



XI. Ogólne pojęcie liczby.

§ 95. Wyraz liczba oznacza każdą rzecz, stanowiącą jeden z elementów takiego zbioru (Z), którego elementom, ze względu na pewne ogólne warunki, przez zbiór ich spełnione, dajemy nazwę liczb oznaczonego rodzaju; warunki te są następujące:

1°. Elementy zbioru (Z) powinny być, o ile nie są liczbami całkowitymi bezwzględnie, tworcami umysłowymi, powołanymi do istnienia przez definicję opartą, mniej lub więcej bezpośrednio, ale w każdym razie wyłącznie, na pojęciu liczby całkowitej oraz na tych ogólnych i oderwanych pojęciach, które razem stanowią ogólne warunki logicznego myślenia.

2°. Zbiór (Z) powinien być, na podstawie definicji, ustanowionych zgodnie z zasadami rozdziału II-go, zbiorem wielkości przynajmniej w szerszym znaczeniu tego wyrazu.

3°. Dla zbioru (Z) powinny być ustawione definicje, stwarzające teorię działań zasadniczych na jego elementach.

Żeby uzyskać środki do porównywania pomiędzy sobą różnych rodzajów liczb, wprowadzamy ogólne pojęcie izomorfizmu dwóch zbiorów wielkości, dla których działania zasadnicze zostały określone.

W tym celu założmy, że pomiędzy elementami pewnych dwóch zbiorów wielkości można ustawić taką odpowiedniość, żeby spełnione były warunki następujące:

1°. Jeżeli pewnemu elementowi e zbioru (Z) odpowiada pewien element e' zbioru (Z'), to elementowi e' zbioru (Z') odpowiada element e zbioru (Z). Żeby wyrazić, iż dwa elementy należące odpowiednio do zbiorów (Z) i (Z') odpowiadają sobie wzajemnie w omawiany sposób, orzekać będziemy, że elementy te są homologicznymi elementami rozważanych zbiorów.

2°. Do każdego elementu każdego ze zbiorów (Z) i (Z') należy zawsze w drugim zbiorze przynajmniej jeden element homologiczny pierwszemu.

3°. Jeżeli oznaczymy przez a i b dwa elementy jednego ze zbiorów (Z) lub (Z') , a przez a' i b' elementy homologiczne drugiego zbioru, to równości

$$a = b \quad \text{ i } \quad a' = b'$$

są pomiędzy sobą równoważne.

4°. Jeżeli oznaczymy przez a, b, x i y cztery elementy zbioru (Z) odpowiednio homologiczne oznaczonym elementom a', b', x' i y' zbioru (Z') , to równość

$$x = a + b$$

równoważna jest równości

$$x' = a' + b',$$

a równość

$$y = a \cdot b$$

równości

$$y' = a' \cdot b'.$$

Jeżeli odpowiedniość wzajemna elementów dwóch zbiorów wielkości (Z) i (Z') tak może być określona, żeby spełniała prócz czterech warunków poprzedzających, jeszcze warunek dodatkowy, polegający na tem, żeby w razie, kiedy oznaczymy przez a i b dwa elementy zbioru (Z) lub zbioru (Z') , a przez a' i b' elementy odpowiadające odpowiednio w drugim zbiorze elementom a' i b' pierwszego, nierówności

$$a < b \quad \text{ i } \quad a' < b'$$

były pomiędzy sobą równoważne, to zbiory (Z) i (Z') zowią się ściśle izomorficznymi zbiorami wielkości, albo zbiorami wielkości izomorficznymi w znaczeniu ściślejszem.

Żeby wyrazić, że oznaczona odpowiedniość wzajemna elementów dwóch zbiorów wielkości (Z) i (Z') , sprawdzająca dwa pierwsze warunki izomorfizmu, czyni jeszcze zadość warunkowi, polegającemu na tem, żeby przy oznaczaniach, które określiliśmy dopieroco, związki

$$a = b \quad \text{ i } \quad a < b$$

były odpowiednio równoważne związkom

$$a' = b' \quad \text{ i } \quad a' < b',$$

orzekać będziemy, że rozważana odpowiedniość wzajemna elementów zbiorów (Z) i (Z') sprawdza trzeci warunek ścisłego izomorfizmu rzeczonych zbiorów.

Bezpośredni następstwem powyższych definicji jest okoliczność następująca: jeżeli każdy z pewnych dwóch elementów c_1 i c_2 oznaczonego zbioru wielkości (Z) uważany być może za element homologiczny oznaczonemu elementowi e pewnego zbioru wielkości, izomorficznego zbiorowi (Z) , to w takim razie zachodzi równość

$$c_1 = c_2.$$

Drugie, również bezpośrednie następstwo powyższych definicji polega na tem, że dwa zbiory wielkości, z których każdy izomorficzny jest pewnemu trzeciemu zbiorowi wielkości, są także pomiędzy sobą izomorficzne.

I. Uważajmy dwa izomorficzne pomiędzy sobą zbiory wielkości (Z) i (Z') , oznaczmy przez $a_1, a_2, \dots a_n$ tyle elementów zbioru (Z) , ile wynosi pewna liczba całkowita n ($n \geq 2$), a przez $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ elementy zbioru (Z') odpowiednio homologiczne elementom $a_1, a_2, \dots a_n$ zbioru (Z) . Oznaczmy nadto przez $f(a_1, a_2, \dots a_n)$ oznaczoną kombinację wymierną (§ 31) elementów $a_1, a_2, \dots a_n$ i uważajmy wyrażenie $f(a'_1, a'_2, \dots a'_n)$, na które przemienia się wyrażenie $f(a_1, a_2, \dots a_n)$ przez podstawienie elementów $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ na miejsce elementów $a_1, a_2, \dots a_n$. Jeżeli mamy tedy pewność, że dzielenia, zaznaczone w wyrażeniu $f(a_1, a_2, \dots a_n)$ albo w wyrażeniu $f(a'_1, a'_2, \dots a'_n)$, są wykonalne i prowadzą do wyniku o wartości oznaczonej jednoznacznie, to dzielenia, zaznaczone w drugim z rozważanych wyrazów, także są wykonalne i także prowadzą do wyniku o wartości oznaczonej jednoznacznie, a nadto, jeżeli oznaczony przez x element zbioru (Z) homologiczny jest pewnemu elementowi x' zbioru (Z') , to równania

$$x = f(a_1, a_2, \dots a_n) \quad (1)$$

i

$$x' = f(a'_1, a'_2, \dots a'_n) \quad (2)$$

będą pomiędzy sobą równoważne.

Upewnijmy się najpierw, że twierdzenie zachodzi w przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$n = 2.$$

Jeżeli symbol $f(a_1, a_2)$ przedstawia jedną¹⁾ z sum

$$a_1 + a_2 \quad \text{albo} \quad a_2 + a_1,$$

albo jeden z iloczynów

$$a_1 \cdot a_2 \quad \text{lub} \quad a_2 \cdot a_1,$$

to rozważane twierdzenie zachodzi bezpośrednio na podstawie 4-go warunku izomorfizmu, a nadto dlatego, że działania dodawania i mnożenia są działaniami jednoznaczными, wykonalnymi bez żadnych zastrzeżeń. Założmy więc, że działanie, zaznaczone w wyrażeniu $f(a_1, a_2)$, jest odejmowaniem albo dzieleniem.

Na podstawie założeń twierdzenia działanie, oznaczone literą f , wykonalne jest niezawodnie w jednym przynajmniej z wyrażen $f(a_1, a_2)$ i $f(a'_1, a'_2)$, powiedzmy w wyrażeniu $f(a_1, a_2)$ i określa wartość tego wyrażenia jednoznacznie.

Drogą ewentualnej zamiany wzajemnej znaczenia symbolu a_1 i znaczenia symbolu a_2 możemy oczywiście zawsze tego dopiąć, żeby równanie

$$(3) \quad x = f(a_1, a_2)$$

równoważne było równaniu postaci

$$(4) \quad \varphi(a_1, x) = a_2,$$

gdzie $\varphi(a_1, x)$ oznacza jedno z wyrażen

$$a_1 + x, \quad x + a_1, \quad a_1 \cdot x \quad \text{lub} \quad x \cdot a_1.$$

Na podstawie 4-go warunku izomorfizmu dwóch zbiorów wielkości równanie (4) pociągają za sobą równanie

$$(5) \quad \varphi(a'_1, x') = a'_2.$$

Zatem działanie, zaznaczone w wyrażeniu $f(a'_1, a'_2)$, jest wykonalne. Wynik działania tego oznaczony jest jednoznacznie; gdyby bowiem dwie pomiędzy sobą nierówne wartości na x' mogły sprawdzać równanie (5), gdyby innemi słowy, każdy z pewnych dwóch pomiędzy sobą nierównych elementów zbioru (Z') uważany być

¹⁾ Ze względu na całkiem ogólne stanowisko, które zajmujemy obecnie, nie zakładamy, żeby dodawanie albo mnożenie posiadały własność przemienności albo jakkolwiek inną własność, nie będącą następstwem ogólnych, w rozdziale V-tym podanych definicji tych działań.

mógł za jedną z wartości wyrażenia $f(a'_1, a'_2)$, to elementy homologiczne zbioru (Z) przedstawiałyby dwie wartości na x , z których każda sprawdzałaby równanie (4) i, wbrew założeniu, wyrażenie $f(a_1, a_2)$ nie byłoby wyrażeniem jednowartościowym. Ale skoro wyrażenie $f(a'_1, a'_2)$ jest jednoznaczne, to równanie

$$x' = f(a'_1, a'_2) \quad (6)$$

równoważne jest równaniu (5). Ponieważ zaś równanie (3) pociąga za sobą równanie (4), przeto równanie (3) pociąga za sobą równanie (6).

Gdybyśmy byli założyli wykonalność działania zaznaczonego w wyrażeniu $f(a'_1, a'_2)$ a zarazem jednoznaczność tegoż wyrażenia, to w sposób całkiem analogiczny stwierdzilibyśmy wykonalność działania, zaznaczonego w wyrażeniu $f(a_1, a_2)$, oraz jednoznaczność tegoż wyrażenia i tę okoliczność, że równanie (6) pociąga za sobą równanie (3).

Ostatecznie uzasadniliśmy twierdzenie w przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$n = 2.$$

Ponieważ zaś z łatwością stwierdzilibyśmy, że twierdzenie zachodziłoby przy

$$n = p + 1 \quad (p \geq 2),$$

gdyby tylko ono zachodziło w razie istnienia związku

$$n \leq p,$$

przeto na podstawie zasady indukcji matematycznej, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

II. Oznaczmy przez (A) i (B) takie dwa zbiory wielkości, żeby działania zasadnicze na elementach każdego z nich były określone, naturalnie w sposób zgodny z zasadami rozdziału II-go i V-go, i założmy, że zbiór (A) izomorficzny jest pewnemu (ze zbiorem (B) mogącemu zlewać się) podzbirowi (A') zbioru (B) . Jeżeli tedy oznaczmy przez (Z) zbiór, uzyskany przez połączenie ze sobą zbiorów (A) i (B) , to w takim razie możemy, nie wykraczając ani przeciwko zasadom rozdziału II-go, ani przeciwko zasadom rozdziału V-go, nadać zbiorowi (Z) charakter zbioru wielkości i określić działania zasadnicze na elementach tego zbioru, przyjmując umowy następujące:

1°. Jeżeli dwa elementy zbioru (Z) należą obydwa do zbioru (A) , to porównanie ilościowe tych elementów wykonywać będziemy na podstawie reguł, przyjętych w teorii zbioru (A) ; jeżeli zaś dwa elementy zbioru (Z) należą obydwa do zbioru (B) , to porównanie ilościowe tych

elementów wykonywać będziemy na podstawie reguł, przyjętych w teorii zbioru (B); jeżeli nareszcie pewien element α zbioru (Z) należy do zbioru (A), a pewien drugi element β zbioru (Z) — do zbioru (B), to oznaczwszy przez α' element homologiczny w zbiorze (A') elementowi α zbioru (A), orzekać będziemy, że zachodzi równość

$$\alpha = \beta,$$

skoro tylko mamy

$$\alpha' = \beta,$$

nadto, gdyby zbiory (A) i (A') izomorficzne były w znaczeniu ściślejszem, to nierówności

$$\alpha < \beta \quad \text{i} \quad \alpha > \beta$$

należałoby uważać za związki odpowiednio równoważne nierównościom

$$\alpha' < \beta \quad \text{i} \quad \alpha' > \beta.$$

2°. Żeby określić dodawanie i mnożenie na dwóch elementach α i β zbioru (Z) i stworzyć tem samem teorię działań zasadniczych na elementach tego zbioru, rozróżniamy, jak przed chwilą, trzy jedynie możliwe przypadki następujące:

A) Elementy α i β należą do zbioru (A).

B) Elementy α i β należą do zbioru (B).

C) Jeden z elementów, powiedzmy α , należy do zbioru (A), a drugi β do zbioru (B).

W pierwszym przypadku przyjmiemy za sumę i iloczyn w oznaczonym porządku uszeregowanych elementów α i β elementy zbioru (Z) odpowiednio równe tym elementom zbioru (A), które według teorii zbioru (A), przedstawiają odpowiednio sumę i iloczyn elementów α i β , uszeregowanych w rozważany sposób.

W drugim przypadku przyjmiemy za sumę i iloczyn elementów α i β , uszeregowanych w oznaczonym porządku, elementy zbioru (Z) odpowiednio równe tym elementom zbioru (B), które według teorii tego zbioru przy rozważanem uszeregowaniu elementów α i β przedstawiają odpowiednio ich sumę i ich iloczyn.

W trzecim przypadku nareszcie uważamy homologiczny elementowi α element α' zbioru (A') i umawiamy się, że wyznaczać będziemy wartości wyrażeń

$$\alpha + \beta, \quad \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta \quad \text{i} \quad \beta \cdot \alpha$$

z równań następujących:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \alpha' + \beta, & \beta + \alpha &= \beta + \alpha' \\ \alpha \cdot \beta &= \alpha' \cdot \beta, & \beta \cdot \alpha &= \beta \cdot \alpha'. \end{aligned}$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, uważajmy jakikolwiek element z zbioru (Z) i oznaczmy przez β element, który, w razie gdy element z należy do zbioru (B) , zlewa się z elementem z , a w razie, gdy element z należy do zbioru (A) , jest elementowi z homologicznym elementem zbioru (B) . Elementy z i β , z których β oczywiście zawsze należy do zbioru (B) , nazywać będziemy homologicznymi elementami zbiorów (Z) i (B) .

Oznaczmy przez z i z' dwa jakiekolwiek elementy zbioru (Z) a przez β i β' elementy im homologiczne w zbiorze (B) . Spostrzegamy z łatwością, opierając się na założeniach twierdzenia i na regułach, według których porównywanie ilościowe elementów zbioru (Z) ma być wykonywane, że równości

$$z = z' \quad \text{i} \quad \beta = \beta'$$

są pomiędzy sobą równoważne, a nadto, w razie gdy zbioru (A) i (B) są zbiorami wielkości w znaczeniu ściślejszem i jeżeli przytem izomorfizm zbiorów (A) i (A') zachodzi w znaczeniu ściślejszem, nierówność

$$z < z'$$

równoważna jest nierówności

$$\beta < \beta',$$

zaś nierówność

$$z > z'$$

nierówności

$$\beta > \beta'.$$

Z uwagi tej wnosimy z największą łatwością, że te reguły porównywania ilościowego elementów zbioru (Z) , o które chodzi, czynią zadość zasadom rozdziału II-go.

Zachowując powyższe oznaczenia, stwierdzamy natychmiast, że wysłowione w twierdzeniu definicje dodawania i mnożenia na elementach zbioru (Z) , pociągają za sobą równości następujące:

$$z + z' = \beta + \beta'$$

$$z' + z = \beta' + \beta$$

$$z \cdot z' = \beta \cdot \beta'$$

$$z' \cdot z = \beta' \cdot \beta,$$

a z twierdzeń, polegających na tych równościach, łatwo wywnioskować możemy, że definicje, o które chodzi, spełniają warunki rozdziału V-go.

Zatem twierdzenie winno być uważanie za uzasadnione w zupełności.

Żeby wyrazić, że dwa zbiory wielkości, które sprawdzają założenia twierdzenia poprzedzającego, łączymy w jeden zbiór wielkości w sposób omówiony w rzeczonym twierdzeniu, orzekamy, że zespalamy rozważane zbiory ze sobą.

W rozdziałach poprzedzających napotykamy dwa przykłady tworzenia nowego zbioru liczb drogą zespolenia dwóch zbiorów liczb, z których jeden był izomorficzny części drugiego. Pierwszy przykład tego rodzaju stanowi utworzenie zbioru liczb bezwzględnych wymiernych przez połączenie ze zbiorem liczb ułamkowych zbioru liczb całkowitych bezwzględnych, który, jakśmy dowiedli, nie posługując się co prawda wyrażeniem „zbiory izomorficzne“, izomorficzny jest tej części zbioru liczb ułamkowych, która obejmuje liczby ułamkowe o licznikach podzielnych przez mianowniki; drugi taki przykład stanowi utworzenie zbioru liczb rzeczywistych przez złączenie zbioru liczb bezwzględnych, który izomorficzny jest zbiorowi liczb względnych dodatnich, z pełnym zbiorem liczb względnych.

W rozdziale, który poświęcimy teorii mierzenia, przekonamy się, że dwa izomorficzne zbiory liczb stanowią takie narzędzia do badania przyrody, że każde z nich w zupełności zastąpić może drugie. Ze stanowiska zaś oderwanej teorii zachodzi oczywiście okoliczność następująca: Jeżeli dwa zbiory liczb są izomorficzne, a możemy przytem rzeczywiście wyznaczyć w każdym z tych zbiorów liczbę homologiczną liczbie dowolnie danej w drugim, to w takim razie możemy natychmiast sprowadzić wszelkie do jednego z rozważanych zbiorów odnoszące się zagadnienie, polegające na porównywaniu ilościowem pewnych liczb lub na wykonaniu pewnych działań zasadniczych na tych liczbach, do zagadnienia tego samego rodzaju, odnoszącego się do liczb homologicznych w drugim zbiorze.

Uwaga poprzedzająca mogłaby wydać się niezupełnie uzasadnioną w razie, kiedy dwa zbiory liczb byłyby zbiorami izomorficznymi tylko w znaczeniu szerszem. W rzeczywistości jednak wspomniana uwaga jest uzasadniona we wszystkich przypadkach. Istotnie, jeżeli najpierw chodzi o zbiory liczb, z których każdy jest zbiorem wielkości tylko w znaczeniu szerszem, to równoważność ich w razie istnienia izomorfizmu, który wtedy może być tylko izomor-

fizmem w znaczeniu szerszem, oczywiście wątpliwą nie jest. Jeżeli zaś jeden, albo każdy z pewnych dwóch zbiorów liczb, wzajemnie izomorficznych w znaczeniu szerszem, jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem, to w takim razie możemy oczywiście zawsze, drogą uzupełnienia, albo zmiany reguł porównywania ilościowego liczb dla jednego z rozważanych zbiorów liczb, urzeczywistnić izomorfizm w znaczeniu ściślejszem.

Z wyjaśnień powyższych wynika, że izomorficzne zbiory liczb nie są rdzennie od siebie odmienne, a cała rodzina izomorficznych pomiędzy sobą zbiorów liczb uważana być może za znaną, skoro jest znany jeden ze zbiorów rodziny. Zatem każdy zbiór liczb rodziny izomorficznych pomiędzy sobą zbiorów liczb uważany być może za typ tej rodziny.

Na podstawie tychże wyjaśnień uważamy za własności charakterystyczne oznaczonego zbioru liczb (Z) te, które przysługują wszystkim zbiorom izomorficznym zbiorowi (Z) i tylko takim zbiorom, rozumiejąc przytem izomorfizm w znaczeniu ściślejszem lub szerszem zależnie od tego, czy zbiór (Z) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem, czy też szerszem.

Jeżeli zespolimy z oznaczonym zbiorem liczb (Z) zbiór liczb (Z'), izomorficzny (w znaczeniu szerszem lub ściślejszem, zależnie od tego, czy zbiór (Z) jest zbiorem wielkości w znaczeniu szerszem czy ściślejszem) pewnej części zbioru (Z) albo całemu temu zbiorowi, to nowy zbiór liczb (ζ), tą drogą uzyskany, oczywiście będzie izomorficzny zbiorowi (Z) i będzie mógł być uważany za typ tej samej rodziny izomorficznych pomiędzy sobą zbiorów, za której typ uważany mógłby być zbiór (Z).

Odwrotnie, jeżeli zbiór (Z) rozdzielony być może na dwa zbiory (Z_1) i (Z_2) tak, żeby każdej liczbie zbioru (Z_1) odpowiadała równa jej liczba w zbiorze (Z_2), to zbiór (Z_2) oczywiście izomorficzny będzie zbiorowi (Z) i przyjęty być może zamiast zbioru (Z) za typ rodziny zbiorów izomorficznych temu zbiorowi.

§ 96. Ze względu na podstawowe znaczenie zbioru liczb rzeczywistych nasuwa się problem ustawienia wykazu własności charakterystycznych tego zbioru liczb.

Na podstawie wyjaśnień, podanych w paragrafie poprzedzającym, należy problem ten rozumieć w sposób następujący: ustawić taki układ warunków, żeby układowi temu czynił zadość zbiór liczb rzeczywistych oraz każdy zbiór liczb jemu izomorficzny, ale żaden inny.

Żeby wysłowić twierdzenie, stanowiące rozwiązanie problemu poprzedzającego, określamy najpierw wyrażenie „typ najszerszych zbiorów liczb czyniących zadość oznaczonemu układowi warunków (U)⁴”; przez wyrażenie to oznaczamy wszelki taki, warunki układu (U) sprawdzający, zbiór liczb (Z), który ma własność następującą: każdy zbiór liczb, sprawdzający warunki układu (U), jest izomorficzny albo samemu zbiorowi (Z), albo pewnemu podzbiorowi tego zbioru.

Twierdzenie, które mieliśmy wyżej na myśli, opiewa, jak następuje:

Zbiór liczb rzeczywistych jest typem najszerszych takich zbiorów liczb, z których każdy (Z) posiada wszystkie własności, wysłowione w wykazie następującym:

1°. Zbiór liczb (Z) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem.

2°. Dodawanie liczb zbioru (Z) jest, zgodnie z ogólnymi zasadami rozdziału V-go, działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

3°. Dodawanie liczb zbioru (Z) posiada własność przemienności, bez względu na liczbę składników.

Żeby usunąć wszelkie nieporozumienia przy pojmowaniu dalszych warunków wykazu, którym czynić ma zadość zbiór (Z), zaznaczamy, że na podstawie ogólnych twierdzeń rozdziału V-go, koniecznem następstwem własności przemienności dodawania liczb zbioru (Z) są okoliczności następujące:

A) Dodawanie liczb zbioru (Z) posiada własność łączności.

B) W stosunku do liczb zbioru (Z) istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania.

4°. Jakikolwiek liczby zbioru (Z) oznaczylibyśmy przez a , b i b' , nierówność

$$b < b'$$

pociąga za sobą nierówność.

$$a + b < a + b'.$$

Do warunku tego nawiązujemy uwagę następującą:

Nawet gdybyśmy warunek ten zastąpili przez warunek mniej daleko idący, a polegający na tem, żeby koniecznem następstwem nierówności

$$b \neq b'$$

była tylko nierówność

$$a + b \neq a + b',$$

to już i w takim razie (§ 29, tw. I i II) jednoznaczność odejmowania dla liczb zbioru (Z) byłaby, w razie wykonalności tego działania, zapewniona w zupełności.

5°. *Odejmowanie w teorii liczb zbioru (Z), jednoznaczne na podstawie warunku poprzedzającego, wykonalne jest bez żadnych zastrzeżeń.*

Warunek ten wyrażamy krótko, orzekając, że w teorii liczb zbioru (Z) odejmowanie posiada własność trwałości.

Do tego warunku także należy nawiązać pewne uwagi:

A) *Wszystkie takie liczby zbioru (Z), z których każda przedstawia różnicę dwóch równych pomiędzy sobą liczb tegoż zbioru, są pomiędzy sobą równe, a wspólna ich wartość stanowi moduł (str. 93) dodawania liczb zbioru (Z).*

Ze względu na własność trwałości i jednoznaczności odejmowania liczb zbioru (Z), odejmowanie na liczbach zbioru tego wykonalne jest w szczególności także w razie równości odjemnej i odjemnika. Zatem liczby, stanowiące przedmiot twierdzenia, o które chodzi, niezawodnie istnieją w zbiorze (Z). Oznaczmy przez a i b dwie dowolnie wybrane liczby ze zbioru (Z). Mamy tedy:

$$b + (a - a) = \{(b - a) + a\} + (a - a).$$

Opierając się na własnościach przemienności i łączności dodawania liczb zbioru (Z), wyprowadzamy z równości poprzedzającej równość

$$b + (a - a) = (b - a) + \{(a - a) + a\},$$

a ponieważ

$$(a - a) + a = a,$$

przeto

$$b + (a - a) = (b - a) + a$$

skąd

$$b + (a - a) = b.$$

Na podstawie definicji odejmowania równość ta równoważna jest równości

$$a - a = b - b,$$

a z równości tej wynika, że wszystkie te liczby zbioru (Z), z których każda uważana być może za różnicę dwóch równych pomiędzy sobą liczb tegoż zbioru, są rzeczywiście pomiędzy sobą równe.

Oznaczmy przez μ wspólną wartość tych liczb.

Jeżeli oznaczymy przez a i x dwie liczby zbioru (Z) , to równości

$$(1) \quad x = \mu$$

i

$$(2) \quad a + x = a$$

będą pomiędzy sobą równoważne, bez względu na wybór elementu a .

Istotnie, mamy

$$b - b = \mu,$$

jakąkolwiek liczbę zbioru (Z) oznaczylibyśmy przez b ; mamy więc w szczególności

$$a - a = \mu.$$

Zatem równość (1) równoważna jest równości

$$x = a - a,$$

która znów równoważna jest równości (2) na podstawie definicji odejmowania. Stwierdzamy więc, że równości (1) i (2) rzeczywiście są pomiędzy sobą równoważne bez względu na wybór elementu a . Zatem symbol μ przedstawia moduł dodawania liczb zbioru (Z) , a o to tylko jeszcze chodziło.

B) Oznaczmy przez a i b dwie liczby zbioru (Z) , a przez μ , jak wyżej, moduł dodawania liczb zbioru (Z) . Nierówność

$$(1) \quad b > \mu$$

równoważna jest nierówności

$$(2) \quad a + b > a,$$

a nierówność

$$(3) \quad b < \mu$$

nierówności

$$(4) \quad a + b < a.$$

Istotnie, na podstawie własności 4^o zbioru (Z) , nierówność (1) pociąga za sobą

$$a + b > a + \mu,$$

a nierówność (2)

$$a + b < a + \mu,$$

bez względu na wartość elementu a . Ponieważ zaś mamy

$$a + \mu = a,$$

przeto nierówność (1) pociąga za sobą nierówność (2), a nierówność (3) — nierówność (4). Zważywszy, iż w razie nierówności

$$a + b \neq a$$

równość

$$b = \mu$$

zachodzić nie może, wnosimy łatwo, że w przypadku, gdy mamy nierówność (2), zachodzić musi nierówność (1), a w przypadku, gdy mamy nierówność (4) — nierówność (3). Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

C) Każdej liczbie l zbioru (Z) odpowiada, ze względu na trwałość i jednoznaczność odejmowania liczb zbioru (Z) , druga liczba l' , której wartość określa w zupełności równanie

$$l + l' = \mu, \quad (1)$$

gdzie oznaczyliśmy, jak wyżej, przez μ moduł dodawania liczb zbioru (Z) .

Ponieważ stosunek pojęciowy liczby l do liczby l' oczywiście nie różni się od stosunku pojęciowego liczb l' do liczby l , przeto wyrażamy stosunek wzajemny tych liczb, nazywając je symetrycznymi pomiędzy sobą liczbami zbioru (Z) .

D) Oznaczmy przez l , l' i l'' trzy liczby zbioru (Z) . Jeżeli liczba l symetryczna jest liczbie l' , a liczba l' liczbie l'' , to łatwo stwierdzić możemy, że liczba l' równa się liczbie l'' . Jeżeli zaś liczba l równa się liczbie l' , a liczba l' jest, jak przed chwilą, liczbą symetryczną liczbie l'' , to również łatwo stwierdzamy, że liczby l i l'' są pomiędzy sobą symetryczne.

E) Jeżeli dwie liczby l i l' zbioru (Z) są pomiędzy sobą symetryczne, to w takim razie zachodzi jedno z dwojga: albo liczby l i l' są pomiędzy sobą równe, a wspólna ich wartość równa się modułowi dodawania μ , albo jedna z nich jest od modułu dodawania μ mniejsza, a druga — większa.

Istotnie, mamy w każdym razie

$$l + l' = \mu; \quad (1)$$

gdyby więc jedna z liczb l i l' , powiedzmy l' , równa była liczbie μ , to mielibyśmy

$$l + l' = l + \mu = l,$$

a zatem na podstawie równości (1) mielibyśmy

$$l = \mu.$$

Załóżmy, że jedna z liczb l i l' , powiedzmy l , jest od modułu dodawania μ odmienna. Mamy tedy albo

$$(2) \quad l > \mu,$$

albo

$$(3) \quad l < \mu.$$

Na podstawie własności 4^o zbioru (Z) mielibyśmy w razie nierówności (2)

$$l + l' > \mu + l',$$

a w razie nierówności (3)

$$l + l' < \mu + l'.$$

Ponieważ zaś równość (1) zachodzi w każdym razie, a ze względu na definicję modułu dodawania mamy

$$l' + \mu = l',$$

przeto nierówność (2) pociąga za sobą nierówność

$$l' < \mu,$$

a nierówność (3) nierówność

$$l' > \mu.$$

Z tego cośmy uzasadnili wynika bezpośrednio twierdzenie, o które chodziło.

Ponieważ w zbiorze (Z) istnieje nieskończenie wiele liczb od modułu dodawania odmiennych, a to na podstawie ogólnej definicji pojęcia liczby, przeto z twierdzenia, którego dowód podaliśmy dopiero co, wynika, że w zbiorze (Z) istnieje nieskończenie wiele liczb od modułu dodawania mniejszych i nieskończenie wiele liczb od modułu dodawania większych.

6^o. Mnożenie liczb zbioru (Z) jest, zgodnie z ogólnymi zasadami rozdziału V-go, działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

7^o. Mnożenie liczb zbioru (Z) posiada własność rozdzielności w stosunku do dodawania.

Powiadam, że stąd wynikają konsekwencye następujące:

A) W stosunku do odejmowania mnożenie liczb zbioru (Z) posiada własność rozdzielności.

B) Jeżeli przynajmniej jeden z czynników iloczynu oznaczonych

liczb zbioru (Z) równa się modułowi dodawania μ , to sam iloczyn równa się także modułowi dodawania μ .

C) Jeżeli w iloczynie jakichkolwiek liczb zbioru (Z) zastąpimy jeden z czynników przez liczbę czynnikowi temu symetryczną, to liczba, przedstawiająca wartość iloczynu, przemieni się na liczbę jej symetryczną.

Słuszność uwagi A wynika bezpośrednio z tw. II-go z § 32-go. Żeby uzasadnić uwagę B, uważajmy dwie jakiekolwiek liczby a i b zbioru (Z). Na podstawie własności rozdzielności mnożenia w stosunku do dodawania, mamy:

$$\begin{aligned} a(b + \mu) &= ab + a\mu \\ (b + \mu)a &= ba + \mu a, \end{aligned}$$

a ponieważ mamy

$$b + \mu = b,$$

przeto mamy

$$\begin{aligned} a(b + \mu) &= ab \\ (b + \mu)a &= ba, \end{aligned}$$

mamy więc

$$\begin{aligned} ab + a\mu &= ab \\ ba + \mu a &= ba, \end{aligned}$$

skąd wynika (wł. 5^o, uw. A), że każdy z iloczynów

$$a\mu \text{ i } \mu a$$

równa się modułowi dodawania μ . Uzasadniliśmy więc twierdzenie B w razie istnienia dwóch czynników.

Zalóżmy chwilowo, że twierdzenie zachodzi jeszcze, kiedy liczba czynników nie jest większa od oznaczonej liczby k ($k \geq 2$) i uważajmy iloczyn P tylu czynników, ile wynosi liczba $k + 1$. Oznaczając przez a iloczyn k pierwszych czynników, a przez b ostatni czynnik, możemy przedstawić rozważany iloczyn P przez iloczyn

$$a \cdot b$$

dwóch tylko czynników. Jeżeli jeden z czynników iloczynu P równa się μ , to zachodzi jedno z dwojga: albo jeden z czynników iloczynu, którego wartość oznaczyliśmy przez a , jest równy μ i w takim razie mamy

$$a = \mu,$$

na podstawie chwilowo przyjętego założenia, albo liczba b równa się liczbie μ . W obu przypadkach mielibyśmy

$$a \cdot b = \mu$$

na podstawie już uzyskanego wyżej wyniku. Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej twierdzenie B zachodzi w podanym brzmieniu.

Żeby usprawiedliwić i uwagę wysłowioną pod C , oznaczmy przez a i b dwie jakiegokolwiek liczby zbioru (Z) , a przez a' i b' liczby liczbom tym odpowiednio symetryczne. Mamy

$$\begin{aligned} ab + a'b &= (a + a')b = \mu b \\ ab + ab' &= a(b + b') = a\mu, \end{aligned}$$

a to na podstawie własności rozdzielności mnożenia w stosunku do dodawania i ze względu na równości

$$\begin{aligned} a + a' &= \mu \\ b + b' &= \mu. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś na podstawie uwagi B mamy

$$\mu b = a\mu = \mu,$$

przeto mamy

$$ab + a'b = \mu, \quad ab + ab' = \mu,$$

zatem twierdzenie C usprawiedliwione jest, o ile chodzi o iloczyn dwóch tylko czynników.

Załóżmy chwilowo, że twierdzenie zachodzi, gdy liczba czynników iloczynu nie jest większa od pewnej liczby k ($k \geq 2$), i uważajmy iloczyn P tylu czynników, ile wynosi liczba $k + 1$. Mamy

$$P = a \cdot b,$$

oznaczając przez a iloczyn k pierwszych czynników iloczynu P , a przez b ostatni czynnik. Jeżeli zastąpimy jeden z czynników iloczynu P przez liczbę jemu symetryczną, to w takim razie zajdzie jedna z dwóch okoliczności następujących: albo czynnik, zamiast którego ma być podstawiona liczba jemu symetryczna, jest jednym z czynników iloczynu równego liczbie a i w takim razie, na podstawie chwilowo przyjętego założenia, liczba a przemieni się na liczbę jej symetryczną, a liczba b nie ulegnie zmianie; albo wspomniany czynnik jest czynnikiem b i w takim razie liczba a w ilo-

czynnie $a \cdot b$ zmianie nie ulegnie, a miejsce liczby b zajmie symetryczna jej liczba. W obu przypadkach na podstawie już uzyskanych wyników liczba, równa wartości rozważanego iloczynu, przemieni się na liczbę jej symetryczną. Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej usprawiedliwiliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

8°. *Mnożenie liczb zbioru (Z) posiada własność przemienności bez względu na liczbę czynników.*

Na podstawie znanych twierdzeń rozdziału V-go własność ta pociąga za sobą konsekwencye następujące:

A) *Mnożenie liczb zbioru (Z) posiada własność łączności.*

B) *Dla liczb zbioru (Z) istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia.*

9°. *Jeżeli dwie liczby a i b sprawdzają nierówności*

$$a > \mu \quad \text{ i } \quad b > \mu,$$

gdzie oznaczyliśmy przez μ , jak wyżej, moduł dodawania, to ich iloczyn sprawdza nierówność

$$a \cdot b > \mu.$$

Do warunku tego nawiązujemy uwagi następujące:

A) *Iloczyn odmiennych od modułu dodawania μ liczb zbioru (Z) równa się zawsze liczbie od μ odmiennej.*

B) *Jeżeli przy dzieleniu liczb zbioru (Z) dzielnik jest liczbą od liczby μ odmienną, to dzielenie w razie wykonalności jest działaniem jednoznaczem.*

Żeby uzasadnić uwagę A, uważajmy najpierw iloczyn dwóch czynników. Jeżeli każdy z nich jest od liczby μ większy, to wspomniana uwaga oczywiście jest słuszna. Mamy więc tylko do zbadania dwa przypadki: przypadek, w którym jeden czynnik a' jest mniejszy, a drugi b jest większy od liczby μ oraz przypadek, w którym obydwa czynniki a' i b' są od liczby μ mniejsze. Zwróćmy się do przypadku pierwszego i oznaczmy przez a liczbę symetryczną liczbie a' . Na podstawie uwag, uczynionych przy warunku 5-tym, liczba a większa będzie od liczby μ . Mamy przeto

$$a \cdot b > \mu.$$

ale ze względu na uwagę B, uczynioną przy warunku 7-ym, iloczyny $a' \cdot b$ i $a \cdot b$ równają się symetrycznym pomiędzy sobą liczbom. Mamy więc

$$a' \cdot b < \mu$$

na podstawie jednej z uwag uczynionych przy warunku 5-tym. Przejdźmy do przypadku, kiedy obydwie czynniki a' i b' rozważanego iloczynu dwóch liczb zbioru (Z) są mniejsze od μ i oznaczmy przez a i b liczby liczbom a' i b' odpowiednio symetryczne. Na podstawie tego, co zostało już udowodnione, mamy

$$a' \cdot b < \mu,$$

a ponieważ na podstawie uwagi, podanej pod B przy warunku 7-ym, iloczyn $a' \cdot b'$ równa się liczbie symetrycznej tej liczby, która przedstawia iloczyn $a' \cdot b$, przeto mamy

$$a' \cdot b' > \mu.$$

Uzasadniliśmy więc uwagę A w razie gdy chodzi o iloczyn dwóch liczb zbioru (Z) . Załóżmy chwilowo, że uwaga ta jest słuszna w razie iloczynu, w którym liczba czynników nie jest większa od pewnej liczby k ($k \geq 2$) i uważajmy iloczyn P tylu liczb zbioru (Z) , ile wynosi liczba $k + 1$. Iloczyn x , k pierwszych czynników będzie na podstawie chwilowo przyjętego założenia od liczby μ odmienny, przeto iloczyn P równać się będzie iloczynowi dwóch od liczby μ odmiennych liczb, mianowicie liczby x i tej liczby, która przedstawia ostatni czynnik rozważanego iloczynu. Zatem iloczyn P będzie miał wartość liczbie μ nierówną. Stąd wnosimy na podstawie zasady indukcji matematycznej, że uwaga A uzasadniona jest w zupełności.

Żeby uzasadnić także uwagę B , załóżmy, że dwie liczby x i y zbioru (Z) sprawdzają równania

$$bx = a$$

$$by = a,$$

gdzie b oznacza liczbę zbioru (Z) od liczby μ odmienną, a a jakąkolwiek liczbę tegoż zbioru.

Z równości poprzedzających mamy

$$bx - by = \mu,$$

a ponieważ, ze względu na uwagę A przy własności 7^o zbioru (Z) , mamy

$$bx - by = b(x - y),$$

przeto mamy

$$b \cdot (x - y) = \mu.$$

Ze względu na nierówność

$$b \neq \mu$$

i na uwagę *A*, dopiero co uzasadnioną, powyższa równość pociąga za sobą równość

$$x - y = \mu,$$

skąd wynika równość

$$x = y,$$

która właśnie wyraża twierdzenie, o które chodzi.

10°. *Dzielenie liczb zbioru (Z) jest wykonalne, jeżeli tylko dzielnik jest od modułu dodawania odmienny.*

Do warunku tego dołączamy uwagę następującą:

Ponieważ iloczyn dwóch liczb zbioru (*Z*) sam równa się liczbie μ (wł. 7°, uw. *B*), byleby jeden przynajmniej z czynników równał się liczbie μ , przeto w razie, kiedy przy dzieleniu liczb zbioru (*Z*) dzielnik równa się liczbie μ , działanie jest wykonalne tylko pod warunkiem, żeby dzielna także równała się liczbie μ , ale iloraz jest wtedy całkiem nieoznaczony. Zatem, stawiając warunek, żeby dzielenie liczb zbioru (*Z*) było wykonalne, byleby dzielnik był od liczby μ odmienny, zapewniamy dzieleniu liczb zbioru (*Z*) możliwie najszersze warunki wykonalności. Z tej przyczyny wyrażamy krótko omawiany warunek, orzekając, że dzielenie liczb zbioru (*Z*) posiada własności trwałości.

11°. *Jeżeli pewna liczba a zbioru (*Z*) sprawdza nierówność*

$$a > \mu,$$

to jakkolwiek od liczby a większą liczbę rozważanego zbioru oznaczilibyśmy przez b , zawsze istnieć będzie taka liczba całkowita bezwzględna n ($n > 1$), że suma tylu składników równych liczbie a , ile wynosi liczba n , większa będzie od liczby b . Warunek ten nazywamy postulatem Archimedes.

W dalszym ciągu, przy odwoływaniu się do wykazu poprzedzającego, cytować będziemy ten wykaz, jako *wykaz* z § 96-go.

Wykaz powyższy z natury rzeczy przywodzi do pytania następującego: czy pewne własności zbioru (*Z*), wyszczególnione w tym wykazie, nie stanowią logicznych następstw pozostałych własności tegoż zbioru? Zbadanie tego pytania byłoby na razie przedwczesne. Wobec tego odkładamy ten przedmiot do ostatniego rozdziału i zwracamy się bezpośrednio do twierdzenia wysłowionego wyżej, a pole-

gającego na tem, że *zbiór liczb rzeczywistych należy do kategorii najszerszych zbiorów liczb, posiadających własności wyszczególnione w powyższym wykazie.*

Zbiór liczb rzeczywistych oczywiście posiada wszystkie własności wyszczególnione w powyższym wykazie. Chodzi więc tylko o podanie dowodu na to, że zbiór ten jest typem najszerszych zbiorów liczb, posiadających wspomniane własności. Żeby przy rozwijaniu tego dowodu należycie uwidocznić znaczenie względne warunków twierdzenia, zbadamy najpierw własności, jakie miałyby zbiór liczb (Z) w przypadku, w którymby spełniał tylko częściowo warunki powyższego wykazu. Przedmiotowi temu poświęcamy paragraf następujący.

§ 97. Zaznaczamy przedewszystkiem, że rozważania, którym poświęcamy paragraf niniejszy, nie będą oparte na założeniu, że zbiór liczb (Z) sprawdza pierwszy warunek w wykazie z paragrafu poprzedzającego. Nie wykluczamy więc przypadku, z którym zbiór (Z) byłby zbiorem wielkości tylko w znaczeniu szerszem. Wobec tego 4-ty i 9-ty z warunków wspomnianego wykazu muszą albo odpaść całkiem, albo być zastąpione przez warunki inne, a mianowicie takie, którym mógłby czynić zadość i taki zbiór liczb, który byłby zbiorem wielkości tylko w znaczeniu szerszem. W rzeczywistości postawimy na miejscu tych dwóch warunków inne bardziej ogólne.

Co do warunków pozostałych, to wyjąwszy warunek 11-ty, który usuniemy, zachowamy je wszystkie bez zmiany. Nie poprzestaniemy jednak na wysłowieniu warunków, przez które zamierzamy zastąpić 4-ty i 9-ty warunek wykazu z paragrafu poprzedzającego, a podamy natomiast pełny wykaz założeń o zbiorze liczb (Z), na których jedynie opierać będziemy nasze badania w paragrafie niniejszym, dołączając przytem do niektórych z tych założeń pewne uwagi. W taki sposób kosztem niewielkiej liczby dodanych wierszów w tekście usuniemy możebność wszelkiego nieporozumienia.

Zakładamy tedy, że zbiór liczb (Z) sprawdza warunki następujące:

1°. *Dodawanie liczb zbioru (Z) jest, zgodnie z zasadami rozdziału V-go, działaniem jednoznacznem, wykonalnem bez zastrzeżeń.*

2°. *Dodawanie liczb zbioru (Z) posiada własność przemienności bez względu na liczbę składników.*