

XIII. Pojęcie zbieżności ciągu nieskończonego.

§ 113. Pojęcie ciągu czyli zbioru przedmiotów, następujących po sobie w oznaczonym porządku, należy do tych podstawowych pojęć, które skonstruowanemi być nie mogą i stanowią materiał do wytworzenia innych pojęć. Opieramy się na pojęciu ciągu na samym początku teorii liczb całkowitych¹⁾, a w rozdziałach poprzedzających napotykaliliśmy już wielokrotnie konieczność posługiwania się tem pojęciem. Elementy zbioru, stanowiącego oznaczony ciąg, zowią się elementami lub wyrazami ciągu. W każdym ciągu istnieje pewien wyraz, który stanowi pierwszy wyraz rozważanego ciągu. Żeby wyrazić, iż pewien wyraz pewnego ciągu jest pierwszym wyrazem rozważanego ciągu, powiadamy, że liczba porządkowa czyli numer tego wyrazu równa się jedności. Do każdego innego wyrazu ciągu przywiązujemy także oznaczoną liczbę całkowitą, której dajemy nazwę liczby porządkowej tego wyrazu. Liczbę porządkową jakiegokolwiek, od pierwszego wyrazu odmiennego wyrazu oznaczonego ciągu określamy jako liczbę, która stanowi wynik dodania jedności do liczby porządkowej wyrazu, po którym następuje bezpośrednio rozważany wyraz.

Ponieważ określiliśmy już bezpośrednio liczbę porządkową pierwszego wyrazu ciągu, przeto na podstawie indukcji matematycznej definicya poprzedzająca określa numer każdego wyrazu jakiegokolwiek pomyślanego ciągu. Wyrażenie rząd pewnego wyrazu oznaczonego ciągu oznacza to samo, co numer porządkowy.

Żeby wyrazić, iż liczby porządkowe dwóch wyrazów pewnego ciągu różnią się pomiędzy sobą o jedność, orzekamy, że rozważane wyrazy są wyrazami sąsiednimi.

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych, str. 4.

Oznaczony ciąg, jak to już wiemy z początków teorii liczb całkowitych, zowie się ciągiem skończonym lub nieskończonym, zależnie od tego, czy liczba wyrazów jego jest skończona czy nieskończona.

W ciągu skończonym istnieje zawsze wyraz ostatni, czyli wyraz, po którym nie następuje już żaden inny; w ciągu nieskończonym każdemu wyrazowi odpowiada oczywiście wyraz, który po nim następuje, zatem w ciągu nieskończonym wyraz ostatni nie istnieje.

Wyrażenie „ciąg oznaczony“ oznacza w przypadku, kiedy chodzi o ciąg skończony, ciąg, którego każdy wyraz uważany być może za przedmiot, określony specjalną definicyą. Jeżeli zaś chodzi o ciąg nieskończony, to wyrażenie „ciąg oznaczony“ nie może mieć takiego znaczenia, albowiem każdy element zbioru nieskończonego specjalną definicyą oczywiście określonym być nie może. Kiedy chodzi o ciąg nieskończony, to posługujemy się wyrażeniem „ciąg oznaczony“, żeby wyrazić, iż na podstawie pewnego układu danych (U) wyraz jakiegokolwiek dowolnie danego numeru w rozważanym ciągu winien być pomyślany jako przedmiot oznaczony w zupełności.

Najprostsze przykłady oznaczonego ciągu nieskończonego jest ciąg naturalny liczb całkowitych.

Przedmiot rozważań, które zamierzamy rozwinąć w tym rozdziale, stanowią będą wyłącznie takie ciągi, których wyrazami będą pewne liczby rzeczywiste. Wobec tego posługiwać się będziemy wyrazem „ciąg“ w znaczeniu ciąg liczb.

Ciąg nieskończony symbolizujemy zwykle, umawiając się, że oznaczać będziemy wyraz n -tego rzędu przez pewną literę, zaopatrzoną w wskaźnik n , jakąkolwiek od jedności nie mniejszą wartość miałaby liczba n . Żeby wyrazić, iż oznaczamy ogólnie przez u_n wyraz n -tego rzędu pewnego ciągu, powiadamy, iż rozważamy ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

Żeby wysłowić jakiegokolwiek ogólne zdanie o wyrazach oznaczonego ciągu, przyjmujemy często za podmiot orzeczenia wyrażenie „ogólny wyraz ciągu“; na przykład, żeby wyrazić, iż każdy wyraz pewnego ciągu oznaczamy przez literę u , zaopatrzoną we wskaźnik równy rzędowi uważanego wyrazu, powiadamy, iż oznaczamy przez u_n wyraz ogólny rozważanego ciągu.

Jeżeli chodzi o określenie pewnego ciągu szczególnego, to piszemy niekiedy kolejno wzory na kilka pierwszych wyrazów ciągu, o który chodzi, w ten sposób, żeby na wzorach tych można było łatwo spostrzedz ogólną regułę do wyznaczenia wyrazu jakiegokolwiek rzędu n . Na przykład, żeby wyrazić, iż mamy na myśli ciąg nieskończony, w którym wyraz n -tego rzędu równa się liczbie

$$\frac{1}{2^n},$$

powiadamy, że rozważamy ciąg następujący:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

§ 114. Jeżeli oznaczonemu ciągowi nieskończonemu

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (1)$$

odpowiada pewna liczba g , w stosunku do której zawsze rozwiązalnem jest zadanie, polegające na tem, żeby, przyjąwszy dowolnie pewną od zera większą, ale choćby jak małą liczbę ε , wyznaczyć taką liczbę całkowitą i dodatnią N , iżby nierówność

$$n > N \quad (2)$$

pociągała za sobą nierówność

$$|u_n - g| < \varepsilon, \quad (3)$$

gdzie symbol

$$|u_n - g|$$

oznacza, zgodnie z umową przyjętą w rozdziale X-tym, wartość bezwzględną różnicy

$$u_n - g,$$

to okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że ciąg (1) jest zbieżny. Liczba g zowie się tedy granicą rozważanego ciągu.

Jeżeli pewien ciąg nieskończony nie jest zbieżny, to w takim razie ciąg ten zowie się ciągiem rozbieżnym.

Żeby wyrazić, iż pewien ciąg

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

jest zbieżny, a granicą jego jest pewna liczba g , piszemy równość następującą

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = g.$$

To samo wyrażamy także, orzekając, że wyrażenie u_n zmierza do oznaczonej granicy g , gdy liczba całkowita n rośnie nieograniczenie.

Jeżeli ciąg (1) jest oznaczonym ciągiem zbieżnym, a liczba ε ma pewną oznaczoną wartość, to w takim razie liczba N nie jest oznaczona w zupełności; jeżeli bowiem przy pewnej wartości N_0 tej liczby nierówność (2) pociąga za sobą nierówność (3), to przy każdej wartości na N , od liczby N_0 większej, nierówność (2) oczywiście także pociągać będzie za sobą nierówność (3); w rzeczywistości oznaczoną będzie tylko najmniejsza taka wartość liczby N , przy której nierówność (2) pociąga za sobą nierówność (3).

Spostrzegamy natychmiast, że treść definicji zbieżności ciągu nieskończonego nie uległaby zmianie, gdybyśmy w brzmieniu tej definicji zastąpili związek (2) przez związek

$$(4) \quad n \geq N;$$

albowiem, jeżeli przy pewnej wartości N_0 na N nierówność (2) pociąga za sobą nierówność (3), to przy wartości

$$N = N_0 + 1$$

związek (4) pociągałaby także za sobą nierówność (3); odwrotnie, jeżeli przy pewnej wartości na N związek (4) pociąga za sobą związek (3), to przy tejże wartości na N związek (2) pociągałby za sobą związek (3).

Równie łatwo spostrzegamy, że treść omawianej definicji nie uległaby zmianie, gdybyśmy zastąpili warunek, ażeby jeden ze związków (2) lub (4) pociągał za sobą związek (3), przez warunek, żeby ten sam ze związków (2) lub (4) pociągał za sobą związek

$$(5) \quad |u_n - g| \leq \varepsilon.$$

Istotnie, jeżeli jeden ze związków (2) lub (4) pociąga za sobą związek (3), to tenże związek pociąga za sobą oczywiście i związek (5), jeżeli zaś do każdej od zera większej wartości na ε możemy dołączyć taką wartość na N , żeby jeden ze związków (2) lub (4) pociągał za sobą związek (5), to przyjąwszy na ε jakąkolwiek wartość od zera większą i wyznaczwszy następnie liczby N tak, żeby jeden ze związków (2) lub (4) pociągał za sobą związek

$$(6) \quad |u_n - g| \leq \varepsilon',$$

gdzie oznaczyliśmy przez ε' liczbę większą od zera a mniejszą od ε , ale poza tem dowolnie przyjętą, dopniemy tego, żeby ten ze związków (2) lub (4), który pociągałby za sobą związek (6), pociągał za sobą także i związek (3).

Twierdzenie podstawowe. Dwie nierówne pomiędzy sobą liczby nie mogą być granicami tego samego ciągu nieskończonego. Innemi słowy: granica oznaczonego ciągu, o ile istnieje, oznaczona jest w zupełności. Albo jeszcze inaczej: jeżeli każda z pewnych dwóch liczb g i g' uważana być może za granicę oznaczonego ciągu nieskończonego

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (7)$$

to liczby te sprawdzają równość

$$g = g'. \quad (8)$$

Udowodnimy twierdzenie poprzedzające w ostatniej z trzech postaci, w których je wyraziliśmy. Załóżmy tedy, że każda z liczb g i g' uważana być może za granicę ciągu (7). W takim razie ciąg (7) będzie z konieczności ciągiem zbieżnym.

Jeżeli więc oznaczmy przez ε jakąkolwiek, byle od zera większą liczbę, to ze względu na to, iż liczba g uważana być może za granicę rozważanego ciągu, odpowiadać będzie liczbie ε pewna liczba całkowita i dodatnia N' taka, żeby z nierówności

$$n > N' \quad (9)$$

wynikała nierówność

$$|u_n - g| < \varepsilon. \quad (10)$$

Ponieważ z drugiej strony liczba g' także uważana być może za granicę ciągu (7), przeto liczbie ε odpowiadać będzie pewna taka liczba całkowita i dodatnia N'' , żeby nierówność

$$n > N'' \quad (11)$$

pociągała za sobą nierówność

$$|u_n - g'| < \varepsilon. \quad (12)$$

Oznaczmy przez N liczbę całkowitą i dodatnią nie mniejszą od żadnej z liczb N' i N'' . W takim razie nierówność

$$n > N \quad (13)$$

pociągać będzie za sobą obie nierówności (9) i (11), a więc i obie nierówności (10) i (12).

Mamy

$$\begin{aligned} g - g' &= (u_n - g') - (u_n - g), \\ \text{skąd} \quad |g - g'| &\leq |u_n - g'| + |u_n - g|, \end{aligned}$$

skąd znów wynika nierówność

$$(14) \quad |g - g'| < 2\varepsilon,$$

ze względu na nierówności (10) i (12), które zachodzić będą niezawodnie, jeżeli, co zakładamy, liczba n sprawdza nierówność (13). Ponieważ wyrażenie

$$|g - g'|$$

wcale od liczby n nie zależy, ponieważ z drugiej strony możemy przyjąć na ε jakąkolwiek, byle od zera nie większą wartość, ponieważ więc możemy liczbę ε tak dobrać, żeby wyrażenie 2ε równało się jakiegokolwiek, byle od zera większej liczbie, przeto w rzeczywistości udowodniliśmy, co następuje: wartość bezwzględna różnicy

$$g - g'$$

mniejsza jest od każdej od zera większej liczby. Mamy zatem

$$g - g' = 0$$

czyli

$$g = g'.$$

Dowiedliśmy więc, że równość (8) jest koniecznem następstwem założenia, iż każda z liczb g i g' uważana być może za granicę ciągu (7), a o to właśnie chodziło.

Spostrzegamy z łatwością, że istnieje nieskończenie wiele ciągów zbieżnych, których granica równa się dowolnie oznaczonej naprzód liczbie g . Jeżeli na przykład przyjmujemy

$$u_n = g + \frac{a}{n},$$

oznaczając przez a dowolnie przyjętą liczbę, to ciąg $u_1, u_2, u_3 \dots$ będzie oczywiście zbieżny, a granica jego równać się będzie liczbie g .

§ 115. Podstawowe znaczenie ciągów nieskończonych zbieżnych polega na tem, iż zwykle poznać możemy liczbę, którą pragniemy wyznaczyć, tylko przybliżenie w postaci pewnego wyrazu ciągu zbieżnego, którego granicą jest właśnie liczba, o wyznaczenie

której chodzi. Uwaga ta nie tylko tłumaczy nam znaczenie ciągów nieskończonych, ale poucza nas, że podstawowe zagadnienia teorii ciągów są następujące:

1°. Ustawić takie kryterium zbieżności ciągu nieskończonego, którego zastosowanie nie wymagałoby wyznaczenia granicy tego ciągu w razie jego zbieżności.

2°. Mając dwa lub kilka ciągów zbieżnych, wyznaczyć ciąg zbieżny, którego granica równałaby się wynikowi wykonania oznaczonego układu działań zasadniczych na granicach rozważanych ciągów.

§ 116. I. *Konieczny i wystarczający warunek zbieżności oznaczonego ciągu*

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (1)$$

polega na możebności dobrania do dowolnie przyjętej, byle od zera większej, ale choćby jak małej liczby ε , takiej liczby całkowitej i dodatniej N , żeby nierówność

$$\left. \begin{array}{l} i > N, \\ j > N \end{array} \right\} \quad (2)$$

pociągały za sobą nierówność

$$|u_i - u_j| < \varepsilon. \quad (3)$$

1°. Podany warunek jest konieczny. Istotnie, jeżeli ciąg (1) jest zbieżny, a liczba g przedstawia jego granicę, to do dowolnie przyjętej, byle od zera większej liczby μ , możebnem jest dobranie takiej liczby całkowitej i dodatniej N , żeby nierówność

$$n > N \quad (4)$$

pociągała za sobą nierówność

$$|u_n - g| < \mu. \quad (5)$$

Zastrzegając sobie bliższe określenie liczby μ na później, założmy, że liczba N tak została wyznaczona, żeby nierówność (5) wynikała z nierówności (4). W takim razie nierówności (2) pociągać będą za sobą nierówności

$$\left. \begin{array}{l} |u_i - g| < \mu, \\ |u_j - g| < \mu, \end{array} \right\}$$

a ponieważ mamy

$$u_i - u_j = (u_i - g) - (u_j - g),$$

skąd wynika

$$|u_i - u_j| \leq |u_i - g| + |u_j - g|,$$

przeto nierówności (2) pociągać będą za sobą nierówność

$$|u_i - u_j| < 2\mu.$$

Jeżeli więc wyznaczymy liczbę μ z równości

$$2\mu = \varepsilon$$

i określimy następnie liczbę N tak, żeby nierówność (4) pociągała za sobą nierówność (5), to nierówności (2) pociągać będą za sobą nierówność (3). Ponieważ w razie zbieżności ciągu (1) wszystkie te czynności są wykonalne, przeto stwierdzamy, że podany warunek jest rzeczywiście koniecznym warunkiem zbieżności rzeczowego ciągu.

2°. Podany w twierdzeniu warunek zbieżności jest wystarczający. Zakładam, że warunek ten jest spełniony i powiadam najpierw, że istnieją dwie liczby L' i L'' takie, żebyśmy mieli

$$(6) \quad L' \leq u_i \leq L''$$

przy wszystkich wartościach całkowitych, od zera większych wskaźnika i . Istotnie, oznaczmy przez a dowolnie przyjętą, od zera jednak większą liczbę i oznaczmy przez m taką liczbę całkowitą i dodatnią, żeby nierówności

$$\begin{aligned} i &> m, \\ j &> m \end{aligned}$$

pociągały za sobą nierówność

$$|u_i - u_j| < a.$$

Na podstawie założenia, przyjętego za podstawę obecnych rozważań, istnienie liczby m jest pewne. Ze względu na definicyę liczby m nierówność

$$(7) \quad i > m$$

pociągać będzie za sobą nierówność

$$|u_i - u_{m+1}| < a,$$

która jest równoważna nierównościom

$$-a < u_i - u_{m+1} < a,$$

znów równoważnym nierównościami

$$u_{m+1} - a < u_i < u_{m+1} + a. \quad (8)$$

Oznaczmy przez L' jakąkolwiek, od żadnej z liczb

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_m, u_{m+1} - a$$

nie większą, a przez L'' jakąkolwiek od żadnej z liczb

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_m, u_{m+1} + a$$

nie mniejszą liczbę. Z tej definicji liczb L' i L'' wynika bezpośrednio, że nierówności (6) zachodzić będą niezawodnie dla wszystkich od liczby m nie większych wartości wskaźnika i . Z drugiej strony, zestawiając definicję liczb L' i L'' z tą okolicznością, iż nierówność (7) pociąga za sobą nierówności (8), spostrzegamy natychmiast, że nierówności (7) zachodzić będą także i przy wszystkich, nierówności (7) sprawdzających wartościach wskaźnika i . Zatem nierówności (6) zachodzić będą przy wszystkich od jedności nie mniejszych wartościach wskaźnika i .

Uzasadniliśmy zatem istnienie takich dwóch liczb L' i L'' , żeby nierówności (6) zachodziły bez względu na wartość wskaźnika i .

Żeby posunąć się dalej, dzielimy zbiór liczb wymiernych na dwie klasy (G_1) i (G_2) w sposób następujący: jeżeli do pewnej liczby wymiernej w możebnem jest dobrać takiej liczby całkowitej i dodatniej N_1 , żeby nierówność

$$k \geq N_1 \quad (9)$$

pociągała za sobą nierówność

$$u_n - w > 0, \quad (10)$$

to liczbę tę zaliczamy do klasy (G_1); jeżeli zaś okoliczność poprzedzająca nie zachodzi, to zaliczamy liczbę w do klasy (G_2).

Wszelka liczba wymierna, mniejsza od liczby L' , należy oczywiście do klasy (G_1), a wszelka liczba wymierna, większa od liczby L'' , należy oczywiście do klasy (G_1). Zatem w każdym ze zbiorów (G_1) i (G_2) istnieje nieskończenie wiele liczb. Z drugiej strony każda liczba wymierna, równa pewnej liczbie zbioru (G_1), albo mniejsza od pewnej liczby tego zbioru, należy oczywiście sama do tegoż zbioru. Zatem każda liczba zbioru (G_2) większa jest od każdej liczby

zbioru (G_1) . Z tego zaś wynika, że podział zbioru liczb wymiernych na zbiory (G_1) i (G_2) stanowi pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych.

Oznaczmy przez g liczbę na przekroju tym położoną. Powiadam, że liczba g jest granicą ciągu (1). Oznaczmy przez μ pewną od zera większą, ale poza tem dowolnie przyjętą liczbę μ . Do liczby tej zawsze można będzie dobrać dwie liczby wymierne, z których jedna w_1 należałaby do zbioru (G_1) , a druga — do zbioru (G_2) i które sprawdzałyby nierówność

$$(11) \quad w_2 - w_1 < \mu;$$

jeżeli bowiem oznaczmy przez w_0 dowolnie przyjętą liczbę w zbiorze (G_1) , przez p liczbę całkowitą, sprawdzającą nierówność

$$\frac{1}{p} < \mu,$$

a przez q taką liczbę całkowitą, żebyśmy mieli

$$w_0 + \frac{q}{p} > L'',$$

to pierwszy wyraz ciągu

$$w_0, \quad w_0 + \frac{1}{p}, \quad w_0 + \frac{2}{p}, \dots, \quad w_0 + \frac{q}{p}$$

należać będzie do zbioru (G_1) , a ostatni do zbioru (G_2) .

Zatem istnieć będą w ciągu powyższym dwa wyrazy sąsiednie,

$$w_0 + \frac{h}{p} \quad \text{ i } \quad w_0 + \frac{h+1}{p},$$

z których pierwszy należeć będzie do zbioru (G_1) , a drugi do zbioru (G_2) . Jeżeli tedy przyjmiemy

$$w_1 = w_0 + \frac{h}{p}, \quad w_2 = w_0 + \frac{h+1}{p},$$

to liczby w_1 i w_2 sprawdzać będą nierówność (11) i należeć będą odpowiednio do zbiorów (G_1) i (G_2) .

Zakładamy więc, że liczby wymierne w_1 i w_2 rzeczywiście spełniają warunki poprzedzające. Ponieważ liczba g leży na przekroju (P) , przeto mamy

$$(12) \quad w_1 \leq g \leq w_2.$$

Uważajmy obok liczby μ inną liczbę ε od zera większą, ale poza tem przyjętą dowolnie, niezależnie od wyboru liczby μ i założymy, że liczba całkowita i dodatnia N została tak wyznaczona, żeby nierówności (2) pociągały za sobą nierówność (3); istnienie liczby N jest pewne, albowiem obecne rozważania opierają się na założeniu, iż warunek stanowiący według brzmienia twierdzenia warunek zbieżności ciągu (1), jest spełniony. Ponieważ liczba wymierna w_1 należy do zbioru (G_1) , przeto na podstawie definicyi zbioru tego odpowiadać będzie liczbie w_1 taka liczba całkowita i dodatnia N_1 , żeby nierówność

$$j > N_1 \quad (13)$$

pociągała za sobą nierówność

$$u_j - w_1 > 0. \quad (14)$$

Oznaczmy przez N_2 liczbę całkowitą i dodatnią nie mniejszą od żadnej z liczb N i N_1 .

Pomiędzy liczbami całkowitemi większemi od liczby N_2 istnieje jedna przynajmniej liczba całkowita t taka, żebyśmy mieli

$$u_t \leq w_2, \quad (15)$$

gdyż w przypadku przeciwnym nierówność

$$t > N_2$$

pociągałaby za sobą nierówność

$$u_j > w_2$$

i liczba w_2 wbrew założeniu należałaby do zbioru (G_1) , a nie do zbioru (G_2) . Ponieważ liczba t większa jest od liczby N_2 , która znów mniejszą nie jest od żadnej z liczb N i N_1 , przeto liczba t sprawdza jednocześnie nierówności następujące:

$$t > N_1 \quad (16)$$

$$t > N. \quad (17)$$

Zważywszy, iż nierówność (13) pociąga za sobą nierówność (14), wnosimy z nierówności (16), iż zachodzić będzie nierówność

$$u_t > w_1. \quad (18)$$

Z nierówności (12), (15) i (18) wynika natychmiast, że mamy

$$(19) \quad |u_i - g| < \mu.$$

Z drugiej strony, ponieważ nierówności (2) pociągają za sobą nierówność (3), przeto ze względu na nierówność (17) nierówność

$$(20) \quad i > N$$

pociągać będzie za sobą nierówność

$$(21) \quad |u_i - u_i| < \varepsilon,$$

a ponieważ mamy

$$u_i - g = (u_i - u_i) + (u_i - g),$$

skąd

$$|u_i - g| \leq |u_i - u_i| + |u_i - g|,$$

przeto ze względu na nierówność (19) i ze względu na to, iż nierówność (20) pociąga za sobą nierówność (21), nierówność (20) pociągać będzie za sobą nierówność

$$(22) \quad |u_i - g| < \varepsilon + \mu.$$

Zważywszy, że liczby ε i μ są liczbami od zera większemi, ale poza tem całkiem dowolnie i niezależnie pomiędzy sobą przyjętymi liczbami; zważywszy nadto, że liczba N zależy wyłącznie od liczby ε , a bynajmniej od liczby μ zależną nie jest, spostrzegamy, że uzyskany wynik możemy przedstawić w postaci następującej: do dowolnie przyjętej, byle od zera większej liczby ε , możliwe jest dobranie takiej liczby całkowitej i dodatniej N , żeby nierówność (20) pociągała za sobą nierówność (22), jakakolwiek od zera większą liczbę oznaczylibyśmy przez μ . Z tego zaś wynika, że nierówność (20) pociąga za sobą nierówność

$$(23) \quad |u_i - g| \leq \varepsilon;$$

gdyby bowiem istniała taka nierówność (20), sprawdzająca wartość α wskaźnika i , przy którejby związek (23) nie zachodził, to przy tej wartości wskaźnika i mielibyśmy

$$|u_\alpha - g| > \varepsilon$$

i wbrew temu, cośmy udowodnili wyżej, istniałaby od zera większa wartość na μ , mianowicie jakakolwiek wartość, byleby czyniąca zadość nierównościom

$$0 < \mu < |u_\alpha - g| - \varepsilon,$$

przy której nierówność (20) nie pociągałaby za sobą bezwarunkowo nierówności (22), gdyż dla $i = \alpha$, nierówność (20) zachodziłaby, a nierówność (22) nie byłaby spełniona. Ostatecznie każdej dowolnie przyjętej, byle od zera większej liczbie ε odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia N , żeby nierówność (20) pociągała za sobą nierówność (23). Zatem ciąg (1) jest zbieżny, a granica ciągu tego równa się rzeczywiście liczbie g . Dowiedliśmy więc, że warunek zbieżności ciągu nieskończonego, podany w twierdzeniu, jest rzeczywiście dostatecznym warunkiem zbieżności, a to tylko pozostawało jeszcze do uzasadnienia.

Uwaga I. Rozwijając dowód twierdzenia poprzedzającego, dowiedliśmy, że nierówność (20) z pewnością pociągać będzie za sobą nierówność (23), jeżeli tylko nierówność (2) pociąga za sobą nierówność (3). Zatem, żeby wyznaczyć przybliżenie granicę g ciągu zbieżnego (1) tak, żeby popełniony błąd nie był większy od pewnej od zera większej liczby ε , wystarczy w zupełności dobrać tylko do liczby ε taką liczbę całkowitą i dodatnią N żeby nierówności (2) pociągały za sobą nierówność (3), albowiem w takim razie każdy taki wyraz rozważanego ciągu, którego rząd większy jest od liczby N , a więc w szczególności wyraz

$$u_{N+1},$$

przedstawiać będzie granicę g ciągu z żądanym stopniem przybliżenia. W praktyce zastosowanie tej metody może być połączone z wielkimi trudnościami, zdarzyć się nawet może, iż zastosowanie jej jest niemożliwe, gdyż posiadać możemy dostateczne wiadomości o ciągu, żeby mieć pewność, iż ciąg ten jest zbieżny, nie posiadając wiadomości dostatecznych do rozwiązania zadania, polegającego na tem, żeby do liczby ε tak dobrać liczbę N , iżby nierówności (2) pociągały za sobą nierówność (3). Jeżeli jednak jesteśmy w stanie zadanie to rzeczywiście rozwiązać, jakkolwiek od zera większą wartość przyjąlibyśmy na ε , to granicę odnośnego ciągu należy uważać za znaną w znaczeniu, określonym w § 91-szym.

Uwaga II. Ponieważ warunek zbieżności ciągu nieskończonego, podany w twierdzeniu dopiero co udowodnionem, jest warunkiem koniecznym, ponieważ dowiedliśmy, że do następstw warunku tego należy istnienie takich dwóch liczb L' i L'' , żeby wszystkie wyrazy ciągu sprawdzały nierówności (6), przeto istnienie

liczb L' i L'' należy do następstw zbieżności ciągu (1). Fakt istnienia dwóch liczb L' i L'' takich, żeby wszystkie wyrazy ciągu (1) sprawdzały nierówności (6), wyrażamy, orzekając, że wyrazy rozważanego ciągu są ograniczone. Możemy tedy powiedzieć, że *wyrazy ciągu zbieżnego zawsze są ograniczone*.

Uwaga III. Jeżeli żaden wyraz pewnego ciągu nieskończonego zbieżnego nie jest ani mniejszy od pewnej liczby L' , ani większy od pewnej drugiej liczby L'' , to granica rozważanego ciągu nie jest ani mniejsza od liczby L' , ani większa od liczby L'' , albowiem, gdyby liczba L' większa była od liczby g , albo liczba g od liczby L'' , to w pierwszym przypadku nie każda liczba wymierna mniejsza od liczby L' należałaby do zbioru (G_1) , gdyż wszystkie liczby wymierne pośrednie pomiędzy liczbami g i L' należałyby do zbioru (G_2) , a w drugim — nie każda liczba większa od liczby L'' należałaby do zbioru (G_2) , ponieważ liczby wymierne pośrednie pomiędzy liczbami L'' i g należałyby do zbioru (G_1) .

Twierdzenie poprzedzające podaje nam całkiem ogólne kryterium do rozstrzygania, czy pewien ciąg nieskończony jest zbieżny, a na podstawie tego kryterium można stwierdzić zbieżność oznaczonego ciągu, nie wyznaczając poprzednio jego granicy. Należy jednak dodać, że bezpośrednie zastosowanie rzeczzonego kryterium połączone jest często z wielkimi trudnościami. Wobec tego wielkie usługi oddaje twierdzenie, które podamy, skoro tylko poprzednio określimy pewne wyrażenia.

Uważajmy pewien ciąg skończony lub nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

Jeżeli przy wszystkich możebnych wartościach wskaźnika k zachodzi nierówność

$$u_k < u_{k+1},$$

to orzekamy, że rozważany ciąg jest ciągiem wzrastającym w znaczeniu ściślejszem; jeżeli zaś zamiast związku powyższego zachodzi stale tylko związek

$$u_k \leq u_{k+1},$$

to w takim razie orzekamy, iż rozważany ciąg jest ciągiem wzrastającym w znaczeniu szerszem.

Żeby wyrazić, iż zachodzi stale nierówność

$$u_k > u_{k+1},$$

orzekamy, że rozważany ciąg jest ciągiem malejącym w znaczeniu ścisłym. W przypadku zaś, kiedy mamy stale tylko związek

$$u_k \geq u_{k+1},$$

orzekamy, że rozważany ciąg jest ciągiem malejącym w znaczeniu szerszym.

Ciągiem monotonicznym nazywamy wszelki ciąg, który jest albo ciągiem wzrastającym, albo ciągiem malejącym w znaczeniu szerszym lub ścisłym.

II. *Ciąg monotoniczny, którego wyrazy są ograniczone, jest zawsze ciągiem zbieżnym.*

Przedewszystkiem czynimy uwagę następującą: jeżeli pewien ciąg nieskończony

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (1)$$

jest zbieżny, a granica jego równa się pewnej liczbie g , to ciąg nieskończony

$$-u_1, -u_2, -u_3, \dots \quad (2)$$

także jest zbieżny, a granica jego równa się liczbie

$$-g,$$

albowiem, skoro pewnej od zera większej liczbie ε odpowiada taka liczba całkowita i dodatnia N , żeby nierówność

$$i > N \quad (3)$$

pociągała za sobą nierówność

$$|u_i - g| < \varepsilon,$$

to nierówność (3) pociągać będzie za sobą i nierówności

$$|(-u_i) - (-g)| < \varepsilon.$$

Zważmy teraz, że jeżeli ciąg (1) jest monotoniczny, to ciąg (2) także będzie ciągiem monotonicznym, a nadto jeden z tych ciągów będzie wzrastającym, a drugi malejącym. Ponieważ zaś na podstawie uwagi dopiero co uczynionej ciągu (1) i (2) tylko jednocześnie być mogą ciągami zbieżnymi, przeto twierdzenie nasze udowodnione będzie w podanym brzmieniu, jeżeli tylko okażemy, że ciąg wzrastający, którego wyrazy są ograniczone, jest zbieżny. Zakładamy tedy, że ciąg (1) jest ciągiem wzrastającym, o wyra-

zach ograniczonych. Ponieważ w takim razie żaden wyraz ciągu (1) od pierwszego wyrazu u_1 mniejszym nie będzie, przeto warunek, ażeby ciąg ten był ciągiem o wyrazach ograniczonych, redukuje się do istnienia takiej liczby L , żebyśmy mieli

$$(4) \quad u_i \leq L$$

bez względu na wartość wskaźnika i .

Moglibyśmy udowodnić zbieżność ciągu (1), zastosowując do ciągu tego ogólne kryterium zbieżności wynikające z tw. I-go; dojdziemy jednak prościej nieco do celu, nie opierając się na wspomnianem twierdzeniu.

Możemy oczywiście podzielić zbiór wszystkich liczb wymiernych na dwa zbiory (G_1) i (G_2) , podobnie jakśmy to uczynili przy dowodzie tw. I-go, oświadczając, że oznaczoną liczbę wymierną w uważać będziemy za element zbioru (G_1) lub zbioru (G_2) , zależnie od istnienia lub nieistnienia takiej liczby całkowitej N , żeby nierówność

$$(5) \quad i > N$$

pociągała za sobą nierówność

$$u_i - w > 0.$$

Odwołując się do rozważań przy dowodzie tw. I-go, stwierdzamy, że rozważany podział zbioru liczb wymiernych stanowi pewien przekrój (P) tego zbioru. Powiadamy, że liczba g , położona na przekroju (P) , jest granicą ciągu (1). Istotnie, oznaczmy przez ε dowolnie przyjętą liczbę, byle od zera większą.

Owóż, podobnie jak przy dowodzie tw. I-go, możemy wyznaczyć dwie liczby wymierne w_1 i w_2 , należące odpowiednio do zbiorów (G_1) i (G_2) takie, żebyśmy mieli

$$(6) \quad w_2 - w_1 < \varepsilon.$$

Mamy tedy

$$(7) \quad w_1 \leq g \leq w_2.$$

Ponieważ liczba w_1 należy do zbioru (G_1) , przeto istnieć będzie taka wartość na N , żeby nierówność (5) pociągała za sobą nierówność

$$(8) \quad u_i > w_1.$$

Z drugiej strony żaden wyraz ciągu (1) nie może być większy od liczby w_2 ; gdybyśmy bowiem mieli

$$u_k > w_2,$$

to ze względu na to, iż ciąg (1) jest ciągiem wzrastającym, nierówność

$$i > k$$

pociągałaby za sobą nierówność

$$u_i > w_2$$

i liczba w_2 byłaby wbrew założeniu jednym z elementów zbioru (G_1) . Mamy więc w każdym razie

$$u_i \leq w_2, \quad (9)$$

a ponieważ nierówność (5) pociąga za sobą nierówność (8), przeto w razie nierówności (5) zachodzi prócz nierówności (9) nierówność (8), skąd wynika ze względu nierówności (7), że mamy w takim razie

$$|u_i - g| < \varepsilon. \quad (10)$$

Dowiedliśmy więc, że każdej, byle od zera większej liczbie ε odpowiada taka liczba całkowita N , żeby nierówność (5) pociągała za sobą nierówność (10). Zatem ciąg (1) jest rzeczywiście ciągiem zbieżnym, którego granica równa się liczbie g .

Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Uwaga I. Niejednokrotnie zdarza się, że zbieżność pewnego ciągu możemy stwierdzić na podstawie twierdzenia poprzedzającego, nie umiając jednak liczbowo rozwiązać zadania, polegającego na wyznaczeniu liczby N w taki sposób, żeby nierówność (5) pociągała za sobą nierówność (10). W takim razie mamy wprowadzić pewne wiadomości o granicy ciągu, ale w znaczeniu określonym w § 91-szym granicy tej za liczbę znaną uważać nie możemy.

Uwaga II. Granica ciągu zbieżnego wzrastającego nie jest mniejsza od żadnego wyrazu rozważanego ciągu, a granica ciągu zbieżnego malejącego nie jest większa od żadnego wyrazu tego ciągu. Słuszność uwagi tej wynika bezpośrednio z rozważań rozwiniętych wyżej.

W rozdziale następującym, poświęconym teorii szeregów, poznamy inne twierdzenia, które podają środki dogodne do rozstrzy-

gnięcia w pewnych przypadkach o zbieżności lub rozbieżności oznaczonego ciągu.

§ 117. Rozwiązaniem drugiego z problemów podstawowych (§ 115) teorii ciągów jest twierdzenie następujące:

Oznaczmy przez u_n i v_n wyrazy rzędu n -tego dwóch ciągów nieskończonych zbieżnych i, posługując się symbolistyką określoną w § 114-tym, przyjmijmy

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} u_n = a$$

$$(2) \quad \lim_{n=\infty} v_n = b.$$

W takim razie zachodzić będą związki następujące:

$$(3) \quad \lim_{n=\infty} (u_n + v_n) = a + b,$$

$$(4) \quad \lim_{n=\infty} (u_n - v_n) = a - b,$$

$$(5) \quad \lim_{n=\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b,$$

oraz w razie, kiedy zachodzi nierówność

$$(6) \quad b \neq 0,$$

jeszcze i związek następujący:

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

Związki (1) i (2) wyrażają, że każdej dowolnie przyjętej, byle od zera większej liczbie ε odpowiadają dwie liczby całkowite N' i N'' takie, żeby nierówność

$$u > N'$$

pociągała za sobą nierówność

$$|u_n - a| < \varepsilon,$$

a nierówność

$$n > N''$$

nierówność

$$|v_n - b| < \varepsilon.$$

Jeżeli, wyznaczwszy w sposób powyższy liczby N' i N'' , oznaczmy przez N liczbę nie mniejszą od żadnej z liczb N' i N'' , to nierówność

$$(8) \quad n > N$$