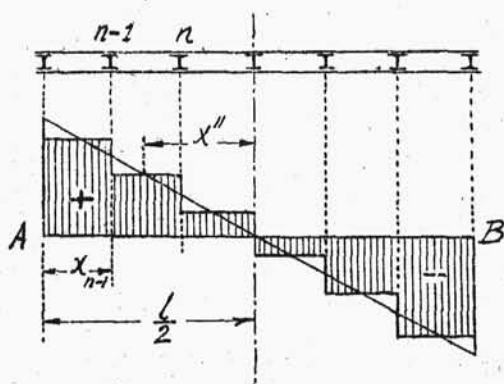


Zauważmy, że do powyższych spostrzeżeń możnaby dojść również drogą analityczną, miarkując, że skoro istnieje obciążenie węzłowe, - to zamiast ciężaru ciągłego -  $p$  kg. na jednostkę bieżącą, trzeba wyobrazić sobie, że na każdy węzeł z każdego przęsła wypada po  $\frac{1}{2}pd$ . Jeżeli zatem mamy przekrój  $C'C''$  między jakimiś dwoma węzłami:

$[n-1]$ -ym i  $[n]$ -ym - to przedewszystkiem jasne, że między wspomnianymi punktami poprzeczna siła jest wielkością stałą, ponieważ prócz sił w węzłach żadnych innych w przęsle niema; wielkość zaś tej siły równa się - oczywiście - podporowej reakcji  $\frac{1}{2}pl$  - mniej całe obciążenie od  $A$  do



Rys. 48.

węzła  $[n-1]$ -ego, czyli  $p \cdot x_{n-1}$  / jeżeli przez  $x_{n-1}$  oznaczmy odległość od podpory  $A$  do tego węzła/ oraz mniej  $\frac{1}{2}pd$ , a zatem

$$Q = \frac{1}{2}pl - px_{n-1} - \frac{1}{2}pd = p\left(\frac{l}{2} - x_{n-1} - \frac{d}{2}\right) = p \cdot x''.$$

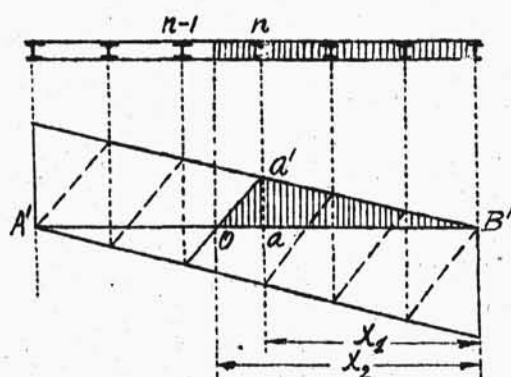
Otrzymaliśmy ten sam wyraz, co i dla obciążenia

bezpośredniego /patrz rys.48/. Wynika z tego, że dla każdego przęsła od  $[n-1]$ -ego do  $[n]$ -ego węzła stała wartość  $Q$  równa się wielkości  $Q$  przy obciążeniu bezpośredniem, obliczonej dla środka przęsła. Jasna jest też stąd i cała wogóle konstrukcja schodkowej linii.

Jeżeli teraz mamy do czynienia z obciążeniem równomiernem, ale ruchomem, - to dla określenia max.  $Q$  dla przęsła  $[n]$ -ego mamy - jak i dawniej - wzór max.  $Q$ , który graficznie budujemy podobnie jak i dawniej /str.130/, tylko że pierwszy odcinek  $[\frac{1}{2} Kl \cdot \frac{x_1}{l}]$  tworzy się na  $aa'$  /pod węzłem/ - ostateczny zaś -  $[\frac{1}{2} Kl \frac{x_1}{l} \cdot \frac{x_2}{l}]$  na linii, przechodzącej przez zerowy punkt przęsła. Dla każdego danego małego przęsła max.  $Q$  jest też constans i wyraża się poziomą linią, przeprowadzoną

przez punkt  $O'$ .

Jeżeli dokreśli-  
my na dole schodko-  
wą linię dla  $Q$ ,  
odpowiadającą ciąg-  
łemu bezpośrednie-  
mu obciążeniu, -  
to sumując odnośne

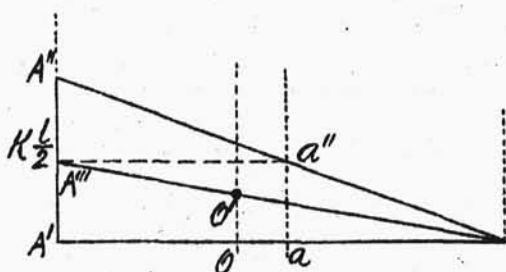


$$Q_{n-1} = K[\Delta Oa'B'] = \frac{Ka'a x_2}{2} \\ = \frac{Kx_1 x_2}{2l} = \frac{Kl}{2} \cdot \frac{x_1}{l} \cdot \frac{x_2}{l}$$

Rys. 49a.

rzędne, otrzymamy wykres dla max.  $Q$  od obu obciążeń /patrz rys. 50/.

Przystąpimy teraz do omówienia sposobów wykreślania linii wpływu dla momentów. Jeżeli /rys. 51/

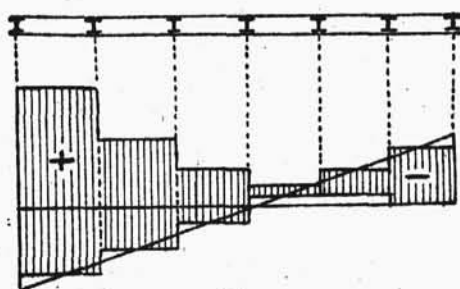


$$A'A'' = K \cdot \frac{l}{2}; \quad aa'' = \frac{Kl}{2} \cdot \frac{x_1}{l} = A'A'''$$

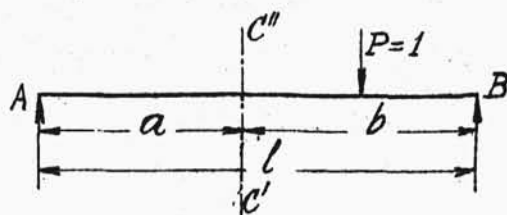
$$OO' = \frac{Kl}{2} \cdot \frac{x_1}{l} \cdot \frac{x_2}{l} = Q_{n-1}$$

$O'$  - jest punktem wykresu.

Rys. 49 b.



Rys. 50.

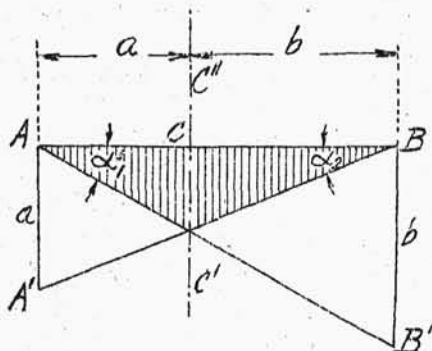


Rys. 51.

na belce  $AB$  wyobrazimy sobie ciężar  $P=1$  po prawej stronie przekroju  $C'C''$ , - to moment po lewej stronie  $M_{C'C''} = A \cdot a$ .

Jeżeli zaś mamy ten ciężar po lewej stronie  $C'C''$ , to  $M_{C'C''}$  /lewostronny/ dogodniej jest wtedy określać za pomocą momentu prawostronnego, ten zaś ostatni  $= B \cdot b$  i jest ujemny; zatem  $M_{C'C''} = B \cdot b$  - jest dodatni. Rozpatrując jeden i drugi wzór widzimy, że

moment otrzymuje się zawsze z odporowej reakcji, pomnożonej przez  $a$  - względnie przez  $b$ . Chcąc zatem wielkość jego uzmysłowić graficznie, należy zastosować tę samą metodę co i do wykreślenia linii wpływu  $Q$ , tylko zamiast żeby odkładać w punkcie  $A$  - względnie  $B$  - jednostkę siły, należy pod  $A$  odłożyć  $1 \cdot a$ , zaś pod  $B$  -  $1 \cdot b$  i przytem oba odcinki w jedną stronę - na dół, - ponieważ  $M$  posiada na całym przebiegu jednakowy znak /patrz rys. 52/.



Rys. 52.

Poprowadzić trzeba następnie proste linie od  $A'$  do  $B$  i od  $A$  do  $B'$ .

Linie te muszą przeciąć się na linii  $C'C''$  w punkcie  $C'$ . Istotnie z  $\triangle A'BA$  mamy:

$$C'C = \frac{a \cdot b}{l} \quad \text{zaś z } \triangle ABB'$$

$$\text{też } C'C = \frac{b \cdot a}{l} \quad . \quad \text{Widać}$$

zatem, że punkt  $C'$  jest wspólny. Część figury  $C'BC$  daje nam wielkość momentu dla wypadku, kiedy siła jednostki znajduje się po prawej, - druga część zaś  $C'CA$  - kiedy po lewej stronie przekroju.

Dla otrzymania istotnego momentu należy odpowiednie odcinki wykresu mnożyć przez wielkość dotyczących sił.

Pod działaniem jakiegś jednej siły max.  $M$  otrzymuje się oczywiście, wtedy, kiedy ta siła stanie w punkcie  $C$ . Jeżeli sił jest kilka, należy dla uzyskania max.  $M$  tak je ustawić, żeby w punkcie  $C$  znajdowała się ta z nich, z chwilą przejścia której na drugą stronę przekroju wyraz  $\frac{R_1}{a} - \frac{R_2}{b}$  zmienia znak. W powyższym wyrazie  $R_1$  oznacza wypadkową wszystkich ciężarów po lewej, zaś  $R_2$  - wypadkową ciężarów po prawej stronie przekroju. Uzasadnienie przytoczonego twierdzenia posiadamy następujące: jeżeli cały zespół sił przesunie-my o  $\Delta x$  na prawo, to wtedy rzędne wszystkich sił lewostronnych wzrosną o  $\Delta x \operatorname{tg} \alpha_1$ , każda, zaś rzędne sił prawostronnych - zmniejszą się każda o  $\Delta x \operatorname{tg} \alpha_2$ ; w rezultacie więc cały moment wzrośnie o

$$\begin{aligned} \Delta M &= (P_1 + P_2 + \dots) \cdot \Delta x \operatorname{tg} \alpha_1 - (P'_1 + P'_2 + \dots) \cdot \Delta x \operatorname{tg} \alpha_2 = \\ &= \Delta x (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - R_2 \operatorname{tg} \alpha_2). \end{aligned}$$

Ponieważ  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{CC'}{a}$ , zaś  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{CC'}{b}$ , to

$$\Delta M = \Delta x \cdot h \left( \frac{R_1}{a} - \frac{R_2}{b} \right), \text{ oczywiście max. } M \text{ nastąpi,}$$

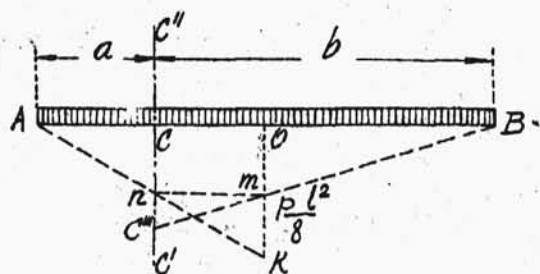
kiedy  $\Delta M$  - czy to w jedną czy w drugą stronę będzie ujemne, a więc pod takim ciężarem, za przesunięciem się którego poza przekrój wyraz  $\frac{R_1}{a} - \frac{R_2}{b}$  zmienia znak.

Zastosowanie linii wpływu do obciążenia ciągłego równomiernego daje następujące wyniki:

Moment - przy obciążeniu jednostkowym  $p$ , równa się  $p \cdot [\text{pow. } \Delta AC'B] = p \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot C'C =$   
 $= p \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{a \cdot b}{2} = \frac{p \cdot a \cdot b}{2} = \frac{p \cdot a \cdot (l-a)}{2}.$

Jest to równanie paraboli o pionowej osi, której rzędna środkowa  $= \frac{p \cdot l^2}{8}$  /przy  $a = \frac{l}{2}$ /, a końcowe  $y_0 = y_l = 0$ .

Chcąc wykreślić geometryczne miejsce  $M_{C'C''}$ , należy wyrysować parabolę, której środkowa rzędna równa się  $\frac{p \cdot l^2}{8}$ , obie końcowe równe są zeru, oba zaś ramiona są wzajemnie symetryczne.



Rys. 53.

Obok podany jest sposób wykreślania takiej paraboli; za punkt wyjścia bierze się punkt środkowy, w stosunku do którego każdy pośredni otrzy-

muje się jako jego funkcja ogólna w postaci

$$\frac{p \cdot a \cdot b}{2} = \frac{p l^2}{8} \cdot \frac{a}{\frac{1}{2}l} \cdot \frac{b}{\frac{1}{2}l}.$$

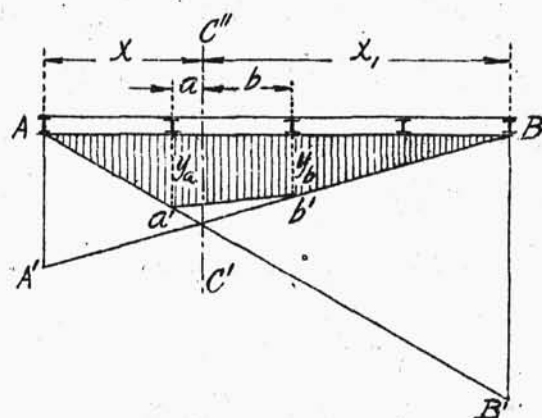
$OK = \frac{p \cdot l^2}{8}$ ; z trójkątów  $AOK$  i  $ACn$  mamy:

$$Cn = \frac{p l^2}{8} \cdot \frac{a}{\frac{1}{2}l}; \text{ przenosimy } Cn \text{ na } OK \text{ jako } Om$$

i prowadzimy  $BmC'''$ ; wtedy

$$C'''C = \frac{Om \cdot b}{\frac{l}{2}} = \frac{p l^2}{8} \cdot \frac{a}{\frac{l}{2}} \cdot \frac{b}{\frac{l}{2}}.$$

Punkt  $C'''$  jest punktem paraboli.



Rys. 54.

Jeżeli obciążenie jest węzłowe, to linja wpływu nie będzie trójkątem, lecz czworobokiem, który otrzymuje się z trójkąta przez obcięcie wierzchołka, jak wskazuje rys. 54.

Wynika to z rozumowania następującego: o ile ciężar znajduje się na lewo lub na prawo od punktów  $a$  i  $b$ , to moment,

który jest funkcją podporowych reakcji, - będzie zgoła niezależny od sposobu obciążenia, tak, jak niezależnymi są same podporowe reakcje /patrz str. 135/. Z chwilą, kiedy dany ciężar wkracza na przęsło  $ab$ , przestaje działać bezpośrednio na belkę, działają natomiast dwa ciężary  $P_a$  i  $P_b$ , które związane są z następującymi równaniami:

$$P_a + P_b = P, \text{ oraz } P_a = \frac{P \cdot b}{a+b} \quad \text{ i } \quad P_b = \frac{P \cdot a}{a+b}.$$

Zważywszy, że gdy ciężar stoi w  $a$  lub  $b$ , to działanie jego jest takie same, jak przy obciążeniu bezpośredniem, zatem rzędne, warunkujące moment, będą takie same, jak na linii wpływu, odpowiadające tantemu obciążeniu, czyli będą:  $y_a$  i  $y_b$ . Jeżeli przez  $y$  - oznaczmy rzędną pośrednią przy obciążeniu węzłowem, to

$$M_{c'c''} = P \cdot y = P_a \cdot y_a + P_b \cdot y_b = \frac{P \cdot b \cdot y_a}{a+b} + \frac{P \cdot a \cdot y_b}{a+b},$$

skąd

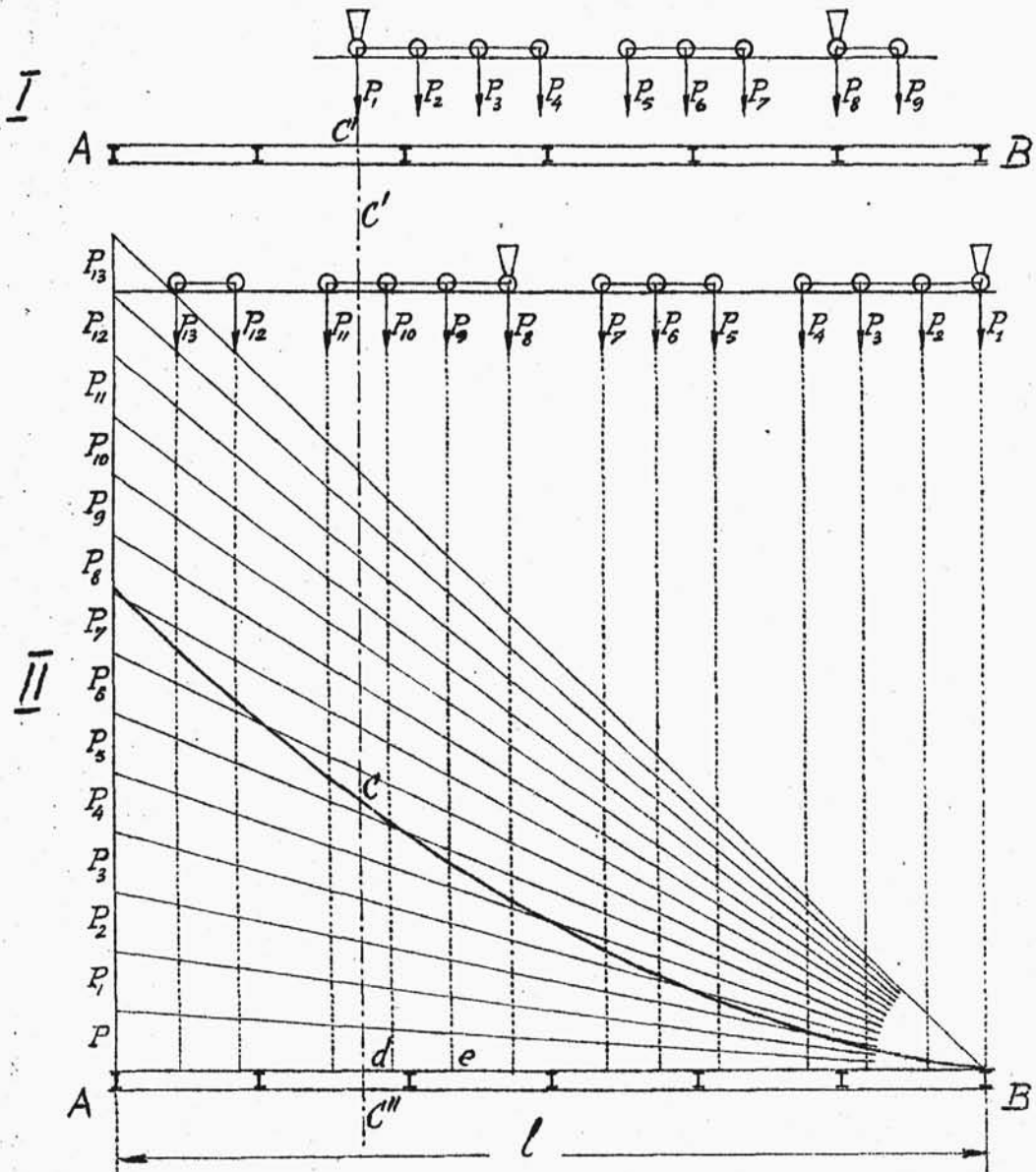
$$y = y_a \cdot \frac{b}{a+b} + y_b \cdot \frac{a}{a+b}.$$

Jest to równanie prostej, skąd widać, że każde  $y$  otrzymamy, połączymy punkty  $a'$  i  $b'$ .

Korzystając z podanych wyżej sposobów, można zaw-



sze dla danej belki i danego przekroju wykreślić linję wpływu i przy jej pomocy znaleźć  $\max. Q$  oraz  $\max. M$  od grupy ciężarów ruchomych. Są inne jeszcze czysto graficzne sposoby, za pomocą których również



Rys. 55.

łatwo można osiągnąć cel powyższy.

A więc - jeżeli chodzi o  $\max. Q$  - to będziemy tak postępować /przy obciążeniu bezpośrednim/:  $\max Q$  w przekroju  $C'C''$  otrzymamy, ustawivszy wszystkie ciężary ruchome po prawej stronie tegoż tak - żeby pierwszy ciężar stał akurat nad przekrojem; oczywiście  $\max. Q = A$  - gdzie  $A$  - jest to lewa podpora - reakcja, tę ostatnią znajdziemy łatwo z równania momentów wszystkich sił względem punktu  $B$  :

$A \cdot l - \sum P \cdot x = 0$  , gdzie pod  $x$  - rozumiemy odległość każdej z sił od  $B$  . Wynika z tego równania, że

$$A = \frac{\sum P \cdot x}{l} . \quad \text{Dla określenia sposobem graficznym}$$

$\sum P \cdot x$  najdogodniej będzie pobudować plan sił nad punktem  $A$  , ustawiając przytem wszystkie ciężary, jakie tylko mogą zmieścić się na prześle w kierunku od  $B$  ku  $A$  w porządku odwrotnym do istotnego, zachowując ich odległości od  $B$  bez zmiany , za biegun obieramy przytem punkt  $B$  . W ten sposób odległość biegunowa  $= l$  . Wykreślamy następnie dla tak ustawionych sił wielobok sznurowy, przeprowadzając pierwszą jego stronę przez punkt  $B$  /na rys. 56 wskazany grubą ciągłą linią/. Z grafostatyki wiadomo, że  $M_{C'C''}$  sił, znajdujących się na prawo od przekroju, - względem tego ostatniego, - otrzymamy,

mnożąc przez biegunową odległość /w tym wypadku  $= l$  / - odcinek prostej, przechodzącej przez przekrój, zawierający się między przedłużonymi kierunkami krańcowych /t.j. pierwszej i ostatniej/ stron odnośnej części wieloboku sznurowego. - Jest nim w danym wypadku odcinek  $cd$  /patrz rys.56/. A zatem  $M_{c'c''} = (cd) \cdot l$ . Nam jednak chodzi nie o  $M_{c'c''}$ , lecz o  $M_B$ , ponieważ jednak uprzednio ustawiliśmy ciężary właśnie w porządku odwrotnym, zachowując bez zmiany ich odległości od  $B$ , zatem wychodzi na to, jak gdybyśmy obrócili całą prawą część rysunku o  $180^\circ$ , tak że  $B$  znalazło się w  $d$  i odwrotnie. W ten sposób moment  $M_{c'c''}$  układu sił II względem  $C'C''$  jest momentem rzeczywistego układu sił I, względem p.  $B$ , o który nam właśnie chodzi. Zatem  $M_{c'c''} = (cd) \cdot l = \sum P \cdot x$ , a w takim razie

$$\max. Q = A_I = \frac{\sum P x}{l} = \frac{(cd) \cdot l}{l} = (cd).$$

Widzimy więc, jak wygodną i prostą jest przytoczona metoda: daje ona odrazu na skonstruowanym w sposób wyżej opisany rysunku wielkość  $\max. Q$  w postaci odcinka  $cd$  /w umówionej skali/ dla każdego dowolnego przekroju.

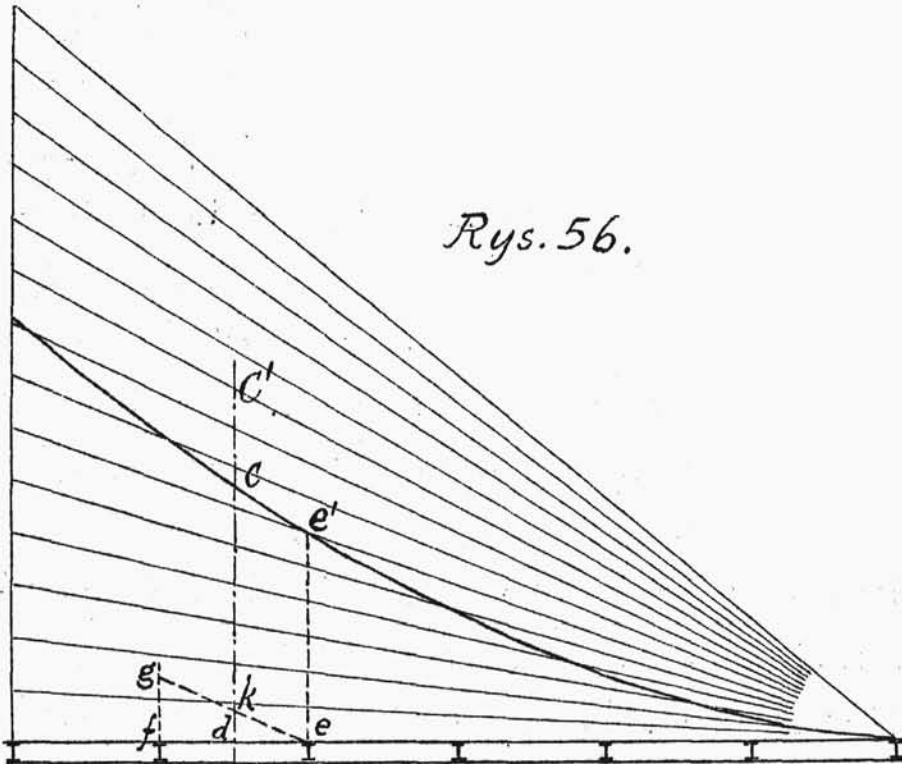
Przy węzłowym obciążeniu  $\max. Q$  dla  $C'C''$ , otrzymujemy, załadowując przedewszystkiem całą

prawą stronę przeszła, aż do węzłowego punktu  $e$ ,  
włącznie, a następnie ewentualnie, przesuwając  
jeden - czasami nawet dwa ciężary - na lewo od  
 $e$ , czyli od prawego węzła danego pola, tak  
jednak, by pozostały one w granicach tegoż pola.  
Dla wyjaśnienia kwestji, czy istotnie należy prze-  
sować te ciężary oraz o ile, przeprowadzimy rozu-  
mowanie następujące: Przypuśćmy, że chodzi o je-  
den ciężar. Zbudujmy nad punktem  $f$  odcinek  $fg$ ,  
przedstawiający w umówionej skali siłę - wielkość  
przesuniętego poza  $e$  ciężaru, - i następnie po-  
łączmy  $e$  z  $g$ ; wtedy na linii  $C'C''$  powstaje  
odcinek  $kd$ , który oznacza wielkość składowej  
naszego ciężaru w punkcie  $f$ , działającej tam  
naskutek obciążenia węzłowego; ponieważ z punktu  
widzenia  $Q$  jest to siła ujemna, zatem teraz  
 $\max. Q$  będzie się wyrażało odcinkiem  $ck$ . -  
Jasne, że o ile nachylenie linii  $eg$  jest mniej-  
sze, od nachylenia boku  $e'c$  wieloboku sznurowe-  
go, to  $ck > e'e$  czyli  $\max. Q$  będzie wtedy  
istotnie miało miejsce pod przesuniętym poza  $e$   
ciężarem.

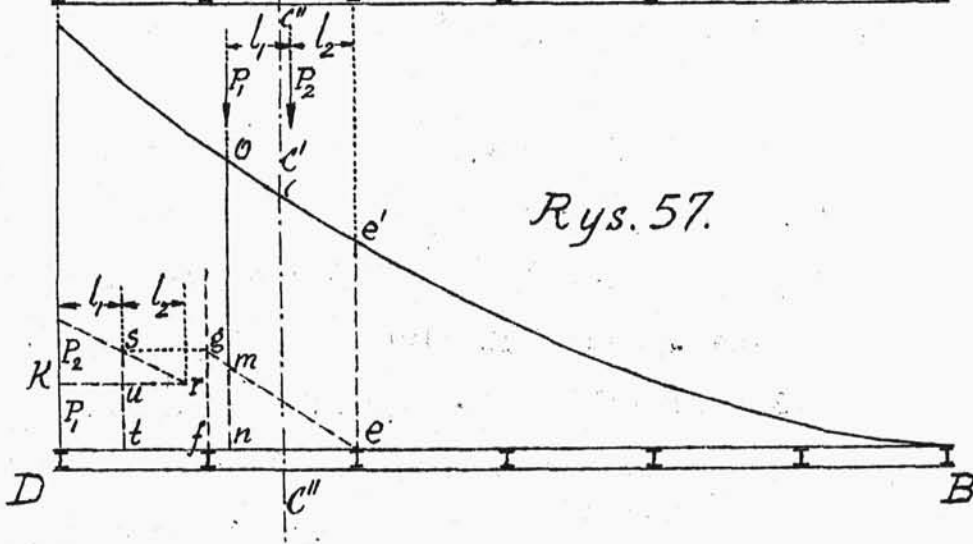
W razie ewentualności dwóch ciężarów, badanie  
tak prowadzić należy: Przypuśćmy, że przesuneliś-

my je tak, iż  $P_2$  stoi w odległości  $l_2$ , zaś  $P_1$  w odległości  $l_1 + l_2$  od  $e'e$ . Teraz zamiast  $P_2$

Rys. 56.



Rys. 57.



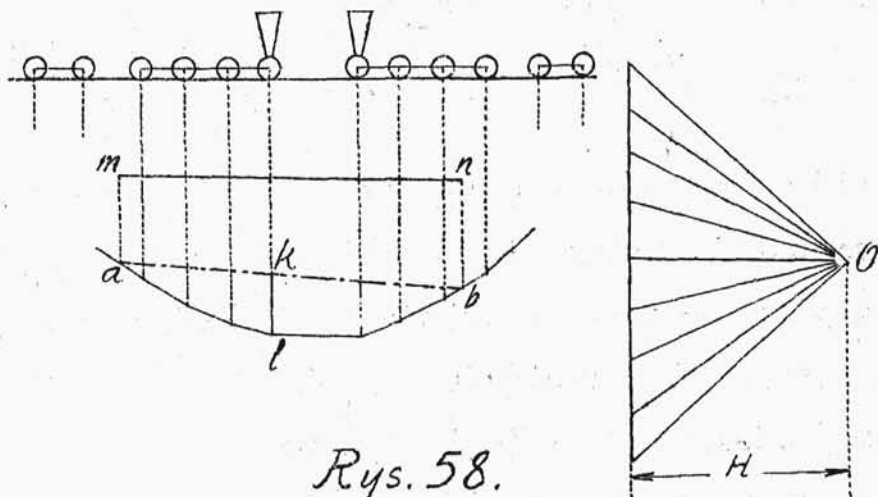
wyobraźmy sobie siłę równoważną jej - z punktu wi-

dzenia oddziaływania na  $f$ , ale działającą tam, gdzie i  $P_1$ . Jeżeli /rys. 57/ od podstawy  $DB$  odłożymy w dowolnem miejscu odcinek  $DE = P_2 + P_1$ , następnie od p.  $K$  na linii poziomej odłożymy odcinek  $Kr$  = długości  $l_1 + l_2$  i następnie połączymy  $r$  z  $E$ , to odcinek  $st$  będzie właśnie wyobrażać sumę  $P_1$  i siły zastępczej zamiast  $P_2$ ; wystarczy teraz przenieść  $st$  na  $fg$  i pobrać figurę taką samą, jak na rysunku poprzednim /rys. 57/, a otrzymamy odcinek  $mn$ , przedstawiający oddziaływanie obu sił na lewy węzeł.

Oczywiście  $mO = \max. Q$ , będzie większe od  $e'e$ , o ile nachylenie  $Oe'$  będzie większe niż nachylenie  $me$ . To musi być wskazówką dla właściwego ustawienia ciężarów, przy którym można uzyskać  $\max. Q$ .

Graficzny sposób określania bezwzględnie największego momentu od grupy ruchomych ciężarów jest następujący: należałoby właściwie przesuwając wspomnianą grupę wprawo lub wlewo po prześle, wyrysowując każdy raz dla danego położenia układu sznurowy wielobok i plan sił, poczem z wieloboku, w sposób wskazany na str. 125, za każdym razem należy określić moment i następnie z tych wszystkich

kolejnych wartości wybrać największą. Dogodniej jest postępować inaczej. Mianowicie, wyrysować sobie miarodajny dla danego wypadku układ sił, ale o takiej ilości ciężarów, by całość była dłuższa niż przęsło, a następnie to ostatnie /w postaci odcinka odpowiedniej długości/, przesuwając tak, by uzyskać  $\max. M$ . Pociąg przytem powinien być tak ustawiony, żeby w środku znajdowały się 2 parowozy, zwrócone ku sobie kominami. Techniczne wykonanie jest następujące:



Rys. 58.

Wniech  $mn$  oznacza przęsło w danem położeniu. Wtedy  $ma$  i  $nb$  będą oznaczać kierunki podporowych reakcji, zatem  $ab$  będzie stanowić stronę

zamykając wieloboku, w pewnym zaś przekroju  $C'C''$  będziemy mieli  $\max. y = kl$ , który to odcinek, pomnożony przez  $H$  da nam  $\max. M$  dla danego położenia układu. Spróbawwszy kilka razy przesunąć linję  $mn$  w jedną i drugą stronę, potrafimy z łatwością wyczuć, gdzie będzie absolutne max.  $y$

-----

Powróćmy teraz do przerwanego na str. 122 układu.

Znając  $\max. M$  i  $\max. Q$ , które określimy za pomocą jednego z wyżej wskazanych sposobów, - możemy - posilkując się równaniami

$$k_g = \frac{\max M}{J} \quad \text{ i } \quad k_s = \frac{\max Q \cdot S}{J \cdot b},$$

ustalić poprzeczne wymiary belki.

Zazwyczaj wymiary te - o ile odpowiadają równaniu pierwszemu - odpowiadają również i drugiemu, jeżeli tylko - oczywiście - grubość /względnie szerokość/ dźwigara nie jest zbyt małą.

Co się tyczy szczegółów konstrukcji opisywanych mostów o dźwigarach najprostszego typu belkowego, to należy mieć na uwadze co następuje:

Odstęp pomiędzy takimi dźwigarami w mostach drogowych zwykle daje się od 0,8 do 1 mtr.; gdyby