

oraz związki

$$\left. \begin{aligned} |x - u| &\leq \eta \\ |y - v| &\leq \mu. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ponieważ ze związków (2) i z definicyi liczb L wynikają związki

$$|u| \leq L, \quad |v| \leq L,$$

przeto na podstawie związków (1), (3), (4), i ze względu na tw. III-cie zachodzić będzie nierówność

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{u}{v} \right| \leq \varepsilon.$$

Związek ten wyraża, że w razie kiedy posiadamy symbol specyficzny liczby wymiernej od zera większej, mogącej być uważaną za dolną granicę wartości bezwzględnej dzielnika, jesteśmy w stanie rozwiązać zadanie III-cie.

Z tej dyskusyi trzech zadań, wysłowionych wyżej, wynikają bezpośrednio konsekwencye następujące:

Możemy „wyznaczyć” wynik wszelkiej kombinacyi liczb rzeczywistych „danych” drogą dodawania, odejmowania i mnożenia. Jeżeli zaś chodzi o taką kombinacyę liczb rzeczywistych „danych” drogą działań zasadniczych, do której wchodzi jeden lub kilka ilorazów, to nie tylko nie zawsze możemy „wyznaczyć” wynik rozważanej kombinacyi, ale nawet możemy nie umieć rozstrzygnąć, czy wynik wogóle istnieje. Jeżeli jednak jesteśmy w posiadaniu symbolów specyficznych liczb wymiernych, od zera większych, mogących być uważanymi za dolne granice wartości bezwzględnych dzielników przy tych ilorazach, które wchodzi do rozważanej kombinacyi liczb rzeczywistych, to w takim razie możemy „wyznaczyć” wynik kombinacyi, o którą chodzi.

Ta metoda wyznaczania wyniku kombinacyi liczb „danych”, która wypływa bezpośrednio z tego, cośmy uzasadnili w paragrafie niniejszym, wogóle nie najszybciej do celu prowadzi. Metody korzystne ze stanowiska techniki rachunkowej do rozwiązywania zagadnień tego rodzaju należą do teoryi rachunków przybliżonych, której ze względu na cele natury teoretycznej tego dzieła, wykladać tu nie będziemy.

§ 93. Rozszerzenie pojęcia potęgi. Część wyników uzyskanych w § 33-cim możemy wysłowić w sposób następujący:

Oznaczmy przez (Z) jakikolwiek zbiór wielkości, byle spełniający warunki następujące:

1°. Wszystkie liczby całkowite bezwzględne należą do zbioru (Z) .

2°. Mnożenie elementów zbioru (Z) posiada własności łączności i przemienności.

3°. Iloczyn dowolnie przyjętego elementu a ze zbioru (Z) przez jedność równa się samemu elementowi a .

4°. Iloczyn elementów zbioru (Z) równa się zeru w razie, ale tylko w razie, kiedy jeden czynnik przynajmniej równa się zeru.

5°. Dzielenie elementów zbioru (Z) wykonalne jest jednoznacznie, jeżeli tylko element, przyjęty za dzielnik, jest od zera odmienny.

Jeżeli tedy oznaczmy przez a i b dwa elementy zbioru (Z) , to mieć będziemy równości następujące:

$$(1) \quad a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

$$(2) \quad (a^m)^p = a^{m \cdot p}$$

$$(3) \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$(4) \quad a^m : a^p = a^{m-p}$$

$$(5) \quad a^m : b^m = (a : b)^m,$$

gdzie oznaczyliśmy przez m i p dwie liczby całkowite, od zera nie mniejsze, które, o ile chodzi o równość (4), spełniają jeszcze związek

$$(6) \quad m \geq p.$$

Jeżeli żadna z liczb całkowitych m i p od jedności mniejsza nie jest, jeżeli nadto, o ile chodzi o równość (4), liczby całkowite m i p sprawdzają związek

$$m - p \geq 1,$$

to równości (1), (2) i (3) zachodzą bez żadnych zastrzeżeń co do wartości elementów a i b , równość (4) przy $a \neq 0$, a równość (5) przy $b \neq 0$; jeżeli zaś wartość zero na liczby całkowite m i p , a nadto, o ile chodzi o równość (4), i na różnicę

$$m - p$$

wykluczona nie jest, to wartości elementów a i b podlegają ograniczeniu, polegającemu na tem, żeby żaden z nich zeru równy nie był.

Pojęcie liczby całkowitej ujemnej, które posiadamy obecnie, przywodzi nas z natury rzeczy do pytania następującego:

Czy pojęcie potęgi nie mogłoby być rozszerzone tak, żeby przy zachowaniu symbolu

$$a^t$$

na potęgę o zasadzie a i o wykładniku t , równości (1), (2), (3), (4) i (5) zachodziły, jakiekolwiek wartości całkowite dodatnie, ujemne lub zerowe przyjęlibyśmy na liczby m i p ?

Już w § 33-cim, przy określeniu potęg o wykładnikach równych zeru przywiedzeni byliśmy do ograniczenia wartości zasady potęgi przez warunek polegający na tem, żeby zasada nie była zeru równą. Wobec tego założymy przy rozważaniach, mających na celu uzyskanie odpowiedzi na powyższe pytanie, przynajmniej na początek, że element, przyjęty za zasadę potęgi, jest od zera odmienny.

Założmy chwilowo, że należy odpowiedzieć twierdząco na pytanie, o które chodzi. W takim razie, byleby zachodziła nierówność

$$a \neq 0,$$

moglibyśmy przyjąć na m i p w równości (1) jakiekolwiek wartości całkowite dodatnie lub ujemne. Przyjmijmy na m jakąkolwiek wartość całkowitą ujemną, a na p wartość określoną równaniem

$$p = -m.$$

W takim razie symbol p oznaczałby pewną liczbę całkowitą i dodatnią, a równość (1) przyjęłaby postać następującą:

$$a^m \cdot a^p = a^0 = 1,$$

skąd

$$a^m = \frac{1}{a^p}.$$

Równość ta wyraża twierdzenie następujące:

I. Jeżeli wogóle możliwą jest rzeczą podać taką definicyę potęgi o wykładniku ujemnym, a o zasadzie od zera odmienną, żeby równości (1), (2), (3), (4) i (5) zachodziły, jakiekolwiek liczby całkowite, dodatnie, ujemne lub zerowe, oznaczałyby symbole m i p , byleby tylko żaden z elementów a i b zeru równy nie był, to definicya taka równoważna być musi następującej:

Potęgą o wykładniku równym dowolnie przyjętej liczbie całkowitej ujemnej t jakiegokolwiek, byle od zera odmiennego, za zasadę potęgi przyjętego, elementu a zbioru (Z) zowiemy iloraz podziału je-

dności przez taką potęgę elementu a , której wykładnik równa się liczbie całkowitej dodatniej, przedstawiającej wartość bezwzględną liczby t .

Powiadam, że definicya poprzedzająca czyni zadość w zupełności warunkom pytania, na które pragniemy odpowiedzieć. Żeby się o tem przekonać, należy tylko dowieść, że w razie przyjęcia tej definicyi zachodzą równości następujące:

$$\begin{aligned} (7) \quad & a^x \cdot a^y = a^{x+y} \\ (8) \quad & (a^x)^y = a^{x \cdot y} \\ (9) \quad & a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \\ (10) \quad & a^x : a^y = a^{x-y} \\ (11) \quad & a^x : b^x = (a : b)^x, \end{aligned}$$

gdzie oznaczyliśmy przez a i b dowolnie przyjęte, byle od zera odmienne elementy zbioru (Z), a przez x i y dwie liczby całkowite, z których każda mieć może jakąkolwiek wartość dodatnią, ujemną lub zerową.

Uzasadnimy najpierw równość (7), przyjmując w tym celu

$$\begin{aligned} m &= |x|, \\ p &= |y|. \end{aligned}$$

Na podstawie tych równań każdy z symbolów m i p oznacza pewną od zera nie mniejszą liczbę całkowitą. Ponieważ na podstawie wyników uzyskanych poprzednio równość (7) zachodzi niezawodnie, jeżeli żadna z liczb x i y mniejsza od zera nie jest, przeto winniśmy tylko zbadać przypadki, kiedy jedna przynajmniej z tych liczb jest liczbą ujemną. Zważywszy, że ze względu na własność przemienności mnożenia przypadek, kiedy liczba x ma znak ($-$), a y — znak ($+$), tylko pod względem oznaczeń różni się od przypadku, w którymby liczba x miała znak ($+$) a y — znak ($-$), winniśmy dwa tylko przypadki uwzględnić, a mianowicie przypadek, kiedy zachodzą wzory

$$(12) \quad \begin{cases} x = +m \\ y = -p, \end{cases}$$

i przypadek, kiedy mamy

$$(13) \quad \begin{cases} x = -m \\ y = -p. \end{cases}$$

W razie wzorów (12) mamy

$$a^x = a^m$$

$$a^y = 1 : a^p,$$

skąd

$$a^x \cdot a^y = a^m \cdot \{1 : a^p\},$$

skąd znowu

$$a^x \cdot a^y \cdot a^p = a^m \cdot [\{1 : a^p\} \cdot a^p] = a^m,$$

mamy więc

$$a^x \cdot a^y = a^m : a^p, \quad (14)$$

z drugiej zaś strony mamy

$$a^{x+y} = a^{m-p}. \quad (15)$$

W razie związku

$$m \geq p$$

równość (7) wynika z równości (14) i (15) na podstawie równości (4). Jeżeli zaś zachodzi nierówność

$$m < p,$$

to z równości (15) wynika równość

$$a^{x+y} = 1 : a^{p-m},$$

równoważna równości

$$a^{x+y} \cdot a^{p-m} = 1,$$

skąd

$$a^{x+y} \cdot a^{p-m} \cdot a^m = a^m,$$

a ta równość jest na podstawie twierdzenia, polegającego na równości (1), równoważna równości

$$a^{x+y} \cdot a^p = a^m,$$

z której wynika wzór

$$a^{x+y} = a^m : a^p.$$

Porównywując wzór ten ze wzorem (14), stwierdzamy, że równość (7) zachodzi i w tym przypadku. Zatem, żeby dowieść, iż równość (7) zachodzi we wszystkich przypadkach, pozostaje tylko do okazania, że równość ta zachodzi w razie, kiedy na x i y mamy wzory (13). Mamy tedy

$$a^{x+y} = a^{-(m+p)} = 1 : a^{m+p} \quad (16)$$

oraz

$$a^x \cdot a^y = a^{-m} \cdot a^{-p} = (1 : a^m) \cdot (1 : a^p),$$

skąd

$$a^x \cdot a^y \cdot a^m \cdot a^p = \{(1 : a^m) \cdot a^m\} \cdot \{(1 : a^p) \cdot a^p\} = 1.$$

Zwracając się do równości (1), wyprowadzamy natychmiast z równości poprzedzającej równość

$$(a^x \cdot a^y) \cdot a^{m+p} = 1,$$

która oczywiście równoważna jest równości

$$a^x \cdot a^y = 1 : a^{m+p}.$$

Równość ta i równość (16) pociągają za sobą równość (7). Ostatecznie więc, równość (7) zachodzi rzeczywiście, jakiejkolwiek wartości dodatnie, ujemne lub zerowe miałyby liczby całkowite x i y .

Żeby uzasadnić równość (8), należy uwzględnić prócz przypadków, w których zachodzą wzory (12) lub (13), jeszcze i przypadek, kiedy mamy

$$(17) \quad \begin{cases} x = -m \\ y = +p, \end{cases}$$

albowiem, gdy chodzi o równość (8), bynajmniej nie możemy drogą prostej zmiany oznaczeń sprowadzić przypadku wzorów (17) do przypadku wzorów (12).

W razie wzorów (12) mamy

$$(18) \quad a^x \cdot y = a^{-m \cdot p} = 1 : a^{m \cdot p}$$

oraz

$$(a^x)^y = (a^m)^{-p} = 1 : (a^m)^p,$$

skąd

$$(a^x)^y = 1 : a^{m \cdot p}$$

na podstawie równości (2). Zatem ze względu na (18), równość (8) zachodzi niezawodnie w rozważanym przypadku.

Załóżmy teraz, że zachodzą wzory (17). W takim razie równość (18) oczywiście znowu zachodzić będzie. Z drugiej zaś strony mamy

$$(a^x)^y = (a^{-m})^p = (1 : a^m)^p$$

skąd

$$(a^x)^y = 1^p : (a^m)^p = 1 : (a^m)^p$$

na podstawie twierdzenia, polegającego na równości (5).

Uwzględniając równość (2) i zestawiając równość poprzedza-

jącą z równością (18) stwierdzamy natychmiast, że równość (8) zachodzi i w przypadku obecnym.

Założmy nareszcie, że na wykładniki x i y zachodzą wzory (13). Mamy tedy

$$a^{x \cdot y} = a^{m \cdot p} \quad (19)$$

oraz

$$(a^x)^y = (a^{-m})^{-p} = 1 : (1 : a^m)^p,$$

a ponieważ, opierając się kolejno na twierdzeniach, polegających odpowiednio na równościach (5) i (2), stwierdzamy łatwo, że mamy

$$(1 : a^m)^p = 1 : a^{m \cdot p},$$

przeto mamy

$$(a^x)^y = 1 : (1 : a^{m \cdot p})$$

skąd

$$(a^x)^y \cdot (1 : a^{m \cdot p}) = 1,$$

skąd znowu

$$(a^x)^y \cdot (1 : a^{m \cdot p}) \cdot a^{m \cdot p} = a^{m \cdot p}$$

czyli

$$(a^x)^y = a^{m \cdot p}.$$

Zestawiając równość tę z równością (19), uzyskujemy znowu równość (8). Ponieważ równość (2) wyraża, że równość (8) zachodzi w tym przypadku, kiedy mamy

$$x = +m, \quad y = +p,$$

przeto na podstawie tego, cośmy już uzasadnili, równość (8) zachodzi rzeczywiście, jakiegokolwiek wartości ujemne, zerowe lub dodatnie miałyby liczby całkowite x i y .

Zwróćmy się teraz do uzasadnienia równości (9). Równość (3) wyraża, że równość (9) zachodzi w przypadku, kiedy liczba całkowita x od zera mniejsza nie jest. Wobec tego winniśmy tylko zbadać przypadek, w którym mamy

$$x = -m,$$

gdzie oznaczyliśmy przez m liczbę całkowitą dodatnią. Mamy tedy

$$(a \cdot b)^x = (a \cdot b)^{-m} = 1 : (a \cdot b)^m, \quad (20)$$

oraz

$$a^x \cdot b^x = a^{-m} \cdot b^{-m} = (1 : a^m) \cdot (1 : b^m),$$

skąd

$$(a^x \cdot b^x) \cdot (a^m \cdot b^m) = \{(1 : a^m) \cdot a^m\} \cdot \{(1 : b^m) \cdot b^m\} = 1,$$

mamy więc

$$a^x \cdot b^y = 1 : (a^m \cdot b^m),$$

a ponieważ mamy

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

na podstawie równości (3), przeto

$$a^x \cdot b^y = 1 : (a \cdot b)^m.$$

Zestawiając równość tę z równością (20), uzyskujemy równość (9), o którą właśnie chodziło.

Dowiedliśmy więc, że równość (9) zachodzi, jakkolwiek wartość ujemną, zerową lub dodatnią miałaby liczba całkowita x .

Równości (10) i (11) wypływają odpowiednio z twierdzeń, z których jedno polega na równości (7), a drugie — na równości (9), drogą rozumowania, nie różniącego się niczem od rozważań, któremi posługiwaliśmy się w § 33-cim, żeby wysnuć twierdzenia, polegające odpowiednio na równościach (4) i (5), z twierdzeń, które polegają odpowiednio na równościach (1) i (3).

Obecnie możemy już dać odpowiedź na pytanie, które założyliśmy sobie wyżej, a mianowicie następującą: pojęcie potęgi może być rozszerzone w ten sposób, żeby spełnione były warunki wspomnianego pytania, o ile chodzi o przypadek, w którym zasada potęgi jest od zera odmienna, ale ze względu na tw. I-sze, takie rozszerzenie pojęcia potęgi uskutecznione być może tylko definicyą równoważną definicyi następującej:

Potęga o wykładniku równym dowolnie przyjętej liczbie całkowitej ujemnej t jakiegokolwiek, byle od zera odmiennego, za zasadę potęgi przyjętego elementu a zbioru (Z) , zowiemy iloraz podziału jedności przez taką potęgę elementu a , której wykładnik równa się liczbie całkowitej dodatniej, przedstawiającej wartość bezwzględną liczby t .

Ze względu na taki wynik naszych badań przyjmujemy ostatecznie tę definicyę i tem samem uzyskujemy twierdzenie następujące:

II. Jeżeli oznaczymy przez a i b dwa jakiegokolwiek, byle od zera odmiennie elementy takiego zbioru wielkości (Z) , który spełnia warunki wyszczególnione na początku tego paragrafu¹⁾, to w takim razie za-

¹⁾ Możemy więc w szczególności rozumieć pod a i b dwie jakiegokolwiek, byle od zera odmiennie liczby rzeczywiste.

chodzą równości (7), (8), (9), (10) i (11), jakiegokolwiek liczby całkowite, ujemne lub dodatnie, oznaczylibyśmy przez x i y .

Uzyskana przez nas odpowiedź na pytanie możności takiego rozszerzenia pojęcia potęgi do wykładników równych jakimkolwiek liczbom całkowitym ujemnym, żeby równości (7), (8), (9), (10) i (11) zachodziły przy wszystkich wartościach całkowitych ujemnych, zerowych i dodatnich wykładników x i y , niezupełnie jest wyczerpująca, gdyż z rozważań naszych wykluczylismy przypadek, w którymby zasada potęgi równała się zeru.

Zwracamy się tedy do zbadania tego przypadku szczególnego. Powiadam, że *nie istnieje taka definicja potęgi liczby zero o wykładniku ujemnym lub zerowym, żeby spełniała w zupełności wszystkie warunki pytania*. Istotnie, najpierw taka definicja potęg liczby 0, przy której wyrażenie

$$0^x$$

mogłoby przyjmować chociażby przy jednej tylko od zera nie większej wartości całkowitej

$$x = \alpha,$$

wykładnika x od zera odmienną wartość, niezawodnie warunków pytania spełniałby nie mogła, albowiem, gdybyśmy mieli

$$0^\alpha \neq 0, \quad (21)$$

to z równości

$$0^\alpha \cdot 0^0 = 0^{\alpha+0} = 0^\alpha$$

wynikałaby równość

$$0^0 = 1, \quad (22)$$

a ponieważ na podstawie teorii potęg o wykładnikach dodatnich mamy

$$0^{-\alpha} = 0,$$

przeto, przyjmując w równości (7)

$$a = 0, \quad x = \alpha, \quad y = -\alpha,$$

uzyskalibyśmy równość

$$0^{\alpha-\alpha} = 0^\alpha \cdot 0^{-\alpha}$$

czyli

$$0^0 = 0^\alpha \cdot 0^{-\alpha},$$

która pociągałaby za sobą równość

$$0^0 = 0,$$

sprzeczną z równością (22).

Pozostaje więc tylko do zbadania, czy moglibyśmy przyjąć

$$0^x = 0$$

bez względu na wartość wykładnika x . W takim razie równości (7), (8) i (9) oczywiście zachodziłyby przy wszystkich wartościach całkowitych na x i y , chociażby nawet jeden z elementów a i b , albo i obydwa te elementy równały się zeru, ale w razie równości

$$a = 0$$

równość (10) już nie zachodziłaby, gdyż iloraz

$$a^x : a^y$$

byłby postaci

$$0 : 0,$$

skąd wynika, że rozważany iloraz posiadałby nieskończenie wiele wartości, z których nie każda równałaby się wyrażeniu

$$a^{x-y},$$

równemu zeru w rozważanych warunkach.

Wobec takiego stanu rzeczy *nie wprowadzamy do nauki żadnej definicji takiej potęgi liczby zero, której wykładnik równałby się zeru, albo był od zera mniejszy i uważamy symbol*

$$0^x$$

za pozbawiony znaczenia, skoro tylko mamy

$$x \leq 0.$$

§ 94. Teorya potęg przywodzi z natury rzeczy do zagadnienia następującego: Oznaczając przez a i n dwie liczby dane, z których liczba a może być jakąkolwiek liczbą rzeczywistą, a liczba n tylko liczbą całkowitą, wyznaczyć liczbę x z równania następującego:

$$(1) \quad x^n = a.$$

Gdybyśmy mieli $n = 0$, to równość poprzedzająca mogłaby zachodzić tylko w razie, kiedy liczba a równa się jedności, ale

w tym przypadku równość ta zachodziłaby przy każdej od zera odmiennej wartości na x . Gdyby zaś liczba całkowita n była ujemna, to równość (1) byłaby równoważna równości

$$x^{n'} = a',$$

bylebyśmy przyjęli $n' = -n$, $a' = \frac{1}{a}$, i zagadnienie sprowadzone byłoby do przypadku, kiedy mamy $n > 0$. Wobec tego zbadamy równanie (1) w założeniu, że liczba n jest od zera większa.

Liczba x , o ile istnieje, zowie się tedy pierwiastkiem n -tym liczby a ; liczbę a nazywamy w takim razie podstawą —, a liczbę n — wskaźnikiem lub stopniem rozważanego pierwiastka; na pierwiastek n -ty oznaczonej liczby a przyjmujemy symbol

$$\sqrt[n]{a}. \quad (2)$$

W przypadku szczególnym, kiedy liczba a równa się zeru, istnieje dokładnie jedna wartość na x , która sprawdza równanie (1), mianowicie

$$x = 0.$$

Pozostaje więc do zbadania przypadek, kiedy zachodzi nierówność

$$a \neq 0. \quad (3)$$

Oznaczając tedy przez A wartość bezwzględną liczby a , a przez X wartość bezwzględną liczby x , o ile liczba ta wogóle istnieje, mamy z równania (1)

$$X^n = A \quad (4)$$

a z nierówności (3) nierówność

$$A > 0. \quad (5)$$

Najpierw zbadajmy bliżej równanie (4). Powiadam, że istnieje najwyżej jedna tylko wartość na X , która sprawdza to równanie. Istotnie, uważajmy dwie nierówne pomiędzy sobą liczby, od zera nie mniejsze, i oznaczmy przez l mniejszą z tych liczb, a przez l' drugą. Mamy tedy

$$l'^n > l^n, \quad (6)$$

albowiem w razie, kiedy liczba n równa się jedności, nierówność poprzedzająca zachodzi niezawodnie, a gdybyśmy mieli

$$l'^k > l^k,$$

to mielibyśmy

$$l'^{k+1} = l'^k l' > l'^k l' > l'^{k+1},$$

skąd

$$l'^{k+1} > l'^{k+1}$$

i nierówność, o którą chodzi, byłaby spełniona i przy wartości

$$n = k + 1$$

na n . Zatem nierówność (6) zachodzi w każdym razie na podstawie zasady indukcji matematycznej. Gdyby więc jedna z wartości

$$X = l \quad \text{lub} \quad X = l'$$

na X sprawdzała równanie (4), to już druga wartości równaniu temu nie mogłaby czynić zadość. Zatem istnieje rzeczywiście najwyżej jedna tylko wartość na X , czyniąca zadość równaniu (4). Powiadam, że taka wartość na X zawsze istnieje.

Istotnie, jeżeli żadna wartość wymierna na X równania (4) nie sprawdza, to n -ta potęga jakiegokolwiek liczby wymiernej jest albo mniejsza, albo większa od liczby A . Z drugiej strony istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych, których n -te potęgi mniejsze są od liczby A i nieskończenie wiele liczb wymiernych, których n -te potęgi większe są od A ; jeżeli bowiem oznaczymy przez C liczbę całkowitą jakąkolwiek, byle sprawdzającą nierówności

$$C > A \quad \text{i} \quad C > \frac{1}{A},$$

to w takim razie n -ta potęga każdej liczby wymiernej większej od liczby C , większa jest od samej liczby C , a więc i od liczby A , a n -ta potęga liczby wymiernej dodatniej mniejszej od liczby ułamkowej

$$\frac{1}{C},$$

która oczywiście mniejsza jest od liczby A , będzie mniejsza od liczby

$$\frac{1}{C^n},$$

mniejszej od liczby $\frac{1}{C}$, i będzie zatem mniejsza od liczby A .

Możemy więc określić pewnie przekrój (P) zbioru liczb wymiernych dodatnich, oświadczając, że zbiór liczb wymiernych

1-szej kategorii (K_1) w stosunku do przekroju tego jest zbiorem wszystkich liczb wymiernych, których n -te potęgi mniejsze są od liczby A , a zbiór liczb 2-giej kategorii (K_2), w stosunku do tegoż przekroju — zbiorem wszystkich liczb wymiernych, których n -te potęgi większe są od liczby A . Jeżeli oznaczmy przez L liczbę położoną na tym przekroju, to wartość

$$X = L \quad (7)$$

na X sprawdzać będzie równanie (4).

Istotnie, oznaczmy przez (A_1) zbiór n -tych potęg liczb zbioru (K_1), a przez (A_2) zbiór n -tych potęg liczb zbioru (K_2). Na podstawie teorii mnożenia liczb bezwzględnych zbiór (A_1) przedstawia pierwszą część, a zbiór (A_2) drugą część pewnego określника $\{(A_1), (A_2)\}$ liczby równej wyrażeniu

$$L^n,$$

a ponieważ, na podstawie definicji zbiorów (K_1) i (K_2) liczba A większa jest od każdej liczby zbioru (A_1), ale jest mniejsza od każdej liczby zbioru (A_2), przeto

$$L^n = A,$$

skąd wynika, że wartość (7) na X rzeczywiście sprawdza równanie (4).

Obecnie powracamy do równania (1). Z rozważań poprzedzających wynika, że prócz wartości

$$x = +X \quad (8)$$

i

$$x = -X, \quad (9)$$

gdzie X oznacza liczbę, określoną równaniem (7), nie może istnieć żadna inna taka wartość rzeczywista na x , która sprawdzałaby równanie (1).

Jeżeli liczba n jest parzysta, a liczba a od zera większa, to każda z wartości (8) i (9) na x oczywiście równanie to sprawdza; jeżeli zaś liczba n jest parzysta, ale liczba a od zera mniejsza, to żadna wartość rzeczywista na x równaniu (1) czynić zadość nie może, gdyż w takim razie, jakkolwiek wartość miałyby liczba rzeczywista x , zachodzi związek

$$x^n \geq 0,$$

który znajduje się w sprzeczności z równaniem (1), skoro tylko liczba a sprawdza nierówność

$$a < 0.$$

Jeżeli nareszcie liczba n jest nieparzysta, to jedna z wartości (8) lub (9) na x , ale tylko jedna z nich czyni zadość równaniu (1), a wartością tą jest oczywiście ta, której znak gatunkowy zlewa się ze znakiem gatunkowym liczby a .

Z tej dyskusji równania (1) wynika, że zależnie od tego, czy liczba całkowita n jest parzysta czy nieparzysta, i od tego, któremu ze związków

$$a < 0, \quad a = 0 \quad \text{ i } \quad a > 0$$

czyni zadość liczba a , symbol

$$(10) \quad \sqrt[n]{a}$$

może nie oznaczać żadnej liczby rzeczywistej, może oznaczać pewną liczbę rzeczywistą określoną w zupełności, albo przedstawiać bez różnicy którąkolwiek z dwóch liczb rzeczywistych.

Jeżeli symbol a oznacza liczbę rzeczywistą, nie mniejszą od zera, to usuwamy zwykle ewentualną dwuznaczność symbolu (10), nadmieniając, że symbol ten uważamy za symbol liczby nie mniejszej od zera.

