

XVII. Liczby zespolone proste.

§ 144. Teoria liczb zespolonych zaczęła rozwijać się w XVI wieku. Zaczęto rachować ze wzorami na pierwiastki równania drugiego stopnia, nie oglądając się na to, czy rozważane równanie posiada pierwiastki rzeczywiste. Ponieważ taki sposób postępowania nie tylko nie doprowadzał do sprzeczności, ale nawet podawał niekiedy sposobność do wykrycia takich związków pomiędzy liczbami rzeczywistymi, których poprawność mogła być stwierdzona bez posługiwania się powyższymi wzorami, przeto usiłowano uzasadnić logicznie owe wzory na pierwiastki równania drugiego stopnia z wyróżnikiem ujemnym. Owocem tych usiłowań jest współczesna teoria liczb zespolonych prostych, która jednak została ugruntowana w sposób całkiem poprawny dopiero w ciągu XIX wieku.

§ 145. Żeby teorię liczb zespolonych prostych wysnuć w sposób możliwie najnaturalniejszy z teorii liczb rzeczywistych, oznaczmy przez a, b, a', b', a'', b'' i x liczby rzeczywiste jakiegokolwiek, a przez ζ liczbę rzeczywistą od zera odmienną¹⁾. Załóżmy na początek, że zachodzi nierówność

$$(1) \quad \zeta > 0,$$

i uważajmy równanie

$$(2) \quad x^2 = \zeta.$$

W takim razie zachodzą twierdzenia następujące:

I. *Warunek konieczny i wystarczający, ażeby równość (2) pociągała za sobą równość*

$$(3) \quad a + bx = a' + b'x,$$

¹⁾ Metoda, którą zamierzamy posługiwać się przy ustawianiu pojęcia liczby zespolonej prostej, znajduje się w najbliższym pokrewieństwie z tą metodą ugruntowania teorii liczb wymiernych, którą wyłożyliśmy w § 46-tym.

polega na równościach

$$\left. \begin{aligned} a &= a' \\ b &= b'. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

II. Warunek konieczny i wystarczający, ażeby równość (2) pociągała za sobą równość

$$(a + bx) + (a' + b'x) = a'' + b''x, \quad (5)$$

polega na równościach

$$\left. \begin{aligned} a'' &= a + a' \\ b'' &= b + b'. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

III. Warunek konieczny i wystarczający, ażeby równość (2) pociągała za sobą równość

$$(a + bx)(a' + b'x) = a'' + b''x, \quad (7)$$

polega na równościach

$$\left. \begin{aligned} a'' &= aa' + bb'\zeta \\ b'' &= ab' + a'b. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Żeby uzasadnić pierwsze z tych twierdzeń, zważmy, że istnieją dokładnie dwie wartości na x , które sprawdzają równanie (2); jedna z nich równa się pewnej od zera większej liczbie l , a druga — liczbie

$$-l.$$

Zatem, żeby równość (2) pociągała za sobą równość (3), żeby, innemi słowy, równość (2) zachodziła bez względu na to, którą z wartości

$$+l \text{ lub } -l$$

przyjmiemy na x , koniecznem jest i wystarcza, żebyśmy mieli

$$a + bl = a' + b'l$$

oraz

$$a - bl = a' - b'l,$$

a ponieważ ze względu na nierówność

$$l \neq 0$$

powyższe dwie równości równoważne są równościom (4), przeto tw. I-sze rzeczywiście zachodzi w podanem brzmieniu.

Żeby uzasadnić tw. II-gie, zważmy, że mamy

$$(a + bx) + (a' + b'x) = (a + a') + (b + b')x.$$

Z identyczności tej wynika, że równość (5) równoważna jest równości

$$(9) \quad (a + a') + (b + b')x = a'' + b''x.$$

Ponieważ zaś ze względu na tw. I-sze warunek konieczny i wystarczający, ażeby równość (2) pociągała za sobą równość (9), polega właśnie na równościach (6), przeto stwierdzamy, że tw. II-gie zachodzi w podanem brzmieniu.

Równie łatwo możemy uzasadnić i tw. III-cie. Istotnie, mamy

$$(a + bx)(a' + b'x) = aa' + bb'x^2 + (ab' + a'b)x,$$

skąd wynika, że równość (2) pociąga za sobą równość następującą:

$$(10) \quad (a + bx)(a' + b'x) = (aa' + bb'\xi) + (ab' + a'b)x.$$

Skoro zaś równość (2) pociąga za sobą równość (10), to w razie gdy równość (2) zachodzi, równość (7) równoważna jest równości

$$(11) \quad (aa' + bb'\xi) + (ab' + a'b)x = a'' + b''x,$$

a ponieważ na podstawie tw. I-go równości (8) właśnie stanowią warunek konieczny i wystarczający, ażeby równość (2) pociągała za sobą równość (11), przeto tw. III-cie zachodzi także w podanem brzmieniu.

Trzy twierdzenia, które dopiero co uzasadniliśmy, pozbawione byłyby treści, gdybyśmy przyjęli, że liczba rzeczywista ξ sprawdza nierówność

$$\xi < 0,$$

gdyż w takim razie nie istniałyby takie wartości liczby rzeczywistej x , przy której zachodziłoby równanie (2), ale jakakolwiek liczbę rzeczywistą, chociażby i ujemną, oznaczylibyśmy przez ξ , zawsze moglibyśmy rozważać każdy z układów równości (4), (6) i (8). Uwaga ta prowadzi nas do określenia nowego rodzaju liczb w sposób następujący. Oznaczmy przez (Z) zbiór wszystkich elementów, z których każdy jest układem dwóch liczb rzeczywistych, uważanych w oznaczonym porządku. Z tej definicyi zbioru (Z) wynika oczywiście, co następuje: żeby oznaczyć w zupełności pewien element zbioru (Z) , należy określić nie tylko te dwie liczby

rzeczywiste, które razem ten element tworzą, ale jeszcze nadmienić, która z tych liczb uważana ma być za pierwszą, a przez to samo, która ma być uważana za drugą; pierwszej z takich dwóch liczb rzeczywistych nadamy nazwę wyrazu pierwszego, a drugiej — wyrazu drugiego elementu zbioru (Z). Oznaczywszy przez jakikolwiek symbol u pierwszy wyraz, a przez jakikolwiek drugi symbol v drugi wyraz oznaczonego elementu zbioru (Z), przyjmujemy za symbol tego elementu symbol

$$(u, v).$$

Czytelnik sprawdzi z łatwością, że nie wykraczając ani przeciwko zasadom rozdziału II-go, ani przeciwko zasadom rozdziału V-go, możemy, jakkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczałby symbol ζ , przyjmując definicje następujące:

1° *Orzeczenie, iż dwa elementy (a, b) i (a', b') zbioru (Z) są pomiędzy sobą równe, wyraża, że zachodzą równości*

$$\begin{aligned} a &= a', \\ b &= b'. \end{aligned}$$

2° *Wynikiem dodania do jakiegokolwiek elementu (a, b) zbioru (Z) jakiegokolwiek drugiego elementu (a', b') tegoż zbioru zowiemy wszelki element zbioru (Z) równy elementowi*

$$(a + a', b + b').$$

3° *Iloczynem jakiegokolwiek, za mnożną przyjętego, elementu (a, b) zbioru (Z) przez jakikolwiek drugi, za mnożnik przyjęty, element (a', b') tegoż zbioru zowiemy wszelki element zbioru (Z) równy elementowi*

$$(aa' + \zeta bb', ab' + a'b).$$

Po przyjęciu tych definicji zbiór (Z) staje się zbiorem liczb, którego naturę określa w zupełności wartość przyjęta na ζ .

IV. Powyższym definicyjom odpowiadają dokładnie trzy odmienne od siebie typy (§ 95) liczb. Cechą jednego z nich, któremu damy nazwę typu A , jest nierówność

$$\zeta > 0, \tag{1}$$

cechą drugiego typu, typu B , jest równość

$$\zeta = 0, \tag{2}$$

a cechą trzeciego typu, typu C , jest nierówność

$$\zeta < 0. \tag{3}$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, oznaczmy przez ξ_1 i ξ_2 dwie takie wartości na ξ , żebyśmy mieli

$$(4) \quad \xi_1 \cdot \xi_2 > 0,$$

i oznaczmy przez (Z_1) i (Z_2) te zbiory liczb, które na podstawie powyższych definicji odpowiadają wartościom ξ_1 i ξ_2 liczby ξ . Ze względu na nierówność (4) wyrażenie

$$\frac{\xi_1}{\xi_2}$$

równać się będzie oznaczonej, od zera większej liczbie rzeczywistej. Zatem możemy przyjąć

$$(5) \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = m^2,$$

oznaczając przez m pewną liczbę rzeczywistą, sprawdzającą nierówność

$$(6) \quad m > 0.$$

Powiadam, że zbiory liczb (Z_1) i (Z_2) są pomiędzy sobą izomorficzne, przyczem możemy uważać za liczby homologiczne obu zbiorów każdą taką liczbę (a_1, b_1) zbioru (Z_1) i taką liczbę (a_2, b_2) zbioru (Z_2) , żebyśmy mieli

$$(7) \quad \begin{cases} a_2 = a_1 \\ b_2 = mb_1. \end{cases}$$

Istotnie, równości (7) określają oczywiście taką odpowiedniość wzajemną elementów zbiorów (Z_1) i (Z_2) , iż każdemu elementowi jednego zbioru odpowiada dokładnie jeden element drugiego. Jeżeli oznaczmy przez (a_1, b_1) i (a'_1, b'_1) dwa elementy zbioru (Z_1) , a przez (a_2, b_2) i (a'_2, b'_2) odpowiadające im elementy w sposób dopiero co określony w zbiorze (Z_2) , to zachodzić będą obok równości (7) jeszcze równości

$$(8) \quad \begin{cases} a'_2 = a'_1 \\ b'_2 = mb'_1. \end{cases}$$

Na podstawie równości (7) i (8) oraz definicji 1^o równość

$$(a_1, b_1) = (a'_1, b'_1)$$

oczywiście równoważna jest równości

$$(a_2, b_2) = (a'_2, b'_2).$$

Na podstawie definicji 2^o i 3^o mamy

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a'_1, b'_1) &= (a_1 + a'_1, b_1 + b'_1) \\ (a_2, b_2) + (a'_2, b'_2) &= (a_2 + a'_2, b_2 + b'_2) \\ (a_1, b_1) \cdot (a'_1, b'_1) &= (a_1 a'_1 + \xi_1 b_1 b'_1, a_1 b'_1 + b_1 a'_1) \\ (a_2, b_2) \cdot (a'_2, b'_2) &= (a_2 a'_2 + \xi_2 b_2 b'_2, a_2 b'_2 + b_2 a'_2).\end{aligned}$$

Na podstawie równości (7) i (8) mamy

$$\begin{aligned}a_2 + a'_2 &= a_1 + a'_1 \\ b_2 + b'_2 &= m(b_1 + b'_1).\end{aligned}$$

Z drugiej zaś strony, opierając się ponownie na równościach (7) i (8) i uwzględniając nadto równość (5), mamy

$$\begin{aligned}a_2 a'_2 + \xi_2 b_2 b'_2 &= a_1 a'_1 + \xi_2 m^2 b_1 b'_1 = a_1 a'_1 + \xi_1 b_1 b'_1 \\ a_2 b'_2 + b_2 a'_2 &= m(a_1 b'_1 + b_1 a'_1).\end{aligned}$$

Stwierdzamy więc (§ 95), że zbiory (Z_1) i (Z_2) są rzeczywiście izomorficznymi pomiędzy sobą zbiorami liczb.

Z uzyskanego wyniku wnosimy bezpośrednio, że rozważane definicje obejmują najwyżej trzy typy liczb, z których jeden odpowiada nierówności (1), drugi — równości (2), a trzeci — nierówności (3). Pozostaje więc tylko do wykazania, że każdemu z tych związków odpowiada odmienny typ liczb.

W tym celu zważmy, że bez względu na wartość, jaką przyjęlibyśmy na ξ , zachodzą bezpośrednio na podstawie definicji, nadających zbiorowi (Z) charakter zbioru liczb, okoliczności następujących:

α) Dodawanie elementów zbioru (Z) posiada własność przemienności.

β) Odejmowanie elementów zbioru (Z) jest działaniem jednoznacznem, wykonalnem bez zastrzeżeń, gdyż mamy oczywiście w każdym razie

$$(a, b) - (a', b') = (a - a', b - b'),$$

jeżelikolwiek elementy zbioru (Z) oznaczylibyśmy przez (a, b) i (a', b').

γ) Mnożenie elementów zbioru (Z), przynajmniej w razie dwóch tylko czynników¹⁾, posiada własność przemienności.

¹⁾ W rzeczywistości mnożenie elementów (Z) posiada własność przemienności bez względu na liczbę czynników, ale w dalszym ciągu opierać się będziemy tylko na tem, że rzeczona okoliczność zachodzi przy dwóch czynnikach.

Czytelnik sam sprawdzi z największą łatwością, że bez względu na wartość liczby ζ , istnieje moduł dodawania (str. 93) elementów zbioru (Z) i ma wartość, która w każdym razie równa się liczbie

$$(0, 0)$$

rozważanego zbioru.

Uczyniwszy powyższe uwagi, zastanówmy się przy jakich warunkach iloczyn dwóch liczb zbioru (Z) równa się modułowi dodawania.

Oznaczywszy przez (a, b) i (x, y) dwa elementy zbioru (Z) , mamy

$$(a, b) \cdot (x, y) = (x, y) \cdot (a, b) = (ax + \zeta by, bx + ay).$$

Zatem warunek konieczny i wystarczający, żeby zachodziła równość

$$(9) \quad (a, b) \cdot (x, y) = (0, 0)$$

oraz równoważna tej równości równość

$$(10) \quad (x, y) \cdot (a, b) = (0, 0),$$

polega na równościach

$$(11) \quad \begin{cases} ax + \zeta by = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Na podstawie teorii równań liniowych warunek konieczny i wystarczający, ażeby prócz wartości zerowych na x i y istniał inny jeszcze, równania (11) spełniający układ wartości na te liczby, polega na równości

$$(12) \quad a^2 - \zeta b^2 = 0.$$

Przypadek 1-szy: liczba ζ sprawdza nierówność (1). W takim razie istnieje liczba dodatnia t , sprawdzająca równanie

$$t^2 = \zeta,$$

a ponieważ mamy

$$a^2 - \zeta b^2 = a^2 - t^2 b^2 = (a - tb)(a + tb),$$

przeto, żeby w tym przypadku zachodziło równanie (12), koniecznym jest i wystarcza, żeby zachodziła albo równość

$$(13) \quad a - tb = 0,$$

albo równość

$$(14) \quad a + tb = 0.$$

Zatem w rozważanym przypadku iloczyn dwóch elementów zbioru (Z) może równać się modułowi dodawania nawet w razie, kiedy każdy z czynników ma wartość od modułu dodawania odmienną. Powiadam nadto, że jednak w przypadku, rozważanym obecnie, tylko modułowi dodawania równy element zbioru (Z) ma tę własność, iż kwadrat jego równa się sam modułowi dodawania. Istotnie, jeżeli przyjmiemy

$$a = x \quad \text{oraz} \quad b = y,$$

to równania (11) przyjmą postać następującą:

$$\begin{aligned} x^2 + \xi y^2 &= 0 \\ 2xy &= 0, \end{aligned}$$

z których wynika, że równość

$$(x, y)^2 = (0, 0),$$

rzeczywiście pociąga za sobą równości

$$x = y = 0,$$

czyli równość

$$(x, y) = 0.$$

Przypadek 2-gi: liczba ξ sprawdza równość (2). W takim razie równość (12) przybiera postać

$$a^2 = 0,$$

skąd

$$a = 0.$$

Zatem i w przypadku obecnym iloczyn dwóch elementów zbioru (Z) może równać się modułowi dodawania nawet w razie, kiedy każdy czynnik jest od modułu dodawania odmienny. Nadto stwierdzamy z łatwością, że w rozważanym przypadku istnieją w zbiorze (Z) takie od modułu dodawania odmienne liczby, których kwadraty równają się modułowi dodawania. Istotnie spostrzegamy z największą łatwością, że równość

$$(x, y)^2 = (0, 0)$$

równoważna jest równości

$$x = 0,$$

skąd wynika, że mamy

$$(0, y)^2 = (0, 0),$$

jakąkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez y .

Przypadek 3-ci: liczba ζ sprawdza nierówność (3). W takim razie równość (12) pociąga za sobą równość

$$a = b = 0.$$

Stąd już z łatwością wnosimy, że jeżeli liczba ζ sprawdza nierówność (3), to warunek konieczny i wystarczający, ażeby iloczyn dwóch elementów zbioru (Z) równał się modułowi dodawania, polega na tem, żeby jeden przynajmniej z czynników sam równał się modułowi dodawania.

Teraz możemy już z łatwością udowodnić, że nierówności (1), (2) i (3) charakteryzują odpowiednio odmienne od siebie typy liczb.

W tym celu oznaczmy przez ζ' i ζ'' dowolnie przyjęte liczby rzeczywiste, przez (Z') zbiór liczb, z którym zlewa się zbiór (Z) w razie równości

$$\zeta = \zeta',$$

a przez (Z'') zbiór liczb, z którym zlewa się zbiór (Z) przy wartości

$$\zeta = \zeta''$$

liczby ζ . Załóżmy, że zbiory liczb (Z') i (Z'') są pomiędzy sobą izomorficzne i oznaczmy przez a' , b' i c' trzy liczby jakiekolwiek zbioru (Z') , a przez a'' , b'' i c'' liczby homologiczne zbioru (Z'') . Przy tych oznaczeniach równość

$$(15) \quad a' + b' = c'$$

równoważna jest równości

$$(16) \quad a'' + b'' = c'',$$

a równość

$$(17) \quad a' = c'$$

równości

$$(18) \quad a'' = c''.$$

Jeżeli więc liczba b' taką ma wartość, iż równość (15) równoważna jest równości (17), jeżeli, innemi słowy, liczba b' równa się modułowi dodawania liczb zbioru (Z) , to liczba b'' taką ma wartość, że równość (16) równoważna jest równości (18); odwrotnie, jeżeli liczba b'' taką ma wartość, że równość (16) równoważna jest równości (18), to liczba b' ma taką wartość, że równości (15) i (17) są pomiędzy sobą równoważne.

Z tego wynika, że moduł dodawania μ' liczb zbioru (Z') i moduł dodawania μ' liczb zbioru (Z'') stanowią parę homologicznych pomiędzy sobą liczb w zbiorach (Z') i (Z'') .

Przy powyższych oznaczeniach równość

$$a' \cdot b' = \mu' \quad (19)$$

równoważna jest równości

$$a'' \cdot b'' = \mu'', \quad (20)$$

a nierówności

$$\left. \begin{array}{l} a' \neq \mu' \\ b' \neq \mu' \end{array} \right\} \quad (21)$$

nierównościom

$$\left. \begin{array}{l} a'' \neq \mu'' \\ b'' \neq \mu'' \end{array} \right\} \quad (22)$$

Zatem, jeżeli liczby a' i b' zbioru (Z') mogą być tak dobrane, żeby zachodziły jednocześnie związki (19) i (21), to w zbiorze (Z'') istnieją takie liczby a'' i b'' , które sprawdzają jednocześnie związki (20) i (22).

Opierając się na wynikach, uzyskanych przy badaniu z osobna każdego z trzech przypadków, odpowiadających odpowiednio związkom (1), (2) i (3), wnosimy, że w razie izomorfizmu zbiorów (Z') i (Z'') każdy ze związków

$$\xi' \geq 0 \quad \text{ i } \quad \xi'' \geq 0$$

pociąga za sobą drugi. Zatem, jeżeli zachodzą jednocześnie związki

$$\xi' < 0 \quad \text{ i } \quad \xi'' \geq 0,$$

to zbiory liczb (Z') i (Z'') nie są pomiędzy sobą izomorficzne.

Załóżmy, że liczby a' i b' zbioru (Z') mogą być tak dobrane, żeby prócz związków (19) i (21) zachodził jeszcze związek

$$a' = b'. \quad (23)$$

Mamy tedy

$$a'^2 \neq \mu'$$

oraz

$$a' \neq \mu'.$$

Zatem na podstawie wyników, uzyskanych wyżej, w rozważanym przypadku mamy

$$\xi' = 0. \quad (24)$$

Ponieważ zaś związki (11), (21) i (23) równoważne są związkom (20), (22) i związkowi

$$a'' = b'',$$

przeto przy rozważanych założeniach zachodzą jednocześnie związki

$$a''^2 = \mu''$$

i

$$a'' \neq 0.$$

Mamy więc

$$(25) \quad \zeta'' = 0.$$

Zatem, jeżeli zbiory (Z') i (Z'') są izomorficzne, to równość (24) pociąga za sobą równość (25). Z tego wnosimy natychmiast, że zbiory (Z') i (Z'') nie mogłyby być pomiędzy sobą izomorficzne, gdybyśmy mieli

$$\zeta' = 0$$

oraz

$$\zeta'' \neq 0.$$

Ostatecznie stwierdzamy, że zgodnie z brzmieniem twierdzenia nierównościami (1), (2) i (3) odpowiadają odmienne pomiędzy sobą typy liczb.

Rozwijając dowód twierdzenia poprzedzającego stwierdziliśmy, że *zbiór liczb, który należy do jednego z typów A lub B ma tę własność, iż iloczyn dwóch czynników może równać się modułowi dodawania nawet w razie, kiedy żaden z czynników modułowi dodawania równy nie jest.* Z tego powodu typy liczb A i B za nadto różnią się od typu liczb rzeczywistych, żeby można było oczekiwać większych korzyści od teorii liczb tych typów. Wobec tego zbadamy bliżej tylko typ (C). Ponieważ zaś na podstawie wyjaśnień, podanych w § 95-tym, oznaczony typ liczb uważany być może za zbadany, skoro zbadany jest jeden zbiór liczb tego typu, przeto zbadamy zbiór (Z) , przyjmując na ζ jedną szczególną wartość ujemną.

Oczywiście należy przyjąć na ζ taką wartość, przy której teorya przyjmuje postać możliwie prostą. Warunkowi temu odpowiada oczywiście wartość

$$\zeta = -1.$$

Zbiór liczb, z którym zlewa się w takim razie zbiór (Z) , zowie się zbiorem liczb zespolonych popolitych. Ponieważ

w dalszym ciągu rozdziału niniejszego rozważać będziemy tylko liczby zespolone proste, przeto celem uproszczenia posługiwać się będziemy wyrażeniem „liczba zespolona“ zamiast wyrażenia „liczba zespolona prosta“.

§ 146. W paragrafie poprzedzającym określiliśmy już pojęcie liczby zespolonej i uzasadniliśmy nadto twierdzenia ogólne, z których wynikają bezpośrednio niektóre z własności podstawowych liczb zespolonych. Cel rzeczzonego paragrafu polegał na tem, żeby uwidocznic, w jaki sposób teoria liczb rzeczywistych może doprowadzić do pojęcia liczby zespolonej, a nie na tem, żeby samą tę teorię rozwijać. Ponieważ z tego powodu teoria liczb zespolonych występuje w paragrafie poprzedzającym w związku z teorią ogólniejszą, przeto, żeby uniknąć wszelkiego nieporozumienia, przystępujemy obecnie do wykładu rzeczzonej teorii w sposób całkiem niezależny od rozważań i definicji paragrafu poprzedzającego.

Oznaczmy przez (Z) zbiór wszystkich rzeczy, z których każda jest układem uważanych w oznaczonym porządku dwóch liczb rzeczywistych. Z tej definicji wynika, że pragnąc określić w zupełności element zbioru (Z) , należy oznaczyć te dwie liczby rzeczywiste, które razem rozważany element stanowią, nadmieniając nadto, która z tych dwóch liczb rzeczywistych uważana ma być za pierwszą, a tem samem — która uważana ma być za drugą. Oznaczwszy przez jakiegokolwiek symbole u i v dwie liczby rzeczywiste, umawiamy się, że uważać będziemy symbol

$$(u, v)$$

za symbol tego elementu zbioru (Z) , którym jest układ liczb u, v w przypadku, kiedy uważamy liczbę u za pierwszą, a liczbę v za drugą liczbę w rozważanym układzie.

Żeby zbiór (Z) uczynić zbiorem liczb, oznaczmy przez a, b, a' i b' cztery liczby rzeczywiste i przyjmijmy definicje następujące:

1°. *Orzeczenie, iż dwa elementy (a, b) i (a', b') zbioru (Z) są pomiędzy sobą równe, wyraża, iż zachodzą równości*

$$\begin{aligned} a &= a' \\ b &= b'. \end{aligned}$$

2°. *Wynikiem dodania elementu (a', b') do elementu (a, b) zbioru (Z) , czyli sumą*

$$(a, b) + (a', b')$$

zowiemy każdy element zbioru (Z) równy elementowi

$$(a + a', b + b').$$

3°. Iloczynem przyjętego za mnożną elementu (a, b) zbioru (Z) przez element (a', b') tegoż zbioru, przyjęty za mnożnik, a więc iloczynem

$$(a, b) \times (a', b')$$

zowiemy każdy elementowi

$$(aa' - bb', ab' + ba')$$

równy element zbioru (Z) .

Spostrzegamy natychmiast, że powyższe definicje nie wykracają ani przeciwko zasadom rozdziału II-go, ani przeciwko zasadom rozdziału V-go. Z drugiej strony, na podstawie ogólnej definicji pojęcia liczby (§ 95), po przyjęciu podanych dopiero co definicji, zbiór (Z) staje się zbiorem liczb.

Liczbą zespoloną pospolitą, albo krócej, liczbą zespoloną zowiemy każdy układ dwóch liczb całkowitych, uważany za element zbioru liczb, którym staje się zbiór (Z) po przyjęciu powyższych definicji.

Oznaczmy przez a i b dwie liczby rzeczywiste jakiegokolwiek i uważajmy element

$$(a, b)$$

zbioru (Z) . Ten element zbioru (Z) stanowi oznaczoną liczbę zespoloną; liczbę rzeczywistą a zowiemy pierwszym, a liczbę b — drugim wyrazem rzeczony liczbę zespolonej; za symbol tej liczby zespolonej przyjmujemy tymczasowo symbol

$$(a, b)$$

tego elementu zbioru (Z) , którym jest właśnie rozważana liczba zespolona.

Na podstawie powyższych definicji zbiór liczb zespolonych posiada charakter wielkości tylko w znaczeniu szerszem. Praktyka naukowa poucza nas, że wogóle nie zachodzi potrzeba nadawania liczbom zespolonym charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem. Później poznamy przyczyny natury teoretycznej, które tę okoliczność sprowadzają, ale błędem byłoby mniemanie, że nadanie liczbom zespolonym charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem nie jest możliwe.

Istotnie¹⁾, żeby nadać liczbom zespolonym charakter wielkości w znaczeniu ściślejszem, należy tylko określić, co ma właściwie wyrażać nierówność

$$(a, b) < (a', b'),$$

gdzie oznaczyliśmy przez a, b, a' i b' cztery liczby rzeczywiste. Otóż możemy umówić się, że powyższa nierówność wyraża w razie nierówności

$$a \neq a',$$

iż mamy

$$a < a',$$

a w razie równości

$$a = a',$$

że zachodzi nierówność

$$b < b'.$$

Stwierdzamy z największą łatwością, że, nie wykraczając przeciwko zasadom rozdziału II-go, umowę tę możemy dołączyć do definicyi ustawionych wyżej. Zatem przekonywamy się, że nadanie liczbom zespolonym charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem jest rzeczywiście rzeczą możliwą. W rzeczywistości możnaby, bez wykroczenia przeciwko zasadom rozdziału II-go, jeszcze inne nadać znaczenie nierównościom postaci

$$(a, b) < (a', b').$$

Ponieważ jednak, jakeśmy zaznaczyli wyżej, nie zachodzi potrzeba nadawania liczbom zespolonym charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem, przeto w dalszym ciągu uważać będziemy liczby zespolone za wielkości tylko w znaczeniu szerszem.

§ 147. Spostrzegamy z największą łatwością, że zachodzą twierdzenia następujące:

I. *Dodawanie liczb zespolonych posiada własność łączności i przemienności.*

II. *Jeżeli dwie liczby zespolone (a, b) i (a', b') sprawdzają nierówność*

$$(a, b) \neq (a', b'),$$

to w takim razie mamy

$$(u, v) + (a, b) \neq (u, v) + (a', b'),$$

jakakolwiek liczbę zespoloną oznaczylibyśmy przez (u, v) .

¹⁾ J. Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Funktionen, 1870, p. 41.