

na podstawie równości (1). Na podstawie tw. IV-go równość (2) pociąga za sobą równość

$$P + P' = \mu,$$

wyrażającą (§ 82, tw. VII) właśnie twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

VII. *Jakiegokolwiek liczby względne oznaczylibyśmy przez A i B , to jeżeli przyjmiemy*

$$P = A \cdot B,$$

zachodzić będą równości następujące:

$$(1) \quad (+A)(+B) = +P = P$$

$$(2) \quad (-A)(+B) = -P$$

$$(3) \quad (-A)(-B) = +P = P$$

$$(4) \quad (-A)(+B) = -P$$

gdzie oczywiście znaki $(+)$ i $(-)$ mają znaczenie jakościowe, określone w § 83-cim.

Istotnie, równość (1) zachodzi bezpośrednio na podstawie znaczenia znaku $(+)$ w symbolach

$$+A \text{ i } +B,$$

a równości (2), (3) i (4) wynikają kolejno z równości (1), (2), (3), na podstawie tw. VI-go.

§ 85. **Dzielenie.** Ze względu na własności mnożenia liczb względnych istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia liczb względnych (§ 31), a działanie to polega na wyznaczeniu liczby względnej (x, y) z równania

$$(1) \quad (a, b) \cdot (x, y) = (c, d),$$

gdzie (c, d) i (a, b) oznaczają dwie liczby względne dane, z których (c, d) przyjęta jest za dzielną, a druga (a, b) — za dzielnik; przy tych oznaczeniach liczba względna (x, y) , o wyznaczenie której chodzi, stanowi na podstawie ogólnych zasad rozdziału V-go, iloraz podziału liczby (c, d) przez liczbę (a, b) .

Przystępujemy obecnie do dyskusji równania (1). Gdyby dzielnik (a, b) równał się modułowi dodawania, to w takim razie (tw. IV-te z paragrafu poprzedzającego) iloczyn

$$(a, b)(x, y)$$

także równałby się modułowi dodawania, bez względu na wartość liczby (x, y) . Zatem, jeżeli przy dzieleniu liczb względnych dzielnik równa się modułowi dodawania, to dzielenie wykonalne jest tylko w przypadku, kiedy dzielna równa się także modułowi dodawania, a w takim razie wartość ilorazu jest całkiem nieoznaczona, gdyż w tym przypadku każda liczba względna uważana być może za iloraz.

Pozostaje do zbadania przypadek ogólny, w którym zachodzi nierówność

$$(a, b) \neq \mu, \quad (2)$$

gdzie oznaczyliśmy przez μ moduł dodawania.

Zestawiając tw. V-te z paragrafu poprzedzającego z tw. I-szem i II-giem § 29-go, stwierdzamy natychmiast, że w razie nierówności (3) dzielenie, o ile jest wykonalne, jest działaniem jednoznaczem; powiadam, że w rzeczywistości, w rozważanym przypadku, dzielenie jest zawsze wykonalne.

Istotnie, mamy

$$(a, b)(x, y) = (ax + by, bx + ay),$$

zatem, równanie (1) równoważne jest równaniu

$$ax + by + d = bx + ay + c. \quad (3)$$

Z drugiej strony ze względu na nierówność (2) liczby bezwzględne a i b sprawdzają albo nierówność

$$a > b, \quad (4)$$

albo

$$a < b. \quad (5)$$

Założmy najpierw, że zachodzi nierówność (4). W takim razie równość (3) oczywiście równoważna jest równości

$$(ax + by + d) - bx = (ay + bx + c) - bx$$

czyli

$$(a - b)x + by + d = ay + c,$$

która znów równoważna jest następującej:

$$\{(a - b)x + by + d\} - by = (ay + c) - by$$

czyli

$$(a - b)x + d = (a - b)y + c. \quad (6)$$

Zatem równości (3) i (6) są pomiędzy sobą równoważne. Przyjmując

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{c}{a-b} \\ y = \frac{d}{a-b} \end{cases}$$

oczywiście uczynimy zadość równości (6), a więc i równoważnym pomiędzy sobą równościom (1) i (3). Z tego wynika, że w razie nierówności (4) dzielenie jest wykonalne, a liczba

$$\left(\frac{c}{a-b}, \frac{d}{a-b} \right)$$

jest jedną z tych, z których każda uważana być może za iloraz $(c, d):(a, b)$; ponieważ zaś dowiedliśmy poprzednio, że w przypadku obecnym dzielenie, o ile jest wykonalne, jest działaniem jednoznaczem, przeto, chociaż istnieją od układu (7) odmienne układy wartości na x i y , sprawdzające równanie (6), mamy mimo to pewność, że w rozważanym przypadku wzór

$$(8) \quad (c, d):(a, b) = \left(\frac{c}{a-b}, \frac{d}{a-b} \right)$$

jest ogólnym wzorem na wartość ilorazu $(c, d):(a, b)$.

Przejdźmy do przypadku, kiedy zachodzi nierówność (5). Rozumowanie całkiem analogiczne do tego, które dało nam możność stwierdzenia, iż w razie nierówności (4) równanie (6) równoważne jest równaniu (3), z łatwością doprowadzi nas do wyniku, iż w przypadku nierówności (5) równanie (3) równoważne jest następującemu:

$$(b-a)y + d = (b-a)x + c,$$

któremu możemy uczynić zadość, przyjmując

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{b-a} \\ y &= \frac{c}{b-a} \end{aligned}$$

Zatem i w razie nierówności (5) dzielenie jest wykonalne, a liczba względna

$$\left(\frac{d}{b-a}, \frac{c}{b-a} \right)$$

jest niezawodnie jedną z tych, z których każda uważana być może w rozważanym przypadku za iloraz, o który chodzi. Ponieważ zaś stwierdziliśmy już poprzednio, że w omawianym obecnie przypadku, zarówno jak i w przypadku nierówności (4), dzielenie jest w razie wykonalności działaniem jednoznacznem, przeto mamy pewność, że wzór

$$(c, d):(a, b) = \left(\frac{d}{b-a}, \frac{c}{b-a} \right) \quad (9)$$

jest wzorem ogólnym na wartość ilorazu $(c, d):(a, b)$ w przypadku nierówności (5).

Wszystkie wyniki, do których doszliśmy, badając równanie (1), możemy przedstawić w postaci twierdzenia następującego:

I. *Jeżeli przy dzieleniu liczb względnych dzielnik jest od modułu dodawania odmienny, to dzielenie jest wykonalne i jednoznaczne; oznaczając przez (c, d) dzielną, a przez (a, b) dzielnik, mamy tedy na iloraz wzór (8) lub wzór (9), zależnie od tego, czy mamy $a > b$, czy też $a < b$. Jeżeli zaś dzielnik równa się modułowi dodawania, to dzielenie jest wykonalne tylko pod warunkiem, żeby dzielna także równała się modułowi dodawania, ale w takim razie iloraz jest całkiem nieznaczony.*

Przypadek szczególny, w którym dzielnik równa się dzielnej i jest od modułu dodawania odmienny, zasługuje na bliższe zbadanie. Zachowując oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się wyżej, mamy tedy:

$$a + d = b + c. \quad (10)$$

Z drugiej strony równanie (3) oczywiście jest równoważne równaniu

$$\begin{aligned} ax + by + d + a &= bx + ay + c + a \\ \text{skąd} \quad ax + by + b + c &= bx + ay + c + a, \end{aligned} \quad (11)$$

na podstawie równości (10). Równanie (11) oczywiście równoważne jest równaniu

$$\begin{aligned} ax + by + b &= bx + ay + a, \\ \text{czyli} \quad ax + b(y + 1) &= bx + a(y + 1). \end{aligned}$$

W razie nierówności (4) równanie to pociąga za sobą równość

$$(a - b)x = (a - b)(y + 1),$$

a w razie nierówności (5) — równość

$$(b - a)x = (b - a)(y + 1),$$

zatem w obu przypadkach mamy

$$x = y + 1,$$

a równość ta wyraża, że zachodzi równość następująca:

$$(x, y) = (1, 0).$$

Na podstawie tego wyniku i znanych własności modułu dodawania możemy wysłowić twierdzenie następujące:

II. *Jeżeli przy dzieleniu liczb względnych dzielna równa się dzielnikowi, a wspólna wartość dzielnej i dzielnika jest od modułu dodawania odmienna, to wartość ilorazu równa się liczbie względnej (1, 0); jeżeli zaś iloraz równa się liczbie (1, 0), to dzielnik równa się zawsze dzielnej, chociażby nawet dzielna równała się modułowi dodawania.*

Twierdzeniu temu możemy nadać inną, bardzo uwagi godną postać, ale w tym celu winniśmy wprowadzić pojęcie modułu mnożenia.

Uważajmy chwilowo jakikolwiek taki zbiór wielkości (Z), żeby elementy tego zbioru podlegać mogły działaniu mnożenia i żeby nadto działanie to na elementach zbioru (Z) nie tylko czyniło za-
dłość ogólnym zasadom rozdziału V-go, ale jeszcze posiadało własność przemienności. Jeżeli istnieje taki element ϱ w zbiorze (Z),
żeby równość

$$A \cdot X = A,$$

gdzie oznaczyliśmy przez A i X dwa elementy zbioru (Z), zachodziła bez względu na wartość elementu A w razie, ale tylko w razie, kiedy zachodzi równość

$$X = \varrho,$$

to w takim razie zwiemy wspólną wartość wszystkich elementowi ϱ równych elementów zbioru (Z) modułem mnożenia elementów zbioru (Z).

Zbiór liczb bezwzględnych dostarcza nam przykładu zbioru wielkości, w którym istnieje moduł mnożenia, gdyż wartość liczby jeden oczywiście stanowi moduł mnożenia liczb bezwzględnych.

Posługując się wyrażeniem „moduł mnożenia“, możemy oczywiście wysłowić tw. II-gie w sposób następujący:

III. *W zbiorze liczb względnych istnieje moduł mnożenia, a moduł ten równa się liczbie względnej (1, 0).*

Taka jest właśnie postać tw. II-go, którą mieliśmy wyżej na myśli.

Zestawiając definicję dzielenia z tw. VII-em z paragrafu poprzedzającego, spostrzegamy natychmiast, że zachodzi twierdzenie następujące:

IV. *Oznaczmy przez A jakąkolwiek liczbę względną, przez B liczbę względną od modułu dodawania odmienną, i przyjmijmy*

$$Q = A : B.$$

W takim razie zachodzą równości następujące:

$$(+A) : (+B) = +Q = Q$$

$$(-A) : (+B) = -Q$$

$$(-A) : (-B) = +Q = Q$$

$$(+A) : (-B) = -Q.$$

§ 86. Ogólne pojęcie liczby rzeczywistej. Droga, która przywiodła nas do pojęcia liczby względnej, do reguł porównywania ilościowego tych liczb i do definicji działań zasadniczych na nich, przywodzi nas jeszcze do utworzenia nowego zbioru wielkości (Z) przez dołączenie do zbioru liczb względnych zbioru liczb bezwzględnych i przez określenie reguł porównywania ilościowego elementów zbioru (Z) i działań zasadniczych na tych elementach, czyli tak zwanych liczbach rzeczywistych, w sposób następujący:

1°. *Umawiamy się, że porównywanie ilościowe dwóch takich liczb rzeczywistych, które są liczbami bezwzględными, wykonywać będziemy według reguł przyjętych w teorii liczb bezwzględnych.*

2°. *Umawiamy się, że porównywanie ilościowe dwóch takich liczb rzeczywistych, które są liczbami względnymi, wykonywać będziemy według reguł, przyjętych w teorii liczb względnych.*

3°. *Oznaczając przez l dowolnie przyjętą liczbę bezwzględną, a przez p i q odpowiednio pierwszy i drugi wyraz jakiejkolwiek liczby względnej, umawiamy się, że związki*

$$l < (p, q)$$

$$l = (p, q)$$

$$l > (p, q)$$

uważać będziemy za równoważne odpowiednio związkom następującym:

$$(l, 0) < (p, q)$$

$$(l, 0) = (p, q)$$

$$(l, 0) > (p, q).$$

4°. Sumę i iloczyn dwóch liczb rzeczywistych, będących liczbami bezwzględniemi, określamy jako dwie liczby rzeczywiste, odpowiednio równe tym liczbom bezwzględny, które w teorii liczb bezwzględnych przedstawiają sumę i iloczyn rozważanych liczb.

5°. Sumę i iloczyn dwóch liczb rzeczywistych, będących liczbami względnymi, określamy jako liczby rzeczywiste odpowiednio równe tym liczbom względnym, które w teorii liczb względnych przedstawiają sumę i iloczyn rozważanych liczb.

6°. Oznaczając, jak wyżej, przez l dowolnie przyjętą liczbę bezwzględną, a przez p i q odpowiednio pierwszy i drugi wyraz jakiegokolwiek liczby względnej, umawiamy się, że uważać będziemy za wynik wykonania dodawania na liczbach rzeczywistych l i (p, q) wszelką liczbę rzeczywistą, równą liczbie względnej, przedstawiającej wartość sumy

$$(l, 0) + (p, q),$$

a za wynik wykonania mnożenia na nich — każdą liczbę rzeczywistą równą liczbie względnej, przedstawiającej wartość iloczynu

$$(l, 0) \cdot (p, q).$$

Obecnie winniśmy usprawiedliwić powyższe definicje, podając dowód na to, że one czynią zadość wszystkim tym warunkom, do których postanowiliśmy zawsze zastosowywać się przy ustawianiu reguł porównywania ilościowego elementów jakiegokolwiek bądź zbioru i przy określaniu działań zasadniczych, jakiegokolwiek rodzaju byłyby rozważane wielkości. W tym celu wprowadzamy pojęcie liczby względnej homologicznej dowolnie przyjętej liczbie rzeczywistej r , określając to pojęcie w sposób następujący: jeżeli liczba rzeczywista r jest liczbą względną, to wyrażenie liczba względna homologiczna liczbie r oznacza samą liczbę r ; jeżeli zaś liczba rzeczywista r jest jakąkolwiek liczbą bezwzględną l , to należy rozumieć przez wyrażenie „liczba względna homologiczna liczbie r ” liczbę względną $(l, 0)$.

I. Jeżeli oznaczmy przez r i r' dwie jakiegokolwiek liczby rzeczy-

wiste, a przez h i h' liczby względne, odpowiednio homologiczne liczbom r i r' , to w takim razie związki

$$r < r', \quad r = r' \quad \text{ i } \quad r > r' \quad (1)$$

równoważne są odpowiednio związkom

$$h < h', \quad h = h' \quad \text{ i } \quad h > h'. \quad (2)$$

W przypadku, kiedy jedna przynajmniej z liczb rzeczywistych r i r' jest liczbą względną, powyższe twierdzenie stanowi jedno z bezpośrednich następstw, przyjętych przez nas reguł do porównywania ilościowego liczb rzeczywistych.

Zatem bliższego zbadania wymaga tylko przypadek, kiedy obie liczby rzeczywiste r i r' są liczbami bezwzględnymi. Oznaczmy liczby te odpowiednio przez a i a' . W takim razie, na podstawie definicji 1^o, podanej wyżej, związki (1) równoważne są odpowiednio związkom następującym:

$$a < a', \quad a = a' \quad \text{ i } \quad a > a'. \quad (3)$$

Z drugiej strony, ponieważ symbole h i h' oznaczają odpowiednio liczby względne $(a, 0)$ i $(a', 0)$, przeto związki (2) są na podstawie reguł porównywania ilościowego liczb względnych równoważne odpowiednio związkom

$$a + 0 < a' + 0, \quad a + 0 = a' + 0 \quad \text{ i } \quad a + 0 > a' + 0,$$

które znów oczywiście równoważne są odpowiednio związkom (3). Ostatecznie związki każdego z układów (1) i (2) są odpowiednio równoważne związkom (3). Zatem zgodnie z brzmieniem twierdzenia związki (1) są odpowiednio równoważne związkom (2).

Zważywszy, że jużśmy poprzednio stwierdzili, iż reguły porównywania ilościowego liczb względnych czynią zadość wymaganiom wyszczególnionym w rozdziale II-gim, wnosimy natychmiast z twierdzenia poprzedzającego, że reguły porównywania ilościowego liczb rzeczywistych także wymaganiom tym czynią zadość. Zatem usprawiedliwiliśmy w zupełności przyjęte przez nas reguły do porównywania ilościowego liczb rzeczywistych i chodzi już tylko o usprawiedliwienie definicji działań zasadniczych.

Upewnijmy się najpierw, że rzeczone definicje czynią zadość tym dwom w § 25-tym podanym warunkom, którym według umowy, raz na zawsze przez nas przyjętej, winna czynić zadość definicja

jakiegokolwiek działania arytmetycznego wogóle. Owóż, że drugi ze wspomnianych warunków jest spełniony, wynika bezpośrednio z samego brzmienia definicji dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych. Żeby zaś dowieść, iż pierwszy warunek jest także spełniony, uzasadnimy najpierw twierdzenie następujące:

II. Jeżeli oznaczmy, jak w tw. I-szem, przez r i r' dwie liczby rzeczywiste jakiegokolwiek, a przez h i h' liczby względne odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym r i r' , to w takim razie zachodzi będzie równość

$$(1) \quad r + r' = h + h'$$

oraz równość

$$(2) \quad r \cdot r' = h \cdot h'.$$

Ze względu na samo brzmienie 5-tej i 6-tej z definicji, podanych wyżej, twierdzenie nie jest bezpośrednio oczywiste tylko w przypadku, kiedy każda z liczb rzeczywistych r i r' jest liczbą bezwzględną. Oznaczmy przez a i a' te liczby bezwzględne, którymi są odpowiednio w takim razie liczby rzeczywiste r i r' , a przez s i p liczby bezwzględne, określone równościami

$$\begin{aligned} s &= a + a' \\ p &= a \cdot a', \end{aligned}$$

gdzie działanie zaznaczone w wyrażeniach

$$a + a' \quad \text{ i } \quad a \cdot a'$$

winno być wykonane według reguł teorii liczb bezwzględnych. Ponieważ symbol h oznacza liczbę względną $(a, 0)$, symbol h' liczbę względną $(a', 0)$, przeto na podstawie 5-tej z definicji, podanych wyżej, mamy

$$(3) \quad \begin{cases} h + h' = (s, 0) \\ h \cdot h' = (p, 0). \end{cases}$$

Z drugiej zaś strony, na podstawie definicji 4-tej, mamy

$$(4) \quad \begin{cases} r + r' = s \\ r \cdot r' = p, \end{cases}$$

a ponieważ na podstawie definicji 3-ciej mamy

$$(5) \quad \begin{cases} (s, 0) = s \\ (p, 0) = p, \end{cases}$$

przeto z równości (3) i (4) wynikają równości (1) i (2), o uzasadnienie których właśnie chodziło.

Na podstawie twierdzenia poprzedzającego łatwo już okazać możemy, że znane definicje działań zasadniczych na liczbach rzeczywistych, spełniają 1-szy z warunków § 25-go.

Istotnie, zachowując oznaczenia rzeczzonego twierdzenia uważajmy dwie liczby rzeczywiste r_1 i r'_1 , sprawdzające równania

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r \\ r'_1 &= r' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

i uważajmy liczby względne h_1 i h'_1 odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym r_1 i r'_1 . Na podstawie tego twierdzenia mamy

$$\left. \begin{aligned} r_1 + r'_1 &= h_1 + h'_1 \\ r_1 \cdot r'_1 &= h_1 \cdot h'_1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ponieważ na podstawie definicji liczby względnej homologicznej oznaczonej liczbie rzeczywistej i ze względu na 3-cią z definicji, podanych wyżej, każda liczba rzeczywista równa się tej liczbie względnej, która jest liczbą względną jej homologiczną, przeto mamy

$$\left. \begin{aligned} r &= h, & r_1 &= h_1 \\ r' &= h', & r'_1 &= h'_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ponieważ dowiedliśmy już wyżej, że przyjęte przez nas reguły porównywania ilościowego liczb rzeczywistych spełniają warunki rozdziału II-go, przeto z równości (6) i (8) wynikają równości

$$\begin{aligned} h &= h_1 \\ h' &= h'_1, \end{aligned}$$

z których znów, na podstawie teorii liczb względnych wynikają równości

$$\left. \begin{aligned} h + h' &= h_1 + h'_1 \\ h \cdot h' &= h_1 \cdot h'_1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ale równości (1), (2), (7) i (9) pociągają za sobą równość

$$\left. \begin{aligned} r + r' &= r_1 + r'_1 \\ r \cdot r' &= r_1 \cdot r'_1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ostatecznie dowiedliśmy, że jeżeli tylko cztery liczby rzeczywiste r , r' , r_1 i r'_1 sprawdzają równości (6), to w takim razie zachodzą

równości (10). Z twierdzenia tego wynika, że pierwszy z warunków wysłowionych w § 25-tym, a polegający na tem, żeby wynik działania arytmetycznego zależał wyłącznie od wartości elementów, ulegających działaniu, jest przez nasze definicje działań zasadniczych na liczbach rzeczywistych spełniony, a to tylko pozostawało do udowodnienia, żeby okazać zgodność powyższych działań zasadniczych na liczbach rzeczywistych z zasadami § 25-go. Ale winniśmy jeszcze stwierdzić, że rzeczzone definicje spełniają także i te szczególne warunki, którym na podstawie ogólnej teorii, rozwiniętej w rozdziale V-tym, winny czynić zawsze zadość definicje dodawania i definicja mnożenia. Warunki te polegają na tem: 1) żeby rzeczzone działania wykonalne były bez zastrzeżeń, 2) żeby działania te były działaniami jednoznacznymi.

Pierwszy z warunków tych oczywiście spełniony jest bezpośrednio na podstawie samego brzmienia definicji dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych, a twierdzenie, polegające na tem, że równości (6) pociągają za sobą równości (10), wyrażają właśnie, że rozważane definicje spełniają i drugi warunek.

Ostatecznie usprawiedliwiliśmy w zupełności wszystkie definicje, o które chodziło.

§ 87. Symbole specyficzne liczb rzeczywistych. Oznaczmy przez a pierwszy wyraz, a przez b drugi wyraz jakiegokolwiek liczby względnej (a, b) . Mamy tedy

$$(a, b) = (a, 0) - (b, 0),$$

a ponieważ, na podstawie definicji, podanych w paragrafie poprzedzającym, mamy

$$(a, 0) = a$$

$$(b, 0) = b,$$

ponieważ nadto przy wykonywaniu działań zasadniczych na liczbach rzeczywistych możemy zastąpić każdą liczbę rzeczywistą przez liczbę jej równą, nie powodując przez to zmiany wartości wyniku działania, przeto mamy

$$(1) \quad (a, b) = a - b.$$

Równość ta wyraża oczywiście twierdzenie następujące:

I. *Każda liczba względna uważana być może za resztę odejmowania liczby bezwzględnej, stanowiącej drugi wyraz rozważanej liczby względnej, od liczby bezwzględnej, która stanowi pierwszy jej wyraz.*

Na podstawie twierdzenia tego możemy uważać za symbol liczby względnej, której pierwszym i drugim wyrazem są odpowiednio jakiegokolwiek liczby bezwzględne a i b , wyrażenie

$$a - b.$$

Bliższe zastanowienie się nad tym wynikiem przywiedzie nas do oznaczania liczb względnych przez symbole bardziej dogodne. Oznaczmy przez d liczbę bezwzględną, określoną w sposób następujący: jeżeli liczby bezwzględne a i b sprawdzają związek

$$a \geq b, \quad (2)$$

to przyjmujemy

$$d = a - b, \quad (3)$$

jeżeli zaś mamy

$$a < b, \quad (4)$$

to wyznaczamy liczbę d z równania

$$d = b - a. \quad (5)$$

Liczbę d nazwiemy różnicą bezwzględną liczb bezwzględnych a i b .

Zwróćmy się najpierw do przypadku, kiedy wyrazy a i b liczby względnej (a, b) sprawdzają związek (2). Ponieważ w takim razie zachodzi równość (3), przeto ze względu na równość (1) mamy

$$(a, b) = d.$$

Na podstawie równości tej mamy twierdzenie następujące:

II. *Wspólna wartość wszystkich liczb rzeczywistych, równych liczbie względnej, w której pierwszy wyraz od drugiego nie jest mniejszy, równa się różnicy bezwzględnej wyrazów tej liczby względnej.*

Oznaczając w dalszym ciągu przez a pierwszy, a przez b drugi wyraz liczby względnej, przyjętej dowolnie, załóżmy, że zachodzi nierówność (4). Spostrzegamy natychmiast, że mamy

$$(a, b) = (0, d), \quad (6)$$

gdzie d oznacza, jak wyżej, różnicę bezwzględną liczb bezwzględnych a i b , gdyż w rozważanym przypadku zachodzi równość (5), równoważna równości

$$a + d = b,$$

która właśnie wyraża, iż zachodzi równość (6).

Żeby posunąć się dalej, należy uprzytomnić sobie treść § 82-go. W paragrafie tym wprowadziliśmy pojęcie symetrii dwóch liczb względnych. Okoliczność ta przywodzi nas do wprowadzenia pojęcia symetrii dwóch liczb rzeczywistych, określając to pojęcie w sposób następujący:

Żeby wyrazić, iż dwie liczby rzeczywiste równają się odpowiednio dwom liczbom względnym symetrycznym pomiędzy sobą, orzekamy, że liczby te są same pomiędzy sobą symetryczne.

Spostrzegamy natychmiast, że na podstawie tej definicji w twierdzeniach, wysłowionych pod A , B i C w § 82-gim, możemy zastąpić wyrażenie „liczba względna“ przez wyrażenie „liczba rzeczywista“. Mamy więc twierdzenia następujące:

A) Jeżeli pewna liczba rzeczywista r symetryczna jest pewnej liczbie rzeczywistej r' , to liczba r' symetryczna jest liczbie r .

B) Jeżeli pewna liczba rzeczywista r symetryczna jest pewnej drugiej liczbie rzeczywistej r' , która znów symetryczna jest pewnej trzeciej liczbie rzeczywistej r'' , to liczby r i r'' są pomiędzy sobą równe.

C) Każda liczba rzeczywista r , równa drugiej liczbie rzeczywistej r' , symetrycznej liczbie r'' , jest sama symetryczna liczbie r'' .

Zwróćmy się teraz do równości (6). Ponieważ liczba względna $(0, d)$ oczywiście symetryczna jest liczbie $(d, 0)$, która znów równa się liczbie bezwzględnej d , przeto liczba $(0, d)$ jest symetryczna liczbie bezwzględnej d .

Zatem na podstawie równości (6) mamy twierdzenie następujące:

III. *Wspólna wartość wszystkich liczb rzeczywistych, równych liczbie względnej, której pierwszy wyraz mniejszy jest od drugiego, równa się liczbie rzeczywistej, symetrycznej tej liczbie bezwzględnej, która równa się różnicy bezwzględnej wyrazów rozważanej liczby względnej.*

Twierdzenia II-gie i III-cie uwydatniają znaczenie, jakie przy określaniu wartości liczby rzeczywistej ma liczba bezwzględna d , którą określić możemy jako różnicę bezwzględną wyrazów jakiegokolwiek, byle rozważanej liczby rzeczywistej r równej liczby względnej. Liczbę bezwzględną d zowiemy wartością bezwzględną liczby rzeczywistej r . Obecnie możemy wyrazić treść obu powyższych twierdzeń w postaci jednego twierdzenia następującego:

IV. *Jakąkolwiek liczbę rzeczywistą r rozważalibyśmy, zawsze zachodzić będzie jedna przynajmniej z dwóch okoliczności następujących:*

1°. Liczba r równa się swojej wartości bezwzględnej.

2°. Liczba r symetryczna jest swojej wartości bezwzględnej.

Spostrzegamy z łatwością, że ewentualności wymienione w tem twierdzeniu wogóle wykluczają siebie wzajemnie, a warunek konieczny i wystarczający na to, żeby one zachodziły jednocześnie polega na tem, żeby liczba r była sama sobie symetryczna czyli była liczbą rzeczywistą autosymetryczną, a więc (tw. I) równą zeru.

Wnosimy stąd natychmiast, że ewentualności wymienione w naszym twierdzeniu *zachodzą jednocześnie w razie, ale tylko w razie, kiedy wartość bezwzględna liczby r , a więc i sama ta liczba równa się zeru.*

Jeżeli jakikolwiek symbol S przedstawia oznaczoną liczbę rzeczywistą r , to w takim razie przedstawiamy zazwyczaj przez symbol

$$|S|$$

wartość bezwzględną liczby r .

W § 83-cim umówiliśmy się, że posługiwać się będziemy znakami $(+)$ i $(-)$ w teorii liczb względnych nie tylko do oznaczania działań dodawania i odejmowania, ale jeszcze i w innem znaczeniu, które nazwaliśmy znaczeniem jakościowym. Na podstawie tej umowy symbol

$$+a,$$

gdzie a oznacza jakąkolwiek liczbę względną, przedstawia samą liczbę względną a , a symbol

$$-a$$

liczbę względną symetryczną liczbie a . Jeżeli uprzytomnimy sobie treść § 83-go, to łatwo spostrzeżemy, że właściwy powód do przyjęcia wspomnianej umowy polega na tw. II-giem z § 82-go. Ale, jeżeli w twierdzeniu tem zastąpimy wyrażenie „liczba względna“ przez wyrażenie „liczba rzeczywista“, to ono i po tej zmianie brzmienia oczywiście zachodzić nie przestanie. Wobec tego nadajemy znakom $(+)$ i $(-)$ w teorii liczb rzeczywistych, obok znaczenia symbolów dobrze znanych działań, jeszcze znaczenie znaków jakościowych, *umawiając się, że symbol*

$$+a,$$

gdzie a oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczając na samą tę liczbę, a symbol

$$-a$$

liczbę tej liczbie symetryczną.

Na podstawie tej umowy i tw. IV-go możemy przedstawić wartość jakiegokolwiek liczby rzeczywistej przez jeden z symbolów

$$+d \text{ lub } -d,$$

oznaczając w każdym razie przez d wartość bezwzględną rozważanej liczby rzeczywistej i przyjmując na nią symbol

$$+d,$$

jeżeli ona równa się liczbie d , a symbol

$$-d,$$

jeżeli rozważana liczba rzeczywista równa się symetrycznej liczbie d .

Jeżeli wartość pewnej liczby rzeczywistej r , której wartość bezwzględna równa się pewnej liczbie bezwzględnej d od zera większej, możemy przedstawić przez symbol

$$+d,$$

to ta liczba rzeczywista zowie się liczbą dodatnią, jeżeli zaś wartość jej możemy przedstawić przez symbol

$$-d,$$

to rozważana liczba zowie się liczbą ujemną.

Do nadania tych znaczeń wyrażeniom „liczba dodatnia“ i „liczba ujemna“ skłania nas okoliczność następująca: jeżeli, zachowując powyższe znaczenie na symbolu r i d oznaczymy jeszcze przez l jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, to symbol

$$l + r$$

będzie mógł być uważany za symbol wyniku dodania liczby d do liczby l , lub za symbol wyniku odjęcia liczby d od liczby l , zależnie od tego, czy zachodzi równość

$$r = +d,$$

czy też równość

$$r = -d.$$

Na podstawie powyższych definicji istnieją trzy rodzaje liczb rzeczywistych: liczby dodatnie, ujemne i równe zeru.

Wyrażenie znak gatunkowy liczby rzeczywistej albo wyrażenie krótsze znak liczby rzeczywistej oznacza ten ze znaków

$$(+)\text{ lub }(-),$$

którym zaopatrzyć należy symbol wartości bezwzględnej tej liczby, żeby wartość jej przedstawić w sposób zgodny z umowami poprzednimi. Zwracając się do uwagi, nawiązanej do tw. IV-go, spostrzegamy z łatwością, że liczby równe zeru wyróżniają się od wszystkich innych liczb rzeczywistych przez to, że uważać można za znak gatunkowy którejkolwiek z nich, którykolwiek z obu znaków gatunkowych.

Ze względu na dwa podstawowe warunki (§ 25), do których zawsze zastosowujemy się przy określaniu działań arytmetycznych na wielkościach, tylko wartości wielkości, ulegających takim działaniom, mają istotne znaczenie. Otóż z jednej strony możemy określić w zupełności wartość liczby rzeczywistej, oznaczając jej wartość bezwzględną i jej znak, a z drugiej, jak się przekonamy niebawem, ustawić możemy bardzo proste prawidła na wyznaczanie wartości bezwzględnych i znaków wyników wykonania działań zasadniczych na liczbach rzeczywistych, których wartości bezwzględne i znaki są dane.

Z tej przyczyny uważamy za właściwy symbol liczby rzeczywistej czyli za symbol specyficzny liczby tego rodzaju symbol, utworzony przez postawienie znaku gatunkowego rozważanej liczby po lewej stronie symbolu jej wartości bezwzględnej.

Ponieważ na podstawie umów, przyjętych wyżej, znaczenie symbolu

$$+r$$

nie różni się od znaczenia symbolu

$$r,$$

jakąkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez r , przeto liczne są przypadki, w których bez obawy nieporozumienia możemy opuścić znak gatunkowy $(+)$ w symbolu specyficznym liczby dodatniej; w takich razach oczywiście opuszczamy ten znak. Znak gatunkowy $(-)$ oczywiście nie może być opuszczany w symbolu specyficznym liczby rzeczywistej ujemnej, ale w przypadku szczególnym,

kiedy rozważamy liczbę rzeczywistą o wartości bezwzględnej, równej zeru, wszelki znak gatunkowy w symbolu specyficznym takiej liczby jest zbyteczny, gdyż liczba taka może być uważana wedle upodobania za liczbę znaku (+), albo (—) i równa się w każdym razie zeru. Żeby uzupełnić te wskazówki o sposobie posługiwania się znakami (+) i (—) w znaczeniu znaków gatunkowych, nadmieniamy jeszcze, co następuje: jeżeli pewna liczba rzeczywista *w* przedstawia wartość pewnego wyrażenia arytmetycznego *S*, to tworzymy symbol równoważny symbolowi uzyskanemu, kładąc po lewej stronie symbolu *w* znak gatunkowy (+) lub (—) przez to, że kładziemy ten znak gatunkowy przed symbolem *S*, zamkniętym w nawiasie; jeżeli jednak symbol *S* przedstawia iloczyn lub iloraz i nie jest już zaopatrzony w pewien znak gatunkowy, to nawias opuszczamy.

§ 88. Paragraf obecny poświęcamy ustawieniu reguł do wykonywania porównania ilościowego dwóch liczb rzeczywistych i działań zasadniczych na dwóch liczbach rzeczywistych w przypadku, kiedy te liczby przedstawione są przez ich symbole specyficzne.

Uważajmy tedy dwie liczby rzeczywiste jakiegokolwiek *r* i *r'*, dobierając oznaczenia tak, żeby w przypadku, kiedy rozważane liczby nie mają tego samego znaku, symbol *r* oznaczał liczbę znaku (+). Jeżeli jeszcze oznaczmy przez *d* wartość bezwzględną liczby *r*, a przez *d'* wartość bezwzględną liczby *r'*, to w takim razie mieć będziemy na liczby *r* i *r'* albo wzory

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = + d \\ r' = + d', \end{array} \right.$$

albo

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = + d \\ r' = - d', \end{array} \right.$$

albo nareszcie

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = - d \\ r' = - d'. \end{array} \right.$$

Przy zachowaniu tych symbolów na liczby względne, które wprowadziliśmy w § 79-tym, wzory (1) równoważne są wzorom:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = (d, 0), \\ r' = (d', 0); \end{array} \right.$$

wzory (2) — wzorom:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = (d, 0), \\ r' = (0, d'); \end{array} \right.$$