

gającego na tem, że *zbiór liczb rzeczywistych należy do kategorii najszerszych zbiorów liczb, posiadających własności wyszczególnione w powyższym wykazie.*

Zbiór liczb rzeczywistych oczywiście posiada wszystkie własności wyszczególnione w powyższym wykazie. Chodzi więc tylko o podanie dowodu na to, że zbiór ten jest typem najszerszych zbiorów liczb, posiadających wspomniane własności. Żeby przy rozwijaniu tego dowodu należycie uwidocznić znaczenie względne warunków twierdzenia, zbadamy najpierw własności, jakie miałyby zbiór liczb ( $Z$ ) w przypadku, w którymby spełniał tylko częściowo warunki powyższego wykazu. Przedmiotowi temu poświęcamy paragraf następujący.

§ 97. Zaznaczamy przedewszystkiem, że rozważania, którym poświęcamy paragraf niniejszy, nie będą oparte na założeniu, że zbiór liczb ( $Z$ ) sprawdza pierwszy warunek w wykazie z paragrafu poprzedzającego. Nie wykluczamy więc przypadku, z którym zbiór ( $Z$ ) byłby zbiorem wielkości tylko w znaczeniu szerszem. Wobec tego 4-ty i 9-ty z warunków wspomnianego wykazu muszą albo odpaść całkiem, albo być zastąpione przez warunki inne, a mianowicie takie, którym mógłby czynić zadość i taki zbiór liczb, który byłby zbiorem wielkości tylko w znaczeniu szerszem. W rzeczywistości postawimy na miejscu tych dwóch warunków inne bardziej ogólne.

Co do warunków pozostałych, to wyjąwszy warunek 11-ty, który usuniemy, zachowamy je wszystkie bez zmiany. Nie poprzestaniemy jednak na wysłowieniu warunków, przez które zamierzamy zastąpić 4-ty i 9-ty warunek wykazu z paragrafu poprzedzającego, a podamy natomiast pełny wykaz założeń o zbiorze liczb ( $Z$ ), na których jedynie opierać będziemy nasze badania w paragrafie niniejszym, dołączając przytem do niektórych z tych założeń pewne uwagi. W taki sposób kosztem niewielkiej liczby dodanych wierszów w tekście usuniemy możebność wszelkiego nieporozumienia.

Zakładamy tedy, że zbiór liczb ( $Z$ ) sprawdza warunki następujące:

- 1°. *Dodawanie liczb zbioru ( $Z$ ) jest, zgodnie z zasadami rozdziału V-go, działaniem jednoznacznem, wykonalnem bez zastrzeżeń.*
- 2°. *Dodawanie liczb zbioru ( $Z$ ) posiada własność przemienności bez względu na liczbę składników.*

Zatem na tychże podstawach, co w paragrafie poprzedzającym, zachodzą okoliczności następujące:

- A) Dodawanie liczb zbioru (Z) posiada własność łączności.
- B) Dla liczb zbioru (Z) istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania.
- 3°. Jeżeli dwie liczby  $b$  i  $b'$  zbioru (Z) sprawdzają nierówność

$$b \neq b',$$

to w takim razie mamy

$$a + b \neq a + b',$$

jakkolwiek liczbę zbioru (Z) oznaczylibyśmy przez  $a$ .

Zatem z tychże przyczyn, co w paragrafie poprzedzającym, odejmowanie w teorii liczb zbioru (Z) jest, w razie wykonalności, działaniem jednoznaczem.

4°. Odejmowanie liczb zbioru (Z), jednoznaczne na podstawie warunku poprzedzającego, wykonalne jest bez zastrzeżeń.

Możemy dowieść, rozumując tak samo, jakśmy rozumowali, uzasadniając uwagi uczynione przy 5-tym warunku wykazu z paragrafu poprzedzającego, że zachodzą okoliczności następujące:

- A) W zbiorze (Z) istnieje moduł dodawania.

Moduł dodawania liczb zbioru (Z) oznaczmy przez  $\mu$ , jak w paragrafie poprzedzającym.

B) Każdej liczbie  $l$  zbioru (Z) odpowiada symetryczna jej liczba  $l'$ , czyli taka, która sprawdza równanie

$$l + l' = \mu.$$

C) Jeżeli dwie liczby zbioru (Z) są pomiędzy sobą symetryczne, to liczby te są albo obie równe liczbie  $\mu$ , albo obie od tej liczby odmiennie; dwie liczby, symetryczne pewnej tej samej liczbie, są pomiędzy sobą równe.

5°. Mnożenie liczb zbioru (Z) jest zgodnie z ogólnymi zasadami rozdziału V-go działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

6°. Mnożenie liczb zbioru (Z) posiada własność rozdzielnosci w stosunku do dodawania.

Możemy dowieść, rozumując znowu całkiem tak, jakśmy rozumowali w paragrafie poprzedzającym, że zachodzą twierdzenia następujące:

A) Mnożenie liczb zbioru (Z) posiada własność rozdzielnosci w stosunku do odejmowania.

B) Jeżeli choćby tylko jeden z czynników iloczynu jakichkolwiek

liczb, należących do zbioru  $(Z)$ , równał się modułowi dodawania  $\mu$ , to i sam iloczyn równa się  $\mu$ .

C) Jeżeli w iloczynie jakichkolwiek liczb zbioru  $(Z)$  zastąpimy jeden z czynników przez liczbę czynnikowi temu symetryczną, to liczba, przedstawiająca wartość rozważanego iloczynu, przemieni się na liczbę jej symetryczną.

7°. Mnożenie liczb zbioru  $(Z)$  posiada własności przemienności, bez względu na liczbę czynników.

Wnosimy stąd, opierając się na tychże podstawach, co w paragrafie poprzedzającym, że zachodzą twierdzenia następujące:

A) Mnożenie liczb zbioru  $(Z)$  posiada własność łączności.

B) Dla liczb zbioru  $(Z)$  istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia.

8°. Jeżeli żadna z pewnych dwóch liczb zbioru  $(Z)$  modułowi dodawania  $\mu$  równa nie jest, to iloczyn tych liczb także będzie od  $\mu$  odmienny.

Ponieważ stwierdziliśmy w paragrafie poprzedzającym, że własność ta iloczynu dwóch liczb zbioru  $(Z)$  zachodziłaby niezawodnie, gdyby zbiór  $(Z)$  spełniał warunek 9-ty wykazu, podanego w tymże paragrafie, ponieważ z drugiej strony dyskusya, którą będziemy mieli sposobność przeprowadzić później, wykaże, że istnieją zbiory liczb, spełniające warunki wykazu z paragrafu poprzedzającego aż do warunku 8-go włącznie, i czyniące nadto zadość obecnie rozważanemu warunkowi wykazu obecnego, ale nie sprawdzające warunku 9-go wykazu paragrafu poprzedzającego, przeto możemy słusznie powiedzieć, że warunek 8-my wykazu obecnego szerszym jest od warunku 9-go wykazu z paragrafu poprzedzającego.

W paragrafie poprzedzającym dowiedliśmy, że uwagi wysłowione pod A i B przy warunku 9-tym stanowią następstwa tej okoliczności, iż rozważany tam zbiór liczb posiada własność 8-mą wykazu obecnego. Zatem mamy i obecnie twierdzenia następujące:

A) Iloczyn jakichkolwiek od liczby  $\mu$  odmiennych liczb zbioru  $(Z)$  równa się liczbie od liczby  $\mu$  odmiennej.

B) Jeżeli przy dzieleniu liczb zbioru  $(Z)$  dzielnik jest liczbą od liczby  $\mu$  odmienną, to dzielenie jest, w razie wykonalności, działaniem jednoznacznem.

9°. Dzielenie liczb zbioru  $(Z)$  jest, w razie kiedy dzielnik nie jest równy modułowi dodawania  $\mu$ , zawsze wykonalne.

Z tych samych przyczyn, co w paragrafie poprzedzającym, dajemy własności tej nazwę trwałości dzielenia.

Zestawiając warunek ten z uwagą  $B$  przy warunku 6-tym, z uwagą  $B$  przy warunku 7-ym oraz z uwagą  $B$  przy warunku 8-ym, spostrzegamy natychmiast, że mamy twierdzenie następujące:

*Jeżeli przy dzieleniu liczb zbioru  $(Z)$  dzielnik jest od liczby  $\mu$  odmienny, to dzielenie jest działaniem jednoznacznie wykonalnem; jeżeli zaś dzielnik równa się liczbie  $\mu$ , to dzielenie jest wykonalne tylko w razie, kiedy dzielna także równa się liczbie  $\mu$ , ale wówczas iloraz jest całkiem nieoznaczony.*

Nie zastanawiając się na razie nad związkami natury logicznej, które zachodzić mogą pomiędzy własnościami zbioru  $(Z)$ , wyszczególnionymi w powyższym wykazie, który w dalszym ciągu zawsze cytować będziemy pod nazwą *wykazu* z § 97-go, przechodzimy do wysnuwania następstw logicznych tych własności.

Wynik kolejnego wykonania oznaczonego ciągu skończonego działań zasadniczych na skończonej liczbie oznaczonych liczb nazywamy zgodnie z umową, przyjętą w § 31-szym, wymierną kombinacją tych liczb. Jakikolwiek rodzaj liczb rozważalibyśmy, możemy zawsze przekształcić oznaczoną kombinację wymierną liczb rozważanego rodzaju na inne, równowartościowe kombinacje wymierne tychże liczb, chociażby żadna z nich liczbowo oznaczona nie była.

Oдноsne reguły stanowią to, co nazwać możemy formalną stroną teorii rozważanego rodzaju liczb.

Zwracając się do zbioru liczb  $(Z)$ , sprawdzającego wyszczególnione dopiero co warunki, omówimy najpierw formalną stronę teorii tych liczb, o ile ona nie jest natychmiastowem następstwem własności, łączności i przemienności dodawania i mnożenia oraz własności rozdzielnosci mnożenia w stosunku do dodawania; ale przedtem uwydatnimy pewne ogólne fakty.

Uwaga  $A$  przy wł. 7<sup>o</sup> zbioru  $(Z)$  jest oczywiście szczególnym przypadkiem ogólnego twierdzenia, które opiewa jak następuje:

*I. Jeżeli działanie dodawania na elementach jakiegokolwiek zbioru wielkości  $(\Phi)$  zostało określone w taki sposób, żeby samo to działanie posiadało własności łączności i przemienności, a działanie odejmowania było działaniem jednoznacznem, wykonalnem bez zastrzeżeń, to w zbiorze  $(\Phi)$  istnieje moduł dodawania.*

Czytelnik sam uzasadni z łatwością to twierdzenie, uprzytomniwszy sobie dowód uwagi  $A$  przy wł. 5<sup>o</sup> wykazu paragrafu poprzedzającego.

Jeżeli pewien zbiór wielkości  $(W)$  sprawdza założenie tego

twierdzenia, to w takim razie dwa elementy zbioru  $(\Phi)$  zowią się symetrycznymi pomiędzy sobą elementami, jeżeli suma ich równa się modułowi dodawania. Uwagi, podane pod  $B$  i  $C$  przy własności 4<sup>o</sup> liczb zbioru  $(Z)$ , pozostają oczywiście słuszne i w tym przypadku, kiedy podstawimy na miejsce elementów zbioru  $(Z)$  elementy zbioru  $(\Phi)$ .

II. Oznaczmy przez  $(\Phi)$  jakikolwiek zbiór wielkości, sprawdzający założenie twierdzenia I-go, a więc zbiór, którego szczególnym przypadkiem jest zbiór liczb  $(Z)$ . Jeżeli tedy oznaczmy przez  $\alpha$  i  $\beta$  dwa jakiekolwiek elementy zbioru  $(W)$ , a przez  $\beta'$  element symetryczny elementowi  $\beta$ , to w takim razie zachodzi równość następująca:

$$(1) \quad \alpha - \beta = \alpha + \beta'.$$

Istotnie, przyjmijmy

$$(2) \quad x = \alpha + \beta'.$$

Mamy tedy

$$x + \beta = (\alpha + \beta') + \beta = \alpha + (\beta' + \beta),$$

a ponieważ suma

$$\beta' + \beta$$

równa się modułowi dodawania, przeto

$$x + \beta = \alpha,$$

skąd

$$x = \alpha - \beta.$$

Z równości tej wynika na podstawie równości (2) równość (1), o uzasadnienie której właśnie chodziło.

Spostrzegamy natychmiast, że na podstawie tw. I-go i II-go możemy w teorii sum algebraicznych liczb względnych, rozwiniętej w § 83-cim, na miejsce wyrażenia „liczba względna“ podstawić wyrażenie „element zbioru  $(\Phi)$ “, oznaczając przez  $(\Phi)$  jakikolwiek zbiór wielkości, sprawdzający założenie tw. I-go, a więc w szczególności i zbiór liczb  $(Z)$ . Rozszerzamy tedy rzeczywiście w taki sposób teorię § 83-go i w szczególności umawiamy się, że w teorii zbioru  $(\Phi)$  znakom  $(+)$  i  $(-)$  nadawać będziemy, obok znaczenia symbolów dodawania i odejmowania, jeszcze znaczenie jakościowe, polegające na tem, żeby w razie, gdy pewien symbol  $S$  oznacza pewien element zbioru  $(\Phi)$ , symbol

$$+ S$$

oznaczał ten sam element,

a symbol

—  $S$

element temu elementowi symetryczny.

Powracając do zbioru liczb ( $Z$ ), spostrzegamy z łatwością, że z uwagi  $B$  przy wł. 7<sup>o</sup> wynika twierdzenie następujące:

III. *Jakiegokolwiek liczby zbioru ( $Z$ ) oznaczylibyśmy przez  $a$  i  $b$ , mamy, jak w teorii liczb rzeczywistych, związki następujące:*

$$\begin{aligned} (+a)(+b) &= +ab \\ (-a)(+b) &= (-a)(-b) = -a \cdot b \\ (-a)(-b) &= +ab. \end{aligned}$$

Równości te wyrażają w najogólniejszej formie tak zwaną regułę znaków.

Omawiając formalną stronę rachunku liczb zbioru ( $Z$ ), winniśmy jeszcze wprowadzić pojęcie stosunku dwóch liczb i uzasadnić reguły rachowania ze stosunkami.

Wogóle, jeżeli mnożenie liczb oznaczonego rodzaju ( $R$ ) posiada własność przemienności, jeżeli więc dla liczb rodzaju ( $R$ ) istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia, to iloraz podziału oznaczonej liczby  $a$  rozważanego rodzaju przez drugą liczbę  $b$  tegoż rodzaju zowie się w przypadku, kiedy rozważany iloraz oznaczony jest jednoznacznie, stosunkiem liczby  $a$  do liczby  $b$ ; liczba  $a$  zowie się tedy licznikiem, a liczba  $b$  mianownikiem stosunku.

Równość

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

dwóch stosunków zowie się proporcją, liczby  $a$  i  $b'$  stanowią tak zwane wyrazy skrajne, a liczby  $b$  i  $b'$  — wyrazy średnie proporcji.

Na podstawie powyższej definicji stosunku dwóch liczb i uwagi dołączonej do 9-go warunku spełnionego przez zbiór liczb ( $Z$ ), iloraz dwóch liczb zbioru ( $Z$ ) stanowi stosunek dzielnej do dzielnika w razie, kiedy dzielnik modułowi dodawania  $\mu$  równy nie jest.

IV. *Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby zachodziła równość stosunków*

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad (1)$$

gdzie oznaczylimy przez  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  i  $b'$  liczby zbioru ( $Z$ ) polega na równości

$$a \cdot b' = a' \cdot b. \quad (2)$$

Istotnie, przyjmijmy

$$(3) \quad \varrho = \frac{a}{b}, \quad \varrho' = \frac{a'}{b'}.$$

Z równości tych mamy

$$\varrho b = a, \quad \varrho' b' = a',$$

skąd znowu wynikają równości

$$(4) \quad \varrho b b' = a b', \quad \varrho' b b' = a' b.$$

W razie równości (1) mamy

$$(5) \quad \varrho = \varrho';$$

z równości (4) wynika tedy, że równość (2) zachodzi.

Odwrotnie, w razie równości (2), równości (4) pociągają za sobą równość (5), a to z przyczyny następującej: ponieważ symbole  $b$  i  $b'$  oznaczają mianowniki pewnych stosunków, przeto na podstawie wyżej podanej definicyi mamy

$$b \neq \mu \quad \text{ i } \quad b' \neq \mu$$

skąd

$$b \cdot b' \neq \mu.$$

Zatem iloraz podziału jakiejkolwiek liczby zbioru ( $Z$ ) przez iloczyn  $bb'$  jest jednoznacznie oznaczony, a ponieważ na podstawie równości (2) i (4) każda z liczb  $\varrho$  i  $\varrho'$  uważana być może za iloraz

$$\frac{a \cdot b'}{b \cdot b'},$$

przeto równości (2) rzeczywiście pociągają za sobą równość (5), a więc i równoważną tej równości równość (1). Ostatecznie równości (1) i (4) jednocześnie tylko zachodzić mogą, a o to właśnie chodziło.

Z twierdzenia poprzedzającego z łatwością wnosimy, że wartość stosunku dwóch liczb zbioru ( $Z$ ) zmianie nie ulegnie, jeżeli pomnożymy licznik i mianownik, albo podzielimy te dwa elementy przez jakąkolwiek od liczby  $\mu$  odmienną liczbę zbioru ( $Z$ ).

Na podstawie uwagi poprzedzającej możemy zawsze jakąkolwiek skończoną liczbę stosunków liczb zbioru ( $Z$ ) sprowadzić do wspólnego mianownika, równego, dowolnie przyjętej, byle od

modułu dodawania odmiennej liczbie  $l$ , czyli zastąpić przez równe im stosunki o tym samym mianowniku  $l$ .

V. *Suma jakiegokolwiek liczb stosunków liczb zbioru  $(Z)$ , o mianownikach równych pomiędzy sobą, równa się stosunkowi sumy liczników do wspólnego mianownika.*

Istotnie, przyjmijmy

$$\varrho_k = \frac{a_k}{m} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

oznaczając przez  $m$  od liczby  $\mu$  odmienną liczbę zbioru  $(Z)$ , a przez  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  jakiegokolwiek liczb tegoż zbioru. Mamy

$$\varrho_k \cdot m = a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

skąd

$$\varrho_1 (\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_n) m = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

skąd ostatecznie

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{m},$$

o co właśnie chodziło.

VI. *Iloczyn jakiegokolwiek skończonej liczby stosunków liczb zbioru  $(Z)$  równa się stosunkowi iloczynu liczników do iloczynu mianowników.*

Oczywiście uzasadnilibyśmy natychmiast twierdzenie to w podanem brzmieniu drogą indukcji matematycznej, gdybyśmy tylko uzasadnili je w razie iloczynu dwóch stosunków. Poprzestajemy tedy na tym przypadku szczególnym i przyjmujemy

$$\varrho = \frac{a}{b}, \quad \varrho' = \frac{a'}{b'},$$

skąd

$$\varrho b = a, \quad \varrho' b' = a',$$

zatem

$$(\varrho b)(\varrho' b') = a \cdot a'.$$

Opierając się na własnościach łączności i przemienności mnożenia liczb zbioru  $(Z)$ , mamy stąd

$$(\varrho \varrho') \cdot (bb') = a \cdot a',$$

a ponieważ mamy

$$bb' \neq \mu,$$



ze względu na nierówność

$$b \neq \mu \quad \text{ i } \quad b' \neq \mu,$$

przeto mamy

$$qq' = \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'}$$

o co nam właśnie chodziło.

VII. Iloraz podziału stosunku dwóch liczb zbioru ( $Z$ ) przez drugi stosunek, naturalnie od liczby  $\mu$  odmienny, równa się iloczynowi pierwszego stosunku przez stosunek, którego licznik i mianownik równają się odpowiednio mianownikowi i licznikowi drugiego stosunku.

Istotnie, przyjmijmy

$$q = \frac{a}{b}, \quad q' = \frac{a'}{b'},$$

jak poprzednio, i załóżmy, że prócz nierówności

$$b \neq \mu, \quad b' \neq \mu,$$

zachodzi jeszcze nierówność

$$q' \neq \mu.$$

Mamy tedy

$$a' \neq \mu$$

i możemy przyjąć

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'}.$$

Mamy stąd

$$x \cdot q' = \frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'} \cdot \frac{a'}{b'}$$

czyli

$$x \cdot q' = \frac{a \cdot b' \cdot a'}{b \cdot a' \cdot b'}$$

na podstawie twierdzenia poprzedzającego.

Opierając się na twierdzeniu III-cim, upewniamy się z łatwością, że mamy

$$\frac{a \cdot b' \cdot a'}{b \cdot a' \cdot b'} = \frac{a}{b},$$

albowiem mamy

$$(a \cdot b' \cdot a') \cdot b = (b \cdot a' \cdot b') a$$

na podstawie własności przemienności mnożenia liczb zbioru ( $Z$ ).

Omówiwszy formalną stronę rachunków na liczbach zbioru ( $Z$ ), przechodzimy do twierdzeń, które bliżej uwydatniają naturę liczb tego zbioru.

VIII. *Wszystkie te liczby zbioru ( $Z$ ), z których każda przedstawia stosunek pewnej, od modułu dodawania  $\mu$  odmiennej liczby zbioru ( $Z$ ) do siebie samej, są pomiędzy sobą równe, a wspólna ich wartość, oczywiście od modułu dodawania odmienna, stanowi moduł mnożenia liczb rozważanego zbioru.*

Istotnie, na podstawie tw. III-go mamy

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b}$$

jakikolwiek, byle od  $\mu$  odmienne liczby zbioru ( $Z$ ) oznaczylibyśmy przez  $a$  i  $b$ , a z uwagi tej wynika: 1<sup>o</sup> że wszystkie te liczby zbioru ( $Z$ ), z których każda równa się stosunkowi pewnej od modułu dodawania odmiennej liczby tego zbioru do siebie samej, są pomiędzy sobą równe; 2<sup>o</sup> że jeżeli oznaczymy przez  $u$  i  $x$  dwie liczby zbioru ( $Z$ ), to równość

$$u \cdot x = u$$

zachodzi, przy oznaczonej wartości na  $x$ , ale bez względu na wartość liczby  $u$ , w takim i tylko w takim razie, kiedy liczba  $x$  równa się wspólnej wartości tych stosunków liczb zbioru ( $Z$ ), z których każdy jest stosunkiem odmiennej od liczby  $\mu$  liczby do siebie samej. Zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

*W dalszym ciągu oznaczać będziemy przez  $\xi_1$  moduł mnożenia liczb zbioru ( $Z$ ).*

Ponieważ dodawanie liczb zbioru ( $Z$ ) wykonalne jest bez zastrzeżeń, przeto do zbioru ( $Z$ ) należeć będzie zbiór wszystkich liczb, z których każda jest sumą pewnej liczby składników równych liczbie  $\xi_1$ .

Zbiór wszystkich takich liczb zbioru ( $Z$ ), po dołączeniu do niego liczby  $\xi_1$  i modułu dodawania  $\mu$ , oznaczać będziemy przez symbol ( $Cb$ ).

Zatem liczbą zbioru ( $Cb$ ) jest liczba, która równa się albo liczbie  $\mu$ , albo liczbie  $\xi_1$ , albo sumie skończonej liczby składników równych liczbie  $\xi_1$ ; za liczbę równą takiej sumie o  $n$  składnikami, przyjmujemy symbol  $\xi_n$ , nadto uważać będziemy symbol  $\xi_0$ , jako równoważny symbolowi  $\mu$ .

IX. Jakkolwiek liczbę zbioru ( $Z$ ) oznaczylibyśmy przez  $a$ , iloczyn

$$a \cdot \xi_n,$$

gdzie symbol  $\xi_n$  ma znaczenie dopiero co określone, równa się, w razie nierówności  $n > 1$ , sumie tylu składników równych liczbie  $a$ , ile wynosi liczba całkowita bezwzględna  $n$ .

Istotnie, twierdzenie zachodzi w przypadku, kiedy mamy

$$n = 2,$$

albowiem

$$\xi_2 = \xi_1 + \xi_1,$$

a na podstawie własności rozdzielnosci mnożenia i definicyi liczby  $\xi_1$ , mamy

$$a \cdot \xi_2 = a\xi_1 + a\xi_1 = a + a.$$

Oznaczmy teraz przez  $k$  jakąkolwiek, byle od liczby 2 nie mniejszą liczbę całkowitą. Mamy tedy

$$\begin{aligned} a\xi_{k+1} &= a(\xi_k + \xi_1) = a\xi_k + a\xi_1 \\ &= a\xi_k + a. \end{aligned}$$

Zatem, gdyby twierdzenie, które pragniemy uzasadnić, zachodziło przy  $n = k$ , gdyby więc iloczyn  $a\xi_k$  równał się sumie  $k$  składników równych  $a$ , to iloczyn  $a\xi_{k+1}$  równałby się sumie  $(k+1)$  składników równych  $a$  i twierdzenie zachodziłoby przy  $n = k+1$ .

Z wyników uzyskanych wnosimy, na podstawie zasady indukcji matematycznej, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

X. Zbiór liczb ( $Cb$ ) jest, przynajmniej w znaczeniu szerszem, izomorficzny zbiorowi liczb całkowitych bezwzględnych, a odpowiedniość wzajemna liczb tych zbiorów, sprawdzająca warunki izomorfizmu, może być urzeczywistniona, jeżeli się umawiamy, że liczba  $\xi_p$  zbioru ( $Cb$ ) i liczba całkowita  $n$  uważane być mają za odpowiadające sobie wzajemnie elementy rozważanych zbiorów w razie i tylko w razie, kiedy zachodzi równość

$$n = p.$$

Istotnie, rozważana odpowiedniość wzajemna liczb zbioru ( $Cb$ ) i liczb całkowitych bezwzględnych oczywiście sprawdza dwa pierwsze warunki izomorfizmu. Nadto spostrzegamy natychmiast, że równości

$$n = n'$$

i

$$\xi_n = \xi_{n'}$$

są pomiędzy sobą równoważne.

Z drugiej strony łatwo dowieść możemy drogą indukcji matematycznej, że mamy

$$\zeta_n + \zeta_p = \zeta_{n+p}$$

jakikolwiek liczby całkowite, byle od zera nie mniejsze, oznaczylibyśmy przez  $n$  i  $p$ . Wnosimy stąd bez trudności, że izomorfizm zbioru liczb  $(Ob)$  i zbioru zwykłych liczb całkowitych bezwzględnych będzie uzasadniony, jeżeli jeszcze okażemy, że mamy

$$\zeta_n \cdot \zeta_p = \zeta_{n \cdot p} \quad (1)$$

jakikolwiek liczby całkowite, byle od zera nie mniejsze, oznaczylibyśmy przez  $n$  i  $p$ .

Zwróćmy się najpierw do przypadku szczególnego, kiedy mamy

$$p = 0.$$

Mamy tedy

$$\zeta_p = \zeta_0 = \mu,$$

a zatem

$$\zeta_n \cdot \zeta_p = \mu.$$

Z drugiej strony mamy obecnie

$$n \cdot p = 0,$$

przeto

$$\zeta_{n \cdot p} = \zeta_0 = \mu.$$

Stwierdzamy więc, że równość (1) zachodzi w razie, kiedy mamy

$$p = 0.$$

Założmy chwilowo, że równość ta zachodzi, jeżeli tylko mamy

$$p \leq k,$$

gdzie  $k$  oznacza pewną liczbę całkowitą, od liczby zero nie mniejszą, i przyjmijmy

$$p = k + 1.$$

Mamy

$$\zeta_{k+1} = \zeta_k + \zeta_1,$$

zatem

$$\zeta_n \cdot \zeta_{k+1} = \zeta_n \cdot (\zeta_k + \zeta_1) = \zeta_n \zeta_k + \zeta_n \zeta_1,$$

a ponieważ liczba  $\zeta_1$  równa się modułowi mnożenia, przeto mamy

$$\zeta_n \zeta_1 = \zeta_n.$$

Mamy więc

$$\zeta_n \zeta_{k+1} = \zeta_n \zeta_k + \zeta_n.$$

Ale założyliśmy, że twierdzenie, o które chodzi, jest uzasadnione, kiedy mamy  $p \leq k$ ; zatem

$$\zeta_n \cdot \zeta_k = \zeta_{n+k},$$

skąd wynika, że

$$\zeta_n \cdot \zeta_{k+1} = \zeta_{n+k} + \zeta_n,$$

zatem

$$\zeta_n \cdot \zeta_{k+1} = \zeta_{n+k+n} = \zeta_{n(k+1)}$$

na podstawie wyniku odnoszącego się do dodawania.

Z tego, cośmy dowiedli, wynika na podstawie zasady indukcji matematycznej, że równość (1) rzeczywiście zachodzi w każdym razie.

Ostatecznie zbiór zwyczajnych liczb całkowitych bezwzględnych jest rzeczywiście w szerszym znaczeniu przynajmniej izomorficzny zbiorowi  $(Cb)$ .

Ze względu na własność trwałości dzielenia liczb zbioru  $(Z)$ , zapewnioną nam warunkiem 9-tym, do zbioru tego należeć będzie zbiór  $(Wb)$  wszystkich liczb, z których każda uważana być może za iloraz podziału pewnej liczby zbioru  $(Cb)$  przez drugą, byle od  $\mu$  odmienną liczbę tegoż zbioru  $(Cb)$ . Zbiór liczb  $(Cb)$  stanowi oczywiście podzbiór zbioru  $(Wb)$ .

XI. Zbiór liczb  $(Wb)$  izomorficzny jest, w znaczeniu szerszym przynajmniej, zbiorowi liczb ułamkowych bezwzględnych, a za liczbę ułamkową homologiczną jakiegokolwiek liczbie w zbiorze  $(Wb)$  uważana być może każda liczba ułamkowa, której licznik i mianownik są w zbiorze liczb całkowitych bezwzględnych elementami homologicznymi odpowiednio tym liczbom zbioru  $(Cb)$ , które stanowią dzielną i dzielnik w dzieleniu o ilorazie liczb zbioru  $(Cb)$  równym liczbie  $w$ .

Istotnie, odpowiedniość powyższa sprawdza oczywiście dwa pierwsze warunki izomorfizmu. Żeby dowieść, że ona sprawdza także warunki 3-ci i 4-ty, oznaczmy przez  $u$  i  $u'$  dwie jakiegokolwiek liczby zbioru  $(Wb)$ . Mamy tedy

$$(1) \quad u = \frac{\zeta_m}{\zeta_p}, \quad u' = \frac{\zeta_{m'}}{\zeta_{p'}},$$

oznaczając przez  $\zeta_m$ ,  $\zeta_p$ ,  $\zeta_{m'}$  i  $\zeta_{p'}$  cztery liczby zbioru  $(Cb)$ , z których  $\zeta_p$  i  $\zeta_{p'}$  są w każdym razie od modułu dodawania  $\zeta_0$  odmiennie.

Liczbowi  $u$  i  $u'$  odpowiadać będą oczywiście liczby

$$\frac{m}{p} \quad \text{i} \quad \frac{m'}{p'}$$

w zbiorze liczb ułamkowych.

Na podstawie tw. III-go równość

$$u = u' \tag{2}$$

równoważna jest równości

$$\zeta_m \cdot \zeta_{p'} = \zeta_{m'} \cdot \zeta_p,$$

która, ze względu na izomorfizm zbioru ( $Cb$ ) i zbioru liczb całkowitych bezwzględnych i na to, że liczby  $m$ ,  $p'$ ,  $m'$  i  $p'$  homologiczne są liczbom  $\zeta_m$ ,  $\zeta_{p'}$ ,  $\zeta_{m'}$  i  $\zeta_p$ , równoważna jest równości

$$m \cdot p' = m' \cdot p,$$

a ponieważ równość ta równoważna jest równości

$$\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'}, \tag{3}$$

przeto równości (2) i (3) są pomiędzy sobą równoważne, skąd wynika, że trzeci warunek izomorfizmu jest spełniony

Na podstawie równości (1) i tw. III-go i IV-go mamy

$$u + u' = \frac{\zeta_m \zeta_{p'} + \zeta_{m'} \zeta_p}{\zeta_p \cdot \zeta_{p'}} = \frac{\zeta_{m \cdot p' + m' \cdot p}}{\zeta_{p \cdot p'}},$$

a ponieważ liczbie  $\frac{\zeta_{m \cdot p' + m' \cdot p}}{\zeta_{pp'}}$  zbioru ( $Wb$ ) odpowiada liczba ułamkowa

$$\frac{mp' + m'p}{pp'},$$

równa sumie liczb ułamkowych  $\frac{m}{p}$  i  $\frac{m'}{p'}$ , przeto, zważywszy, iż omawiana odpowiedniość wzajemna liczb zbioru ( $Wb$ ) i liczb ułamkowych bezwzględnych sprawdza trzy pierwsze warunki izomorfizmu, spostrzegamy, że równości

$$\frac{\zeta_\alpha}{\zeta_\beta} = u + u'$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{p} + \frac{m'}{p'},$$

odpowiednio równoważne równościom

$$\frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} = \frac{\xi_{mp' + m'p}}{p \cdot p'}$$

i

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{mp' + m'p}{pp'},$$

są także pomiędzy sobą równoważne. Zatem rozważana odpowiedniość wzajemna liczb zbioru ( $Wb$ ) i liczb ułamkowych bezwzględnych sprawdza 4-ty warunek izomorfizmu, o ile chodzi o dodawanie. Żeby przekonać się, że warunek ten spełniony jest i co do mnożenia, zważmy, iż na podstawie wzorów (1) mamy

$$u \cdot u' = \frac{\xi_m \cdot \xi_{m'}}{\xi_p \cdot \xi_{p'}} = \frac{\xi_{m \cdot m'}}{\xi_{p \cdot p'}}.$$

Ponieważ liczbie  $\frac{\xi_{m \cdot m'}}{\xi_{p \cdot p'}}$  zbioru ( $Wb$ ) odpowiada w zbiorze liczb ułamkowych bezwzględnych liczba

$$\frac{m \cdot m'}{p \cdot p'},$$

równa iloczynowi

$$\frac{m}{p} \cdot \frac{m'}{p'},$$

przeto równości

$$\frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} = \frac{\xi_m}{\xi_p} \cdot \frac{\xi_{m'}}{\xi_{p'}}$$

i

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{p} \cdot \frac{m'}{p'},$$

odpowiednio równoważne, ze względu na uzyskane już wyniki, równościom

$$\frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta} = \frac{\xi_{m \cdot m'}}{\xi_{p \cdot p'}}$$

i

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m \cdot m'}{p \cdot p'},$$

są także pomiędzy sobą równoważne, a to tylko pozostawało jeszcze do uzasadnienia, żeby udowodnić w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Ponieważ zbiór wszystkich liczb wymiernych bezwzględnych jest oczywiście izomorficzny zbiorowi wszystkich liczb ułamkowych, przeto do bezpośrednich następstw twierdzenia poprzedzającego należy twierdzenie następujące:

XII. *Zbiór liczb ( $Wb$ ) jest, przynajmniej w znaczeniu szerszem, izomorficzny zbiorowi liczb wymiernych bezwzględnych.*

Ponieważ liczbom zbioru ( $Z$ ) przysługuje własność podana pod 5<sup>o</sup> w wykazie, umieszczonym wyżej (str. 361), a wszystkie liczby zbioru ( $Wb$ ) należą do zbioru ( $Z$ ), przeto zbiór ( $Z$ ) obejmuje w każdym razie zbiór ( $W$ ) wszystkich liczb, z których każda przedstawiona być może w postaci reszty odejmowania pewnej jednej liczby zbioru ( $Wb$ ) od pewnej drugiej.

XIII. *Zbiór liczb ( $W$ ) jest, przynajmniej w znaczeniu szerszem, izomorficzny zbiorowi liczb wymiernych rzeczywistych, a za liczbę wymierną rzeczywistą, homologiczną jakiegokolwiek oznaczonej liczbie  $w$  w zbiorze ( $W$ ) uważana być może liczba  $l$ , określona wzorem*

$$l = a - b,$$

gdzie oznaczyliśmy przez  $a$  i  $b$  dwie liczby wymierne bezwzględne, odpowiednio homologiczne tym liczbom  $u$  i  $v$  zbioru ( $Wb$ ), które określają liczbę  $w$  na podstawie wzoru następującego:

$$w = u - v.$$

Istotnie, powyższa odpowiedniość wzajemna liczb zbioru ( $W$ ) i liczb wymiernych rzeczywistych oczywiście sprawdza dwa pierwsze warunki izomorfizmu.

Żeby dowieść, że dwa pozostałe warunki także są spełnione. oznaczymy przez  $w$  i  $w'$  dwie jakiegokolwiek liczby zbioru ( $W$ ) Mamy tedy

$$\left. \begin{aligned} w &= u - v \\ w' &= u' - v' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

oznaczając przez  $u$ ,  $v$ ,  $u'$  i  $v'$  cztery liczby zbioru ( $Wb$ ). Oznaczmy przez  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  i  $b'$  liczby wymierne bezwzględne, odpowiednio homologiczne liczbom  $u$ ,  $v$ ,  $u'$  i  $v'$ , i przyjmijmy

$$\left. \begin{aligned} l &= a - b \\ l' &= a' - b'. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Z równości (1) mamy

$$(3) \quad \begin{cases} w + v = u \\ w' + v' = u', \end{cases}$$

skąd, uwzględniając własności łączności i przemienności dodawania liczb zbioru  $(Z)$ , mamy

$$\begin{aligned} w + (v + v') &= u + v' \\ w' + (v + v') &= u' + v. \end{aligned}$$

Opierając się na jednoznaczności dodawania i odejmowania liczb zbioru  $(Z)$ , wnosimy natychmiast z równości poprzedzających, że równość

$$(4) \quad w = w'$$

równoważna jest równości

$$(5) \quad u + v' = u' + v,$$

która na podstawie izomorfizmu zbioru liczb  $(Wb)$  i zbioru liczb wymiernych bezwzględnych równoważna jest równości

$$(6) \quad l = l'.$$

Stwierdzamy więc, że równości (4) i (6) są pomiędzy sobą równoważne. Zatem trzeci warunek izomorfizmu jest spełniony.

Z równości (3) wyprowadzamy z łatwością, że

$$(w + w') + (v + v') = u + u',$$

skąd

$$w + w' = (u + u') - (v + v'),$$

a ponieważ, na podstawie teorii liczb rzeczywistych i wzorów (2), mamy

$$l + l' = (a + a') - (b + b'),$$

ponieważ nadto symbole

$$a + a' \quad \text{i} \quad b + b'$$

przedstawiają dwie liczby wymierne bezwzględne, odpowiednio homologiczne liczbom zbioru  $(Wb)$ , jakie przedstawiają symbole

$$u + u' \quad \text{i} \quad v + v',$$

przeto liczba zbioru  $(W)$ , przedstawiająca sumę  $w + w'$ , i liczba rzeczywista wymierna, równa sumie  $l + l'$ , są odpowiadającymi

sobie wzajemnie liczbami zbioru ( $W$ ) i zbioru liczb rzeczywistych wymiernych. Zatem, co do dodawania 4-ty warunek izomorfizmu jest spełniony.

Opierając się na omówionych wyżej własnościach formalnej natury rachunku liczb zbioru ( $Z$ ), wnosimy natychmiast ze wzorów (1), że mamy

$$w \cdot w' = (uu' + vv') - (uv' + u'v),$$

a ponieważ mamy

$$ll' = (aa' + bb') - (ab' + a'b),$$

na podstawie wzorów (2), ponieważ nadto wartości wyrażeń

$$aa' + bb' \quad \text{ i } \quad ab' + a'b$$

przedstawić można przez liczby wymierne bezwzględne, odpowiednio homologiczne pewnym liczbom zbioru ( $Wb$ ), równym odpowiednio wyrażeniom

$$uu' + vv' \quad \text{ i } \quad uv' + u'v,$$

przeto stwierdzamy, że iloczyny  $ww'$  i  $ll'$  równają się odpowiadającym sobie wzajemnie liczbom w zbiorze liczb ( $W$ ) i w zbiorze liczb wymiernych rzeczywistych. Zatem warunek 4-ty izomorfizmu jest spełniony w rozważanym przypadku i co do iloczynów dwóch liczb.

Z uzyskanych wyników wypływa, że rozważana odpowiedniość wzajemna liczb zbioru ( $W$ ) i liczb rzeczywistych wymiernych spełnia wszystkie warunki konieczne, ażebyśmy mogli orzec, że zbiór liczb ( $W$ ) jest, przynajmniej w znaczeniu szerszym, izomorficzny zbiorowi liczb wymiernych rzeczywistych.

Żeby wyrazić, iż oznaczony zbiór liczb ( $L_0$ ), posiadający sam oznaczony układ własności ( $U$ ), izomorficzny jest pewnemu podzbiorowi każdego takiego zbioru liczb, który też posiada układ własności ( $U$ ), orzekać będziemy, że zbiór ( $L_0$ ) jest typem największych zbiorów liczb, posiadających rzeczony układ własności. Przyjawszy tę definicję, mamy twierdzenie następujące:

**XIV.** *Zbiór liczb rzeczywistych wymiernych jest typem największych zbiorów liczb, posiadających własności, wyszczególnione w wykazie, podanym na czele tego paragrafu.*

Istotnie, sprawdzamy z łatwością, że zbiór liczb wymiernych rzeczywistych posiada wszystkie własności wspomnianego wykazu.

Z drugiej strony, jeżeli pewien zbiór liczb ( $Z$ ) rzeczzone własności posiada, to obejmować on będzie, jako podzbiór, zbiór liczb, który oznaczyliśmy wyżej przez ( $W$ ). Zatem, na podstawie tw. XII-go, twierdzenie, o które chodzi, rzeczywiście zachodzi w podanem brzmieniu.

§ 98. Jeżeli oznaczmy przez ( $Z$ ) jakikolwiek zbiór liczb, byle sprawdzający warunki wykazu z § 96-go, to twierdzenia, uzasadnione w paragrafie poprzedzającym, oczywiście zachodzą nie przestaną, gdyż zbiór ( $Z$ ) sprawdzałby w takim razie wszystkie założenia twierdzeń rzeczzonego paragrafu, ale wówczas wyniki uzyskane w paragrafie poprzedzającym będą mogły być uzupełnione. Takiemu właśnie uzupełnieniu wyników paragrafu poprzedzającego poświęcamy paragraf obecny, umawiając się jednocześnie, że symbol ( $Z$ ) uważać będziemy we wszystkich rozważaniach paragrafu niniejszego za symbol zbioru liczb, posiadającego wszystkie własności, wyszczególnione w wykazie z § 96-go.

Na podstawie własności 11<sup>o</sup> w § 96-tym (czyli postulatu Archimedes'a) i tw. IX-go paragrafu poprzedzającego zachodzi oczywiście twierdzenie następujące:

I. Jeżeli tylko liczba  $a$  zbioru ( $Z$ ) sprawdza nierówność

$$a > \xi_0,$$

$a$  symbol  $b$  oznacza dowolnie przyjętą liczbę ze zbioru ( $Z$ ), to w takim razie istnieje zawsze w zbiorze liczb ( $Cb$ ) taka liczba  $\xi_n$ , która czyni zadość nierówności

$$a \cdot \xi_n > b.$$

II. Jeżeli oznaczmy przez  $a$  i  $b$  dwie liczby zbioru ( $Z$ ), to równość

$$(1) \quad a = b$$

równoważna jest równości

$$(2) \quad a - b = \xi_0,$$

a nierówność

$$(3) \quad a > b$$

— nierówności

$$(4) \quad a - b > \xi_0.$$

Istotnie, równość (2) oczywiście równoważna jest równości

$$(5) \quad a = b + \xi_0,$$