liczby ζ_0 , to liczba symetryczna tej liczbie będzie od liczby ζ_0 większa, a to na podstawie uwagi E przy własności 5^o wykazu z § 96-go. Zatem istnieje pewna liczba A , większa od liczby ζ_0 , która jest przytem albo równa, albo symetryczna liczbie a . Analogicznie istnieje pewna liczba B równa albo symetryczna liczbie b , ale w każdym razie od liczby ζ_0 większa.

Posługując się tedy znakowaniem, określonym w paragrafie poprzedzającym, możemy przedstawić wszystkie możliwe przypadki w sposób następujący: mamy albo

$$\text{albo} \quad a = +A, \quad b = +B,$$

$$\text{albo} \quad a = -A, \quad b = +B,$$

$$\text{albo} \quad a = +A, \quad b = -B,$$

$$\text{albo} \quad a = -A, \quad b = -B.$$

Opierając się na tw. III-cim paragrafu poprzedzającego, sprawdzamy natychmiast, że twierdzenie, które pragniemy uzasadnić, zachodzi co do iloczynu

$$a \cdot b.$$

Przyjawszy

$$x = a : b,$$

mamy

$$x \cdot b = a,$$

a stąd, opierając się na tem, że o ile chodzi o iloczyn, udowodni-
liśmy już rozważane twierdzenie, z łatwością wnosimy że twierdzenie,
to zachodzi także i co do ilorazu.

IV. Jeżeli tylko pewna liczba a zbioru (Z) sprawdza nierówność

$$(1) \quad a > \xi_0,$$

to w takim razie nierówność

$$(2) \quad b < c,$$

gdzie oznaczyliśmy przez b i c dwie nowe liczby zbioru (Z) , równo-
ważna jest nierówności

$$(3) \quad ab < ac.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, przyjmijmy

$$(4) \quad x = c - b.$$

Mamy tedy

$$c = b + x,$$

zatem

$$(5) \quad ac = ab + ax.$$

W razie nierówności (2), mamy

$$(6) \quad x > \xi_0,$$

na podstawie tw. II-go. Zatem na podstawie nierówności (1) i wa-
runku 9-go wykazu z § 96-go mamy i

$$(7) \quad ax > \xi_0,$$

a ponieważ z równości (5) mamy

$$(8) \quad ac - ab = ax$$

przeto mamy

$$ac - ab > \xi_0$$

ze względu na (7). Opierając się na tw. II-giem, wnosimy natych-
miast z uzyskanych nierówności nierówność (3).

Założmy obecnie, że zachodzi nierówność (3). W takim razie,
na podstawie równości (3) i tw. II-go mamy nierówność (7).

Ze względu na nierówność (1), na tw. III-cie i na uwagę B przy 6-tej własności zbioru (Z) (§ 96) nierówność (7) nie mogłaby zachodzić ani w razie równości

$$x = \xi_0,$$

ani w razie nierówności

$$x < \xi_0.$$

Mamy więc

$$x > 0,$$

która, ze względu na (4) i na tw. II-gie równoważna jest nierówności (2).

Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

V. Podzbiór zbioru liczb (Z), który oznaczyliśmy przez (W) w paragrafie poprzedzającym, izomorficzny jest w znaczeniu ściślejszem zbiorowi (R) wszystkich liczb rzeczywistych wymiernych.

Ponieważ na podstawie tw. XII-go paragrafu poprzedzającego zbiór (W) izomorficzny jest zbiorowi (R) przynajmniej w znaczeniu szerszem, przeto, żeby uzasadnić powyższe twierdzenie, należy tylko dowieść, że przy zachowaniu tej odpowiedności wzajemnej liczb zbioru (W) i liczb rzeczywistych wymiernych, którą określiliśmy w paragrafie poprzedzającym, zachodzi okoliczność następująca: jeżeli oznaczymy przez w i w' dwie jakiegokolwiek liczby zbioru (W), a przez l i l' liczby wymierne rzeczywiste, odpowiednio odpowiadające liczbom w i w' , to nierówności

$$w < w' \quad \text{ i } \quad l < l'$$

są pomiędzy sobą równoważne.

W tym celu udowodnimy najpierw, że twierdzenie zachodzi w przypadku bardzo szczególnym, kiedy mamy

$$l = 0, \quad l' = 1.$$

Mamy tedy

$$w = \xi_0, \quad w' = \xi_1,$$

chodzi więc o uzasadnienie nierówności

$$\xi_1 > \xi_0, \tag{1}$$

która wyraża, że moduł mnożenia liczb zbioru (Z) większy jest od modułu dodawania.

Otóż, jeżeli oznaczymy, zgodnie z ogólną umową, przyjętą w paragrafie poprzedzającym, przez

$$-\zeta_1$$

liczbę symetryczną liczbie ζ_1 , to na podstawie tw. III-go rzeczowego paragrafu mieć będziemy

$$(2) \quad \zeta_1 \cdot \zeta_1 = (-\zeta_1) \cdot (-\zeta_1),$$

a ponieważ (własności 5^o, uw. E przy wyk. w § 96-tym) zachodzi niezawodnie albo nierówność

$$\zeta_1 > 0,$$

albo

$$-\zeta_1 > 0,$$

przeto (wł. 9^o wykazu z § 96-go) jeden z iloczynów

$$\zeta_1 \cdot \zeta_1 \quad \text{ i } \quad (-\zeta_1) \cdot (-\zeta_1)$$

jest większy od ζ_0 . Zatem na podstawie równości (2) każdy z tych iloczynów większy jest od ζ_0 . Mamy więc

$$(3) \quad \zeta_1 \cdot \zeta_1 > \zeta_0.$$

Ponieważ zaś symbol ζ_1 przedstawia moduł mnożenia, przeto mamy

$$\zeta_1 \cdot \zeta_1 = \zeta_1.$$

Zatem nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (1), którą właśnie pragnęliśmy udowodnić.

Opierając się na uwadze B przy warunku 5-tym wykazu w § 96-tym, oraz (str. 380) na równości

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \zeta_1$$

i na nierówności (1) stwierdzamy łatwo drogą indukcji matematycznej, że nierówności

$$p < n \quad \text{ i } \quad \zeta_p < \zeta_n$$

są pomiędzy sobą równoważne. Wnosimy stąd natychmiast, że zbiór liczb, który oznaczyliśmy w paragrafie poprzedzającym przez (Cb), jest, przy obecnych założeniach, izomorficzny w znaczeniu ściślejszym zbiorowi liczb całkowitych bezwzględnych.

Uważajmy teraz dwie liczby u i u' tego zbioru, który oznaczyliśmy w paragrafie poprzedzającym przez (Wb) . Na podstawie definicyi (str. 382) liczb tych mamy

$$\begin{aligned} u \cdot \zeta_p &= \zeta_m \\ u' \cdot \zeta_{p'} &= \zeta_{m'}, \end{aligned}$$

oznaczając przez ζ_p i $\zeta_{p'}$ dwie od liczby ζ_0 odmienne liczby zbioru (Cb) , a przez ζ_m i $\zeta_{m'}$ dwie jakiekolwiek liczby tegoż zbioru. Równości powyższe równoważne są odpowiednio równościom

$$\begin{aligned} u \cdot \zeta_p \cdot \zeta_{p'} &= \zeta_m \cdot \zeta_{p'} \\ u' \cdot \zeta_{p'} \cdot \zeta_p &= \zeta_{m'} \cdot \zeta_p, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} u \cdot \zeta_{p \cdot p'} &= \zeta_{m \cdot p'} \\ u' \cdot \zeta_{p \cdot p'} &= \zeta_{m' \cdot p} \end{aligned}$$

skąd

$$(u - u') \zeta_{p \cdot p'} = \zeta_{m \cdot p'} - \zeta_{m' \cdot p}.$$

Zważywszy, że mamy

$$\zeta_{p \cdot p'} > \zeta_0,$$

wnosimy z łatwością z powyższej równości, opierając się przytem na tw. III-ciem, że związek

$$u' < u \tag{4}$$

równoważny jest związkowi

$$\zeta_{m' \cdot p} < \zeta_{m \cdot p'},$$

który równoważny jest związkowi

$$m' \cdot p < m \cdot p', \tag{5}$$

gdyż dowiedliśmy przed chwilą, że zbiór liczb (Cb) izomorficzny jest w znaczeniu ściślejszem zbiorowi liczb całkowitych bezwzględnych. Ale nierówność (5) jest, na podstawie teoryi liczb ułamkowych, równoważna równości

$$\frac{m'}{p'} < \frac{m}{p}. \tag{6}$$

Zatem, nierówność (4) równoważna jest nierówności (6). Stąd wnosimy natychmiast, że zbiór liczb, który oznaczyliśmy w paragrafie poprzedzającym przez (Wb) , izomorficzny jest w znaczeniu ściślejszem zbiorowi liczb ułamkowych bezwzględnych, a więc i zbiór

rowi liczb wymiernych bezwzględnych, który izomorficzny jest w znaczeniu ściślejszem zbiorowi liczb ułamkowych bezwzględnych.

Uważajmy obecnie dwie nierówne pomiędzy sobą liczby jakiegokolwiek zbioru (W) i oznaczmy przez w mniejszą z nich, a przez w' drugą. Mamy tedy

$$(7) \quad w < w'$$

oraz

$$(8) \quad \begin{cases} w = u - v \\ w' = u' - v', \end{cases}$$

oznaczając przez u, v, u' i v' pewne liczby należące do zbioru (Wb).

Na podstawie nierówności (7) i własności 4^o wykazu w § 96-tym, mamy najpierw

$$w + v < w' + v,$$

skąd znowu

$$w + v + v' < w' + v + v',$$

skąd nareszcie

$$(9) \quad u + v' < u' + v,$$

na podstawie wzorów (8) i reguł rachunkowych, uzasadnionych w paragrafie poprzedzającym. Odwrotnie, jeżeli zachodzi nierówność (9), to zachodzi także nierówność (7), albowiem w razie przeciwnym mielibyśmy albo

$$w = w',$$

albo

$$w > w'.$$

Otóż w pierwszym przypadku mielibyśmy wbrew założeniu

$$u + v' = u' + v,$$

a w drugim ze względu na uzyskany przed chwilą wynik, zachodziłaby z nierównością (9) sprzeczna nierówność

$$u + v' > u' + v.$$

Ostatecznie związki (7) i (9) są pomiędzy sobą równoważne. Oznaczmy przez a, b, a' i b' liczby wymierne bezwzględne, homologiczne odpowiednio liczbom u, v, u' i v' zbioru (Wb) i przyjmijmy

$$(10) \quad \begin{cases} l = a - b \\ l' = a' - b'. \end{cases}$$

Liczby l i l' będą liczbami wymiernymi rzeczywistymi, homologicznymi odpowiednio liczbom w i w' , a na podstawie izomorfizmu w znaczeniu ściślejszym zbioru (Wb) i zbioru liczb wymiernych bezwzględnych, nierówność (9) równoważna jest nierówności

$$a + b' < a' + b,$$

która znów, na podstawie wzorów (10) równoważna jest następującej:

$$l < l', \quad (11)$$

zatem nierówności (7) i (11) są pomiędzy sobą równoważne.

Stwierdzamy więc, że zbiór liczb (W) rzeczywiście jest w znaczeniu ściślejszym izomorficzny zbiorowi liczb rzeczywistych wymiernych.

VI. *Jakąkolwiek liczbę zbioru (Z) oznaczilibyśmy przez x , zawsze istnieć będą dwie takie liczby w i w' w podzbiorze (W) zbioru (Z) , że*

$$w' < x < w. \quad (1)$$

Istotnie, ponieważ mamy

$$\xi_1 > \xi_0,$$

przeto, na podstawie tw. I-go, zawsze istnieć będzie w zbiorze (Cb) liczba ξ_n , sprawdzająca nierówność

$$\xi_n \cdot \xi_1 > x,$$

a ponieważ

$$\xi_n \cdot \xi_1 = \xi_n,$$

przeto mieć będziemy

$$\xi_n > x. \quad (2)$$

Oznaczmy przez x' liczbę symetryczną liczbie x . W takim razie, na tychże podstawach, co przed chwilą, istnieć będzie w zbiorze (Cb) pewna liczba ξ_p , która sprawdzać będzie nierówność

$$\xi_p > x'.$$

Oznaczmy przez ξ'_p liczbę symetryczną liczbie ξ_p . Mamy tedy

$$\xi_p + \xi'_p + x > x' + \xi'_p + x$$

na podstawie własności 4^o wykazu w § 96-tym, a ze względu na własności przemienności i łączności dodawania liczb zbioru (Z) wynika stąd, że mamy

$$(\xi_p + \xi'_p) + x > (x' + x) + \xi'_p,$$

skąd

$$(3) \quad x > \zeta_p,$$

na podstawie związków

$$\zeta_p + \zeta_p' = \zeta_0 \quad \text{i} \quad x' + x = \zeta_0.$$

Liczby ζ_n i ζ_n' należą oczywiście do zbioru (W). Zatem możemy przyjąć

$$w' = \zeta_p', \quad w = \zeta_n,$$

a w takim razie, na podstawie nierówności (2) i (3) zachodzić będą nierówności (1). Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

VII. Jeżeli dwie liczby zbioru (Z) równe pomiędzy sobą nie są, to istnieje zawsze w podzbiorze (W) zbioru (Z) liczba większa od mniejszej x z rozważanych liczb, ale mniejsza od większej y .

Zwróćmy się najpierw do przypadku szczególnego, kiedy mamy

$$(4) \quad x = \zeta_0,$$

a zatem

$$(5) \quad y > \zeta_0.$$

Ze względu na tę nierówność i na tw. I-sze znajdzie się zawsze w zbiorze (Ob) taka liczba ζ_n , żebyśmy mieli

$$(6) \quad y \cdot \zeta_n > \zeta_1.$$

Ponieważ na podstawie tw. V-go zbiór liczb (W) jest ściśle izomorficzny zbiorowi liczb wymiernych, a liczby ζ_0 i $\frac{\zeta_1}{\zeta_n}$ są odpowiednio homologiczne liczbom wymiernym

$$0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{n},$$

przeto mamy

$$(7) \quad \frac{\zeta_1}{\zeta_n} > 0.$$

Opierając się na tej nierówności i na tw. IV-tym spostrzegamy, że nierówność (6) pociąga za sobą nierówność

$$(8) \quad y \cdot \zeta_n \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_n} > \zeta_1 \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_n}.$$

Ponieważ zaś mamy

$$y \cdot \zeta_n \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_n} = y \cdot \zeta_1 = y$$

oraz

$$\zeta_1 \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_n} = \frac{\zeta_1 \cdot \zeta_1}{\zeta_n} = \frac{\zeta_1}{\zeta_n},$$

przeto z nierówności (8) wynika nierówność

$$y > \frac{\zeta_1}{\zeta_n}.$$

Z nierówności (7) i (9) wynika, że liczba

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_n}, \quad (9)$$

należąca do zbioru (W), jest liczbą pośrednią pomiędzy liczbą $x = \zeta_0$ a liczbą y .

Zatem uzasadniliśmy twierdzenie w tym szczególnym przypadku, o który na razie chodziło.

Przechodząc do przypadku ogólnego, zważmy (tw. II), że mamy

$$y - x > \zeta_0.$$

Zatem, na podstawie uzyskanego przed chwilą wyniku, istnieje będzie w zbiorze (W) liczba a , sprawdzająca nierówność

$$y - x > a > \zeta_0. \quad (10)$$

Z drugiej strony, na podstawie tw. VI-go, istnieje niezawodnie w zbiorze (W) liczba w_0 , sprawdzająca nierówność

$$w_0 < x. \quad (11)$$

Ze względu na drugą z nierówności (10) i na tw. I-sze, istnieje w zbiorze (Ob) liczba ζ_n , sprawdzająca nierówność

$$x - w_0 < \zeta_n a,$$

skąd

$$x < w_0 + \zeta_n a. \quad (12)$$

Uważajmy ciąg skończony o $n + 1$ wyrazach

$$w_0, w_1, w_2, \dots, w_n, \quad (13)$$

którego pierwszy wyraz stanowi liczba w_0 , a każdy dalszy wynika z poprzedzającego na podstawie wzoru

$$(14) \quad w_{k+1} = w_k + a,$$

Drogą indukcji matematycznej łatwo stwierdzamy, że mamy

$$w_{k+1} = w_0 + \zeta_{k+1} \cdot a,$$

skąd wynika, że mamy

$$w_n = w_0 + \zeta_n a,$$

Zatem ze względu na (12), mamy jeszcze

$$(15) \quad x < w_n,$$

Ponieważ na podstawie drugiego ze związków (10) i równości (14) mamy

$$w_{k+1} - w_k > \zeta_0,$$

przeto w ciągu (16) drugi wyraz i każdy dalszy większy jest (tw. IV) od wyrazu, który go bezpośrednio poprzedza.

Z uwagi tej wnosimy łatwo, opierając się na nierównościach (11) i (15), że w ciągu (16) znajdują się dwa wyrazy sąsiednie w_i i w_{i+1} , sprawdzające związki

$$(16) \quad w_i \leq x$$

$$(17) \quad w_{i+1} > x.$$

Z pierwszej z nierówności (10) wnosimy natychmiast, że mamy

$$y > x + a,$$

a z nierówności (16) — że mamy

$$w_i + a \leq x + a.$$

Z ostatnich dwóch nierówności mamy

$$\text{czyli} \quad w_i + a < y$$

$$(18) \quad w_{i+1} < y.$$

Ponieważ liczba w_{i+1} , należąca do zbioru (W), sprawdza nierówności (17) i (18), przeto uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

VIII. *Wartość takiej liczby zbioru (Z), która położona jest na oznaczonym przekroju (§ 90) zbioru liczb (W), oznaczona jest w zu-*

pełności; innemi słowy, dwie nierówne pomiędzy sobą liczby zbioru (Z) nie mogą być położone na tym samym przekroju zbioru liczb (W).

Istotnie, oznaczmy przez x i y dwie nierówne pomiędzy sobą liczby ($x < y$) zbioru (Z). Gdyby liczby te położone były na tym samym przekroju zbioru liczb (W), to wbrew twierdzeniu poprzedzającemu żadna liczba zbioru (W) nie mogłaby być jednocześnie większą od liczby x i większą od liczby y . Zatem wysłowione twierdzenie jest uzasadnione.

IX. Każdej liczbie zbioru (Z) odpowiada jeden przynajmniej przekrój zbioru (W), na którym liczba ta jest położona.

Istotnie, uważajmy jakąkolwiek liczbę x zbioru (Z) i oznaczmy przez (X_1) zbiór wszystkich tych liczb zbioru (W), z których każda mniejsza jest od liczby x , a przez (X_2) zbiór wszystkich tych liczb zbioru (W), z których każda większa jest od tejże liczby x . Na podstawie tw. VI-go każdy ze zbiorów (X_1) i (X_2) obejmować będzie nieskończenie wiele liczb zbioru (W). Jeżeli wogóle istnieje taki przekrój (P) zbioru liczb (W), na którym położona byłaby liczba x , to liczby zbioru (X_1) należą do 1-szej kategorii liczb zbioru (W) w stosunku do przekroju (P), a liczby zbioru (X_2) — do zbioru 2-giej kategorii w stosunku do tegoż przekroju. W przypadku, kiedy sama liczba x do zbioru (W) nie należy, każda liczba zbioru (W) należy do jednego ze zbiorów (X_1) lub (X_2). W takim razie zbiór (X_1) przedstawia zbiór liczb 1-szej kategorii, a zbiór liczb (X_2) zbiór liczb 2-giej kategorii w stosunku do pewnego przekroju (II) zbioru liczb (W). Ponieważ liczba x tylko na przekroju tym zbioru (W) położona być może, ponieważ z drugiej strony liczba x na rzeczonym przekroju oczywiście leży, przeto w rozważanym przypadku istnieje jeden i tylko jeden przekrój zbioru liczb (W), a mianowicie przekrój (II), na którym leży liczba x .

Jeżeli zaś liczba x należy sama do zbioru (W), to ze względu na uwagę uczynioną wyżej, liczba x położona być może tylko na takim przekroju zbioru liczb (W), który zlewa się z jednym z tych dwóch przekrojów (II_1) i (II_2) zbioru (W), które określić możemy w sposób następujący: w stosunku do każdego z nich każda liczba zbioru (X_1) jest liczbą 1-szej kategorii, a każda liczba zbioru (X_2) drugiej, sama zaś liczba x jest liczbą 1-szej kategorii w stosunku do przekroju (II_1), ale drugiej w stosunku do przekroju (II_2). Ponieważ zaś liczba x oczywiście leży na obu przekrojach (II_1) i (II_2), przeto w rozważanym przypadku odpowiadają liczbie x dwa, ale

tylko dwa, takie przekroje zbioru (W), żeby ta liczba położona była na każdym z nich, a mianowicie przekrój (II_1) i przekrój (II_2).

Uzasadniliśmy zatem w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Obecnie przechodzimy do uzasadnienia twierdzenia, o które nam głównie chodzi, a które opiewa, jak następuje:

X. *Zbiór liczb (Z) izomorficzny jest w znaczeniu ściślejszem pewnemu podzbiorkowi (R') zbioru liczb rzeczywistych, mogącemu zlewać się z pełnem zbiorem (R) tychże liczb.*

Żeby twierdzenie to uzasadnić, wprowadzamy najpierw definicyę następującą:

Oznaczmy przez (W_1) 1-szą kategorię liczb zbioru (W) w stosunku do pewnego przekroju (P) tego zbioru, a przez (W_2) 2-gą kategorię liczb zbioru (W) w stosunku do tegoż przekroju; oznaczmy dalej przez (\mathfrak{B}_1) 1-szą, a przez (\mathfrak{B}_2) 2-gą kategorię liczb wymiernych rzeczywistych w stosunku do pewnego przekroju (\mathfrak{P}) zbioru tychże liczb. Żeby wyrazić, że każdej liczbie jednego ze zbiorów (W_1) i (\mathfrak{B}_1) odpowiada w drugim zbiorze liczba homologiczna ze stanowiska uzasadnionego wyżej izomorfizmu ścisłego zbiorów (W) i (\mathfrak{B}), a każdej liczbie jednego ze zbiorów (W_2) i (\mathfrak{B}_2) liczba homologiczna z tegoż stanowiska w drugim, orzekać będziemy, że przekroje (P) i (\mathfrak{P}) są homologicznymi przekrojami zbiorów liczb (W) i (\mathfrak{B}).

Spostrzegamy natychmiast, że każdemu przekrojowi jednego ze zbiorów (W) i (\mathfrak{B}) odpowiada zawsze w drugim zbiorze jeden i tylko jeden przekrój homologiczny rozważanemu przekrojowi pierwszego zbioru. Równie łatwo spostrzegamy, że dwie liczby homologiczne ściśle izomorficznych zbiorów (W) i (\mathfrak{B}) zawsze uważane być mogą, jako położone na homologicznych przekrojach tychże zbiorów liczb.

Żeby wyrazić, że pewna liczba zbioru (Z) i pewna liczba zbioru liczb rzeczywistych (R) uważane być mogą za liczby położone odpowiednio na homologicznych przekrojach zbiorów (W) i (\mathfrak{B}), orzekamy, że liczby te są podobnemi pomiędzy sobą liczbami zbiorów (Z) i (R).

Na podstawie tej umowy dwie liczby homologiczne zbiorów (W) i (\mathfrak{B}) przedstawiają oczywiście parę liczb podobnych zbiorów (Z) i (R'). Każdej liczbie zbioru (Z) odpowiada na podstawie tw. IX-go pewien przekrój zbioru (W), na którym ona jest położona, a ponieważ do każdego przekroju zbioru (W) należy przekrój homologiczny zbioru (\mathfrak{B}), przeto do każdej liczby zbioru (Z)

należy podobna jej liczba w zbiorze (R) , gdyż każdemu przekroju zbioru liczb rzeczywistych wymiernych odpowiada położona na przekroju tym liczba rzeczywista, ale oczywiście niekoniecznie należy odwrotnie do każdej liczby zbioru (R) podobna jej liczba w zbiorze (Z) , ponieważ nie przyjęliśmy żadnych takich założeń, z których wynikałoby, że na każdym przekroju zbioru (\mathfrak{B}) leży pewna liczba zbioru (Z) .

Oznaczmy przez (R') zbiór wszystkich tych liczb zbioru (R) , z których każda „podobna“ jest pewnej liczbie zbioru (Z) .

Powiadam, że zbiory liczb (Z) i (R) są ściśle izomorficzne, a za liczby homologiczne w tych zbiorach uważane być mogą w znaczeniu dopiero co określonym podobne pomiędzy sobą liczby rzeczonych zbiorów.

Rodzaj odpowiedniości podobnych pomiędzy sobą liczb zbiorów (Z) i (R') sprawdza oczywiście dwa pierwsze warunki izomorfizmu. Chodzi więc tylko o okazanie, że odpowiedniość ta także czyni zadość 3-mu i 4-mu warunkowi.

Oznaczmy tedy przez a i v dwie jakiegokolwiek liczby zbioru (Z) a przez α i β liczby zbioru (R') , podobne odpowiednio liczbom a i v

Założmy, że zachodzi równość

$$a = v. \quad (1)$$

Jeżeli tedy jedna z liczb a lub v należy do zbioru (W) , to druga także należy do tegoż zbioru, a liczby α i β są, na podstawie uwag poczynionych wyżej, liczbami wymiernymi, homologicznymi liczbom a i v .

Mamy tedy ze względu na izomorfizm zbiorów (W) i (\mathfrak{B})

$$\alpha = \beta. \quad (2)$$

Jeżeli zaś jedna z liczb a i v do zbioru (W) nie należy, to druga do tego zbioru także nie należy, obie te liczby są w takim razie położone na pewnym tym samym przekroju (P) zbioru (W) , a każda z liczb α i β położona jest na homologicznym przekrojowi (P) zbioru (W) przekroju zbioru (\mathfrak{B}) .

Ponieważ tylko równe pomiędzy sobą liczby rzeczywiste położone być mogą na tym samym przekroju zbioru liczb wymiernych, przeto i w obecnym przypadku zachodzić będzie równość (2). Zatem w każdym razie równość (1) pociąga za sobą równość (2).

Założmy obecnie, że zachodzi równość (2). Jeżeli tedy jedna

z liczb a lub v jest liczbą wymierną, to druga jest także liczbą wymierną, a liczby a i v należą w takim razie do zbioru (W) i ze względu na izomorfizm zbiorów (W) i (\mathfrak{W}) równość (1) będzie spełniona. Jeżeli zaś jedna z liczb a lub v jest liczbą niewymierną, to druga jest także liczbą niewymierną i obie są położone na pewnym tym samym przekroju (\mathfrak{P}) zbioru liczb wymiernych. Zatem liczby a i v położone są na pewnym tym samym przekroju liczb zbioru (W) , a mianowicie na przekroju homologicznym przekrojowi (\mathfrak{P}) zbioru (W) . Z tego wynika, na podstawie tw. VIII-go, że zachodzić będzie równość (2). Ostatecznie równości (1) i (2) są pomiędzy sobą równoważne.

Założmy teraz, że liczby a i v są nierówne pomiędzy sobą, i przyjmijmy oznaczenia tak, żebyśmy mieli

$$(3) \quad a < v.$$

Przypuśćmy najpierw, że liczba a należy do zbioru (W) . W takim razie nierówność (3) wyraża, że liczba a jest liczbą 1-szej kategorii w stosunku do tego przekroju (P) zbioru (W) , na którym położona jest liczba v . Zatem podobna liczbie a liczba α zbioru (\mathfrak{W}) należeć będzie do 1-szej kategorii liczb w stosunku do homologicznego przekrojowi (P) przekroju (\mathfrak{P}) zbioru (\mathfrak{W}) liczb wymiernych. Liczba α na przekroju (\mathfrak{P}) położona być nie może, bo liczba v na tym przekroju leży i zachodziłaby zatem równość (2), która, na podstawie już uzyskanych wyników, pociągnęłaby za sobą niezgodną z nierównością (3) równość (1).

Skoro liczba α na przekroju (\mathfrak{P}) położona nie jest, to jako należąca do 1-szej kategorii liczb wymiernych w stosunku do przekroju (\mathfrak{P}) , mniejsza być musi od liczby v , położonej na przekroju (\mathfrak{P}) . Mamy więc

$$(4) \quad \alpha < v.$$

Całkiem analogicznie dowiedlibyśmy, że nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (4) i w tym razie, kiedy mamy pewność, że liczba v należy do zbioru (W) . Pozostaje więc tylko do rozważenia przypadek, w którym żadna z liczb a i v do zbioru (W) nie należy. Możemy tedy, na podstawie tw. VII-go, wyznaczyć taką liczbę w zbioru (W) , która sprawdzałaby nierówności

$$a < w$$

$$w < v.$$

Oznaczmy przez w podobną liczbę w liczbie zbioru (3). Na podstawie uzyskanych przed chwilą wyników, nierówności poprzedzające pociągają za sobą nierówności następujące:

$$\begin{aligned} a &< w \\ w &< v, \end{aligned}$$

skąd wynika nierówność (4). Ostatecznie, nierówność (3) pociąga za sobą w każdym razie nierówność (4). Odwrotnie, jeżeli zachodzi nierówność (4), to zachodzi niezawodnie i nierówność (3), gdyż na podstawie uzyskanych już wyników przypuszczenie, iż zachodzi albo równość

$$a = v,$$

albo nierówność

$$a > v$$

doprowadza do następstw niezgodnych z nierównością (4).

Dowiedliśmy więc, że nierówności (3) i (4) są pomiędzy sobą równoważne. Zatem trzeci warunek ścisłego izomorfizmu zbiorów (Z) i (R') jest spełniony.

Przechodząc do warunku czwartego, oznaczmy przez g i g dwie liczby „podobne“, należące odpowiednio do zbiorów (Z) i (R') ; załóżmy następnie, że zachodzi nierówność

$$g = a + v, \quad (5)$$

i oznaczmy przez (W_1) zbiór wszystkich tych liczb zbioru (W) , z których każda albo równa się sumie dwóch liczb zbioru (W) odpowiednio mniejszych od liczb a i v , albo jest mniejsza przynajmniej od jednej takiej sumy. Każda liczba zbioru (W_1) mniejsza jest oczywiście od liczby g . Powiadam, że odwrotnie, każda liczba zbioru (W) , która mniejsza jest od liczby g , należy do zbioru (W_1) . Istotnie, oznaczmy przez w jakąkolwiek taką liczbę zbioru (W) , żebyśmy mieli

$$w < g, \quad (6)$$

i przyjmijmy

$$b = w - a.$$

Mamy tedy

$$v - b = v - (w - a) = a + v - w,$$

skąd

$$v - b = g - w \quad (7)$$

na podstawie równości (5).

Ponieważ mamy

$$g - w > \xi_0$$

na podstawie nierówności (6) (tw. II), przeto z równości (7) mamy

$$v - b > \xi_0,$$

czyli (tw. II)

$$v > b.$$

Zatem (tw. VII) w zbiorze (W) istnieje pewna liczba v' , sprawdzająca nierówności

$$(8) \quad v > v' > b.$$

Przyjmijmy

$$(9) \quad a' = w - v'.$$

Mamy tedy

$$a - a' = a + v' - w,$$

a ponieważ mamy

$$w = a + b,$$

przeto

$$a - a' = v' - b,$$

skąd, ze względu na jedną z nierówności (8), wynika nierówność

$$a - a' > \xi_0,$$

czyli

$$(10) \quad a > a'.$$

Z równości (9) mamy

$$w = a' + v',$$

a ponieważ liczby a' i v' są liczbami zbioru (W), sprawdzającymi nierówność (10) oraz, na podstawie jednej z nierówności (8), nierówność

$$v' < v,$$

przeto liczba w rzeczywiście należy do zbioru (W_1).

Z rozważań tych wynika natychmiast, że suma g liczb a i v leży na tym przekroju (P) zbioru (W) w stosunku do którego zbiór (W_1) stanowi zbiór liczb 1-szej kategorii liczb zbioru (W), a zbiór (W_2) wszystkich innych liczb zbioru (W) — zbiór liczb 2-giej kategorii. Oznaczmy odpowiednio przez (\mathfrak{B}_1) i (\mathfrak{B}_2) zbiory liczb wymiernych 1-szej i 2-giej kategorii w stosunku do przekroju (\mathfrak{B}) liczb wymiernych, homologicznego przekrojowi (P) zbioru (W) i uważajmy sumę

$$a + v.$$

Oznaczmy przez g' jakąkolwiek liczbę zbioru (\mathfrak{B}_1) , a przez g' liczbę homologiczną w zbiorze (W) . Ze względu na homologiczność przekrojów (P) i (\mathfrak{B}) , liczba g' należy będzie do zbioru (W_1) . Mamy więc

$$g' \leq a' + v'$$

oznaczając przez a' i v' dwie liczby zbioru (W) , odpowiednio mniejsze od liczb a i v . Jeżeli więc oznaczmy przez a' i v' liczby wymierne homologiczne liczbom a' i v' zbioru (W) , to ze względu na uzyskane już wyniki i na izomorfizm w znaczeniu ścisłym zbiorów (W) i (\mathfrak{B}) mieć będziemy

$$a' < a, \quad v' < v$$

oraz

$$g' \leq a' + v'.$$

Mamy więc

$$g' < a + v.$$

Zatem każda liczba zbioru (\mathfrak{B}_1) mniejsza jest od sumy liczb a i v .

Założmy obecnie, że pewna liczba w zbioru (\mathfrak{B}) sprawdza nierówność

$$w < a + v.$$

W takim razie będziemy mogli wyznaczyć takie dwie liczby w_1 i w_2 zbioru (\mathfrak{B}) , żebyśmy mieli

$$w \leq w_1 + w_2$$

oraz

$$w_1 < a, \quad w_2 < v.$$

Oznaczmy przez w , w_1 i w_2 liczby zbioru (W) odpowiednio homologiczne liczbom w , w_1 i w_2 zbioru (\mathfrak{B}) . Ze względu na powyższe nierówności, na ścisły izomorfizm zbiorów (W) i (\mathfrak{B}) oraz na to, żeśmy już dowiedli, iż rozważana odpowiedniość wzajemna liczb zbiorów (Z) i (R') sprawdza trzy pierwsze warunki ścisłego izomorfizmu, mamy

$$w \leq w_1 + w_2$$

$$w_1 < a, \quad w_2 < v,$$

skąd wynika, że liczba w należy do zbioru (W_1) . Ale skoro liczba w należy do zbioru (W_1) , to liczba w należy musi do zbioru (\mathfrak{B}_1) . Zatem każda od sumy liczb a i v mniejsza liczba zbioru (\mathfrak{B}) należy

do zbioru (\mathfrak{B}_1) . Z tego zaś wynika, że wszelka liczba wymierna g'' , należąca do zbioru (\mathfrak{B}_2) , sprawdza związek

$$g'' \geq a + v.$$

Ostatecznie suma liczb a i v położona jest na przekroju (\mathfrak{P}) zbioru liczb (\mathfrak{B}) homologicznym przekrojowi (P) zbioru liczb (W) , na którym położona jest suma liczb a i v . Zatem równość (5) pociąga za sobą równość

$$(11) \quad g = a + v.$$

Odwrotnie, jeżeli i w dalszym ciągu oznaczać będziemy przez g i g dwie „podobne“ pomiędzy sobą liczby, należące odpowiednio do zbiorów (Z) i (R') , to równość (11) pociągać będzie za sobą równość (5). Istotnie, przyjmijmy

$$(12) \quad g_1 = a + v$$

i oznaczmy przez g_1 liczby zbioru (R') podobną liczbie g_1 zbioru (Z) . Na podstawie uzyskanych już wyników mamy

$$g_1 = a + v,$$

zatem

$$(13) \quad g_1 = g$$

ze względu na (11). Ponieważ zaś rozważana odpowiedniość wzajemna liczb zbiorów (Z) i (R') sprawdza trzy pierwsze warunki ścisłego izomorfizmu, przeto równość (13) pociąga za sobą równość

$$g_1 = g,$$

która znów, ze względu na (12), pociąga za sobą równość (5).

Dowiedliśmy więc, że rozważana odpowiedniość wzajemna liczb zbiorów (Z) i (R') sprawdza czwarty warunek izomorfizmu, o ile chodzi o dodawanie. Żeby dowieść, iż warunek ten spełniony jest i co do mnożenia, zachowajmy poprzednie znaczenie dla symbolów a , v , a i v i zakładając na początek, że mamy

$$(14) \quad a > \xi_0, \quad v > \xi_0,$$

przyjmijmy

$$(15) \quad \varphi = a \cdot v$$

$$(16) \quad \psi = a \cdot v.$$

Oznaczmy przez (W_1) zbiór wszystkich tych liczb zbioru (W_1) , z których każda albo równa jest iloczynowi dwóch liczb zbioru (W)

odpowiednio mniejszych od liczb a i v , ale większych od liczby ζ_0 , albo mniejsza jest od tegoż iloczynu.

Każda liczba w_1 zbioru (W_1) mniejsza jest od liczby φ , określonej równaniem (15). Istotnie, mamy

$$w_1 \leq a' \cdot v', \quad (17)$$

oznaczając przez a' i v' pewne dwie takie liczby zbioru (W) , które sprawdzają nierówność

$$\left. \begin{array}{l} \zeta_0 < a' < a \\ \zeta_0 < v' < v. \end{array} \right\} \quad (18)$$

Na podstawie tw. IV-go i nierówności powyższych, mamy

$$a'v' < a'v < av,$$

a z nierówności tych i związków (15) i (17) wynika nierówność

$$w_1 < \varphi, \quad (19)$$

która właśnie wyraża, iż każda liczba zbioru (W_1) mniejsza jest od liczby φ .

Odwrotnie, każda liczba zbioru (W) , mniejsza od liczby φ , należy do zbioru (W_1) . Twierdzenie to wymaga oczywiście dowodu tylko o tyle, o ile chodzi o liczby większe od liczby ζ_0 ; założmy więc, że pewna, od liczby ζ_0 większa, liczba w_1 zbioru (W) sprawdza nierówność (19) i przyjmijmy

$$a'' = w_1 : v,$$

co mamy prawo uczynić, ze względu na drugą z nierówności (14). Mamy tedy

$$w_1 = a'' \cdot v, \quad (20)$$

oraz ze względu na tw. III-cie

$$a'' > \zeta_0. \quad (21)$$

Ponieważ na podstawie związków (15), (19) i (20) mamy

$$a'' \cdot v < a \cdot v,$$

przeto ze względu na drugą z nierówności (14) i na tw. IV-te mamy

$$a'' < a.$$

Na podstawie tw. VII-go istnieć będzie w zbiorze (W) taka liczba a' , która sprawdzać będzie nierówności

$$(22) \quad a'' < a' < a,$$

a więc i nierówność

$$(23) \quad a' > \xi_0$$

ze względu na (21). Możemy zatem przyjąć

$$\text{skąd} \quad v' = w_1 : a',$$

$$(24) \quad w_1 = a' \cdot v'.$$

Ponieważ założyliśmy, że liczba w_1 sprawdza nierówność

$$w_1 > \xi_0,$$

przeto ze względu na nierówność (23) i na tw. III-cie zachodzić będzie nierówność

$$(25) \quad v' > \xi_0.$$

Z drugiej znów strony, na podstawie tw. IV-go, jednej z nierówności (22) i jednej z nierówności (14), mamy

$$(26) \quad a'' \cdot v < a' \cdot v,$$

a ponieważ z równości (20) i (24) wynika równość

$$a' \cdot v' = a'' \cdot v,$$

przeto, ze względu na (26), mamy

$$a' \cdot v' < a' \cdot v,$$

skąd, opierając się na tw. IV-tem i na nierówności (23), wnosimy, że mamy

$$(27) \quad v' < v.$$

Zestawiając nierówność tę z nierównością (25), a nierówność (23) z nierównością

$$a' < a,$$

która jest jedną z nierówności (22), uwzględniając przytem równość (24), stwierdzamy natychmiast, że liczba w_1 rzeczywiście należy do zbioru (W_1).

Powiadam, że liczba φ położona jest na tym przekroju (P) zbioru liczb (W), względem którego zbiór liczb (W_1) stanowi zbiór

liczb 1-szej kategorii, a zbiór wszystkich innych liczb zbioru (W) — zbiór (W_2) liczb 2-giej kategorii zbioru (W). Istotnie, dowiedliśmy wyżej, że każda liczba zbioru (W_1) mniejsza jest od liczby φ , a z drugiej strony żadna liczba zbioru (W_2) nie może być mniejsza od liczby φ , bośmy dowiedli przed chwilą, że każda liczba zbioru (W), mniejsza od liczby φ , należy do zbioru (W_1). Zatem liczba φ leży rzeczywiście na przekroju (P).

Oznaczmy przez (\mathfrak{B}) przekrój zbioru liczb (\mathfrak{B}) homologiczny przekrojowi (P) zbioru liczb (W), przez (\mathfrak{B}_1) zbiór liczb 1-szej kategorii zbioru (\mathfrak{B}) w stosunku do przekroju (\mathfrak{B}), a przez (\mathfrak{B}_2) zbiór liczb 2-giej kategorii zbioru (\mathfrak{B}) w stosunku do tegoż przekroju.

Każda liczba (w_1) zbioru (\mathfrak{B}_1) mniejsza jest od liczby ψ , określonej równaniem (16). Istotnie, oznaczmy przez w_1 liczbę zbioru (W) homologiczną liczbie w_1 zbioru (\mathfrak{B}). Liczba w_1 należeć będzie do zbioru (W_1). Zatem znajdują się w zbiorze (W) dwie liczby a' i v' , sprawdzające nierówności (17) i (18).

Liczby wymierne a' i v' , odpowiednio homologiczne liczbom a' i v' zbioru (W), sprawdzać będą ze względu na to, że rozważana odpowiedniość liczb zbiorów (Z) i (R') czyni zadość trzem pierwszym warunkom ścisłego izomorfizmu tych zbiorów liczb i ze względu na nierówności (18), nierówności następujące:

$$0 < a' < a, \quad 0 < v' < v, \quad (28)$$

a ponieważ zbiory liczb (W) i (\mathfrak{B}) są pomiędzy sobą izomorficzne w znaczeniu ścisłym, przeto nierówność (17) pociągać będzie za sobą nierówność

$$w_1 \leq a' \cdot v'. \quad (29)$$

Ale z nierówności (28) wynika nierówność

$$a' \cdot v' < a \cdot v.$$

Zatem, na podstawie wzoru (16), mamy

$$w_1 < \psi, \quad (30)$$

o co właśnie chodziło.

Odwrotnie, jeżeli pewna liczba wymierna w_1 sprawdza nierówność (30), to liczba ta należy do zbioru (\mathfrak{B}_1). Istotnie, w razie nierówności (30) istnieć będą liczby wymierne a' i v' , sprawdzające nierówności (28) i (29). Liczby a' , v' i w' zbioru (W), odpowiednio homologiczne liczbom a' , v' i w_1 zbioru (\mathfrak{B}) sprawdzać będą

związki (17) i (18). Zatem liczba w_1 należeć będzie do zbioru (W_1) a więc liczba w_1 , zgodnie z zapowiedzią — do zbioru (\mathfrak{B}_1).

Dowiedliśmy wyżej, że liczba ψ większa jest od każdej liczby zbioru (\mathfrak{B}_1), a każda liczba mniejsza od liczby w należy do zbioru (\mathfrak{B}_1). Z tego wynika, że żadna liczba zbioru (\mathfrak{B}_2) od liczby ψ mniejsza być nie może. Zatem liczba ψ leży na przekroju (\mathfrak{P}) i jest z tej przyczyny liczbie φ podobną liczbą zbioru (R').

W dalszym ciągu nie będziemy już zakładać, że zachodzą nierówności (14), i uważać będziemy liczby a i v za dwie dowolnie przyjęte liczby ze zbioru (Z).

Jakiegokolwiek liczby zbioru (Z) oznaczałyby symbole a i v , możemy zawsze przyjąć

$$(31) \quad \begin{cases} a = a_1 - a_2 \\ v = v_1 - v_2, \end{cases}$$

oznaczając przez a_1, a_2, v_1 i v_2 pewne liczby zbioru (Z) od liczby ξ_0 większe. Oznaczmy przez a_1, a_2, v_1 i v_2 liczby zbioru (R') odpowiednio podobne liczbom poprzedzającym zbioru (Z).

Ponieważ dowiedliśmy już, że rozważana odpowiedniość wzajemna liczb zbiorów (Z) i (R') sprawdza trzy pierwsze warunki ścisłego izomorfizmu oraz, o ile chodzi o dodawanie, i warunek czwarty, ponieważ nadto liczba „zero” zbioru (\mathfrak{B}) homologiczna jest liczbie ξ_0 zbioru (W), przeto zachodzą okoliczności następujące:

1°. Każda z liczb a_1, a_2, v_1 i v_2 jest od zera większa.

2°. Równości

$$\begin{aligned} a + a_2 &= a_1, \\ v + v_2 &= v_1, \end{aligned}$$

wynikające z równości (31), pociągają za sobą równości

$$\begin{aligned} a + a_2 &= a_1, \\ v + v_2 &= v_1, \end{aligned}$$

które znów równoważne są równościom

$$(32) \quad \begin{cases} a = a_1 - a_2 \\ v = v_1 - v_2. \end{cases}$$

Zatem równości (31) pociągają za sobą równości (32).

Na podstawie wzorów (31) mamy

$$(33) \quad av = G_1 - G_2,$$

przyjmując

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 \\ G_2 &= a_1 \cdot v_2 + a_2 \cdot v_1. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Oznaczmy przez \mathfrak{G}_1 i \mathfrak{G}_2 elementy zbioru (R') odpowiednio podobne elementom G_1 i G_2 zbioru (Z). Ponieważ każda z liczb a_1 , a_2 , v_1 i v_2 zbioru (Z) większa jest od liczby ξ_0 , a każda z liczb homologicznych α_1 , α_2 , ν_1 i ν_2 ze zbioru (R') większa jest od zera, przeto, na podstawie wyników uzyskanych wyżej, liczby zbioru (Z) przedstawiające odpowiednio wartości iloczynów

$$a_1 v_1, \quad a_2 v_2, \quad a_1 v_2 \quad \text{ i } \quad a_2 v_1$$

są odpowiednio podobne liczbom zbioru (R'), przedstawiającym odpowiednio wartości iloczynów

$$\alpha_1 \nu_1, \quad \alpha_2 \nu_2, \quad \alpha_1 \nu_2 \quad \text{ i } \quad \alpha_2 \nu_1,$$

a ponieważ rozważana odpowiedniość wzajemna liczb zbiorów (Z) i (R') sprawdza trzy pierwsze warunki izomorfizmu dwóch zbiorów wielkości oraz, o ile chodzi o dodawanie, także i czwarty warunek, przeto równości (34) pociągają za sobą równości

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{G}_1 &= \alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 \\ \mathfrak{G}_2 &= \alpha_1 \nu_2 + \alpha_2 \nu_1. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Na podstawie wzorów (32) i (35) mamy

$$\alpha \cdot \nu = \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2. \quad (36)$$

Oznaczmy teraz przez g i \mathfrak{g} dwie liczby podobne pomiędzy sobą, należące odpowiednio do zbiorów (Z) i (R'). Gdybyśmy założyli, że mamy

$$g = \alpha \cdot \nu, \quad (37)$$

to na podstawie równości (33) mielibyśmy

$$g + G_2 = G_1, \quad (38)$$

a równość ta pociągałaby za sobą równość

$$\mathfrak{g} + \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1, \quad (39)$$

gdyż ten rodzaj odpowiedniości wzajemnej pomiędzy elementami zbioru (Z) a elementami zbioru (R'), przy której umówiliśmy się, że odpowiadające sobie wzajemnie elementy obu zbiorów nazywać

będziemy elementami „podobnymi“ czyni zadość, jakieśmy widzieli wyżej, trzem pierwszym warunkom izomorfizmu rozważanych zbiorów oraz, o ile chodzi o dodawanie, i warunkowi 4-temu. Zważywszy teraz, że równość (32) równoważna jest równości

$$(40) \quad g = \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2,$$

która znów na podstawie równości (36) pociąga za sobą równość

$$(41) \quad g = a \cdot b,$$

stwierdzamy, że równość (37) pociąga za sobą równość (41). Gdybyśmy założyli, że liczba g sprawdza równanie (41), to stwierdzilibyśmy kolejno, opierając się przytem na tychże podstawach co przed chwilą, że równości (41) i (36) pociągają za sobą równość (39), że równość (39) pociąga za sobą równość (38), z której znów wynika równość (37). Zatem równość (41) pociąga za sobą równość (37). Ponieważ zaś dowiedliśmy wyżej, że równość (37) pociąga za sobą równość (41), przeto stwierdzamy ostatecznie, że równości (37) i (41) są pomiędzy sobą równoważne. Ale to tylko pozostawało do stwierdzenia, żeby okazać, iż ustawiona przez nas odpowiedniość wzajemna elementów zbioru (Z) i elementów zbioru (R') czyni zadość wszystkim warunkom ścisłego izomorfizmu tych zbiorów.

Ponieważ zbiór (R') jest podzbiorem zbioru (R) wszystkich liczb rzeczywistych, ponieważ nadto wydarzyć się może, że zbiór (R') zlewa się ze zbiorem (R) , gdyż okoliczność ta nastąpiłaby niezawodnie już w razie, gdyby, co wykluczonem oczywiście nie jest, zbiór (Z) zlewał się ze zbiorem (R) , przeto uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

§ 99. Paragraf ten poświęcamy zestawieniu głównych wyników, uzyskanych w dwóch paragrafach poprzedzających.

Twierdzenie X-te paragrafu poprzedzającego oczywiście równoważne jest twierdzeniu wysłowionemu w § 96-tym. Zatem twierdzenie to winniśmy uważać za uzasadnione.

Jeżeli tedy umówimy się, że zbiory liczb pomiędzy sobą ściśle izomorficzne uważać będziemy za odmienne postaci tej samej rzeczy, to możemy wysłowić twierdzenie następujące:

I. *Pełny zbiór liczb rzeczywistych jest najszerszym zbiorem liczb, sprawdzającym warunki § 96-go.*

Zważmy obecnie, że w paragrafie poprzedzającym przekonaliśmy się, że zbiór liczb, sprawdzający warunki § 96-go, zawsze

obejmuje pewien zbiór liczb (W) ściśle izomorficzny zbiorowi liczb rzeczywistych wymiernych i sprawdzający sam wszystkie wspomniane warunki. Mamy zatem twierdzenie następujące:

II. *Zbiór liczb rzeczywistych wymiernych jest najwęższym zbiorem liczb, sprawdzającym warunki § 96-go.*

Porównyując własności zbioru liczb całkowitych bezwzględnych z własnościami zbioru (Z), wyszczególnionymi w § 96-tym, spostrzegamy natychmiast, że wspomniany zbiór posiada wszystkie rzeczzone własności z wyjątkiem trwałości odejmowania i dzielenia. Możemy więc orzec, że urzeczywistnienie własności trwałości odejmowania i dzielenia drogą rozszerzenia, pierwotnie do pojęcia liczby całkowitej bezwzględnej zacieśnionego pojęcia liczby, z konieczności prowadzi do pojęcia liczb ułamkowych i liczb ujemnych.

Oczywiście nie istnieje konieczność jednoczesnego wprowadzania własności trwałości odejmowania i własności trwałości dzielenia. Możemy sobie postawić problem rozszerzenia zacieśnionego pierwotnie pojęcia liczby do pojęcia liczby całkowitej w taki sposób, żeby urzeczywistniona była tylko którakolwiek jedna z własności poprzedzających.

Gdybyśmy pragnęli urzeczywistnić tylko własność trwałości dzielenia, to najprostsze rozwiązanie problemu stanowiłby zbiór liczb wymiernych bezwzględnych. Gdybyśmy natomiast zapragnęli urzeczywistnić tylko własność trwałości odejmowania, to najprostsze rozwiązanie problemu stanowiłby zbiór liczb całkowitych rzeczywistych (dodatnich, zerowych i ujemnych).

Całkiem inna jest droga, która prowadzi od ogólnego pojęcia liczby wymiernej do ogólnego pojęcia liczby rzeczywistej: dochodzimy do ogólnego pojęcia liczby rzeczywistej, stawiając sobie problem ustawienia możliwie szerokiego, pierwotnie do liczby wymiernej zacieśnionego pojęcia liczby w taki sposób, żeby nowemu pojęciu liczby przysługiwały pewne podstawowe własności liczb wymiernych. Uwagę tę wysławiamy krótko, orzekając, że od pojęcia liczby wymiernej dochodzimy do ogólnego pojęcia liczby rzeczywistej, urzeczywistniając własność zupełności zbioru liczb, sprawdzających oznaczone warunki.

§ 100. Przy wprowadzeniu jakiegokolwiek zbioru liczb (Z), który nie byłby izomorficzny ani zbiorowi liczb rzeczywistych, ani żadnemu podzbiorowi tego zbioru liczb, stosujemy się zwykle do tej zasady, żeby w znaczeniu, określonym w § 96-tym, zbiór (Z)

należał do kategorii najszerszych zbiorów liczb, sprawdzających pewien układ warunków (U) bardziej szerokich, ale nie sprzecznych z układem warunków (U_0), wyszczególnionych w § 96-tym i na podstawie tw. X-go § 98-go, charakterystycznych dla zbioru liczb rzeczywistych. Natychmiastowem następstwem powyższej zasady i definicyi wyrażenia „kategoria najszerszych zbiorów liczb, sprawdzających pewne warunki“, jest ta okoliczność, że zbiór liczb rzeczywistych (R) izomorficzny będzie pewnemu podzbiorowi (R_1) zbioru (Z). Ponieważ tedy, na podstawie tw. II-go § 95-go, możemy, nie powodując zmiany natury zbioru (Z), zespolić ze zbiorem tym zbiór (R), przeto w rzeczywistości zawsze dokonywamy tego zespolenia, z czem łączy się ta korzyść, iż przy rozważaniu zbioru (Z) możemy posługiwać się liczbami rzeczywistymi w miejsce liczb zbioru (R), dla których, wobec tego, wyrabianie odpowiedniej terminologii i symbolistyki staje się rzeczą zbędną.

Kończymy rozdział obecny na tych ogólnych uwagach, odkładając dalsze rozwijanie pojęcia liczby do jednego z późniejszych rozdziałów.
