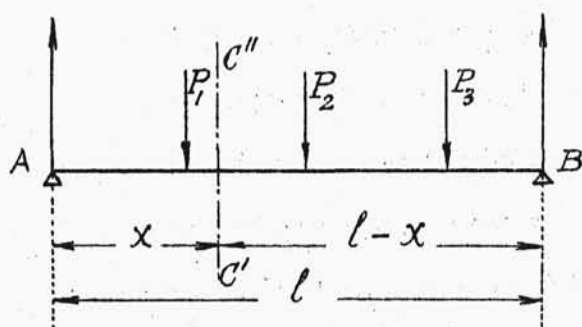


siła poprzeczna, S - statyczny moment półprzekroju względem osi obojętnej; J - moment bezwładności przekroju, δ - szerokość tegoż, k_s - dopuszczalne naprężenie na ścinanie.

Przypomnimy tu nieco szczegółów, dotyczących określania momentów i sił poprzecznych.



Rys. 33.

Dla danego przekroju pionowego $C'C''$ belki AB , swobodnie podpartej, /rys.33/ poprzeczną siłą Q nazywamy wypadkową wszystkich zewnętrznych sił, działających na lewą

stronę belki. Uważamy ją za dodatnią, jeżeli jest skierowaną do góry, - za ujemną zaś - jeżeli do dołu. Czasami dogodniej jest określać ją, rozpatrując zewnętrzne siły, działające nie na lewą, tylko na prawą stronę belki, trzeba tylko wtedy mieć na uwadze, że jeżeli kierunek tej wypadkowej będzie ujemny, - to tamta, - która odpowiada lewej stronie, a o którą nam właściwie chodzi, - będzie dodatnią - i odwrotnie. Oczywiście te dwie wypadkowe są so-

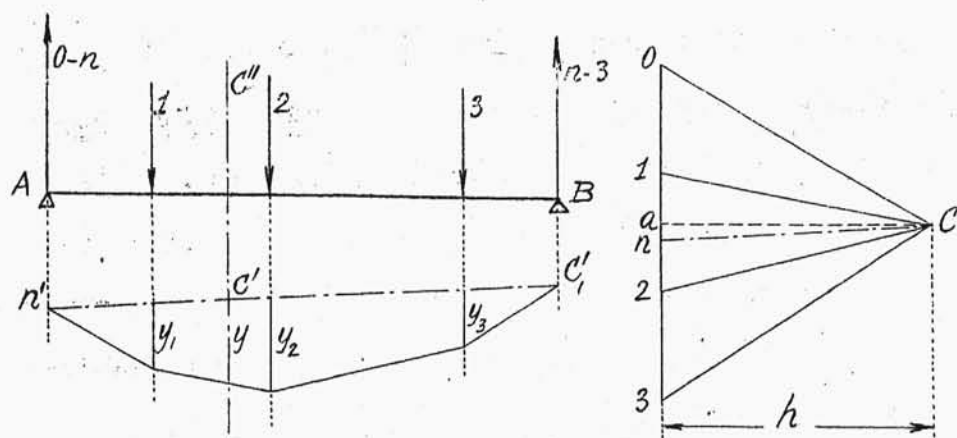
bie zawsze równe i działają w przeciwnych kierunkach; inaczej nie równoważyłyby się, co przecież jest nieodzowną cechą systemu, znajdującego się w stanie spokoju.

Momentem w przekroju $C'C''$ belki AB /inaczej momentem gnącym/ nazywamy moment wszystkich zewnętrznych sił, działających na belkę po lewej stronie przekroju. Uważamy go za dodatni, jeżeli usiłuje obrócić część belki, na którą działa, w kierunku ruchu wskazówki zegara; w przeciwnym razie - nazywamy go ujemnym. Dla belki, swobodnie podpartej, moment gnący jest zawsze dodatnim. Uzasadnić to możemy w następujący prosty sposób: w razie, jeżeli na belkę działają jakieś siły po prawej stronie przekroju, - to jedyną zewnętrzną siłą, czynną po stronie lewej, - będzie reakcja podporowa A , która - oczywiście - działa do góry. Moment więc w przekroju $C'C''$, czyli iloczyn Ax - jest wtedy dodatni. Jeżeli teraz wyobrazimy sobie, że mamy jakieś zewnętrzne siły, działające tylko po lewej stronie przekroju $C'C''$, to wtedy moment, działający w tym przekroju na prawą część belki AB , będzie równać się iloczynowi $B(l-x)$, gdzie B jest to prawa podporowa reakcja, działająca do góry; moment ten

jest względem przekroju $C'C''$ - według poprzednio przyjętej nomenklatury, - ujemnym. Ponieważ zaś cała belka znajduje się w równowadze, przeto w tym samym czasie po lewej stronie tegoż przekroju - musi działać inny moment, równy tamtemu, co do wielkości, ale przeciwny co do kierunku, a więc dodatni. Tym sposobem w obu rozpatrzonych wypadkach, t.j. wtedy, kiedy siły zewnętrzne działają po lewej, jak również wtedy, kiedy działają po prawej stronie przekroju $C'C''$ - moment gnący w tym przekroju - określony tak, jak to zrobiono wyżej - jest dodatni.

Dla zadanego stałego układu sił najlepiej jest określać M i Q graficznie za pomocą wieloboku sznurowego. W zastosowaniu do równomiernego obciążenia, wielobok, oczywiście, zamieni się we wpisaną krzywą.

Należy sobie uprzytomnić niektóre podstawowe właściwości wieloboku sznurowego. Przedewszystkiem więc, jeżeli wielobok, zbudowany na kierunkach danych sił, działających na belkę AB , zamkniemy linią $C'n'$ i przeprowadzimy, następnie, na planie sił linię $Cn \parallel C'n'$, - to odcinki On i $n3$ dadzą nam wtedy wielkości podporowych reakcji.



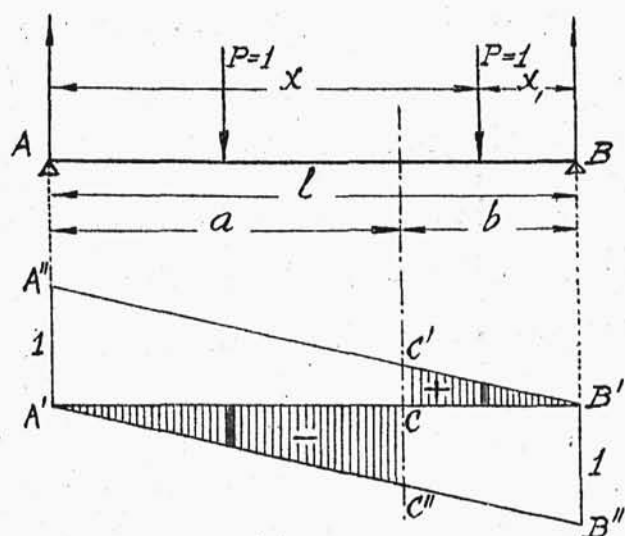
Rys. 34.

Dalej, jak wiadomo, dla każdego danego przekroju $C'C''$ moment równa się iloczynowi rzędnej y przez wysokość planu sił $Ca = h$, czyli $M_{C'C''} = yh$. Powyższa zaś rzędna y jest to, jak widać, część pionowego odcinka, przechodzącego przez dany przekrój, - zawierająca się pomiędzy kierunkami dwu skrajnych stron odnośnej części wieloboku.

Mosty kolejowe, jednak, podlegają działaniu ciężarów ruchomych. W tym wypadku do określania momentów oraz poprzecznych sił bardzo przydatnymi są t.zw. "linje wpływu". Posiłkując się tą metodą, uzmysławiamy za pomocą ad hoc budowanych wykresów, jaki moment - względnie: jaką poprzeczną siłę - wywołuje w danym przekroju ruchomy ciężar, równy jednostce,

zajmujący kolejno różne pozycje na belce. Gdy to mamy, wtedy, oczywiście, - mając daną kombinację ciężarów, - wystarczy pomnożyć poszczególne jednostkowe oddziaływania przez istotne wielkości odnośnych ciężarów i zsumować wyniki, - aby otrzymać żadaną wartość Q , względnie M - przy każdym zadanym ugrupowaniu zewnętrznych sił. Można również z łatwością odnaleźć takie mianowicie ugrupowanie, przy którym dla zadanego przekroju otrzymuje się max. Q - względnie max. M . Można wreszcie - drogą prób, posilkując się przy tem pewnemi wskazówkami - odszukać następnie przekrój, w którym ma miejsce max.max. Q - jak również max.max. M .

Linja wpływu dla Q w danym przekroju $C'C''$ belki buduje się w następujący sposób: przypuśćmy, że ciężar $P=1$ znajduje się po prawej stronie przekroju - w odległości x od A i x_1 od B . Po lewej stronie działa wtedy jedna tylko zewnętrzna siła, mianowicie: reakcja podporowa A , której wielkość, zależna od miejsca ciężaru, wyraża się wzorem $\frac{x_1}{l}$, graficznie zaś da się przedstawić za pomocą linii $A''B'$, przyczem $A'A''=1$. W rozważanym wypadku, to znaczy dla wszelkiego przekroju, położonego na lewo od siły P reakcja podporowa



Rys. 35.

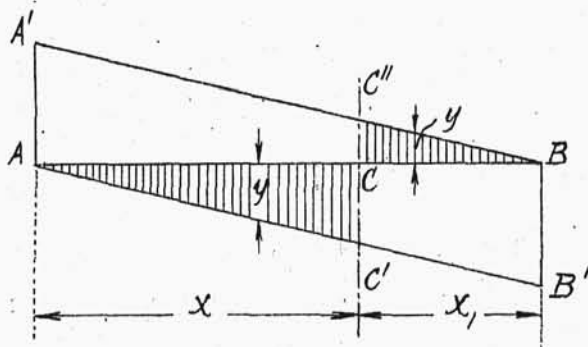
równa się poprzecznej sile; wielkość więc tej ostatniej dla różnych przekrojów $C'C''$ będzie się wyrażała odcinkami zakreskowanej części wykresu $B'CC'$, odpowiadającymi każdemu danemu położeniu siły $P=1$ po prawej stronie przekroju $C'C''$. Jeżeli teraz

siła przesunie się choćby odrobinę na lewą stronę przekroju, to sytuacja nagle zmienia się. Mianowicie, znajdzie się tam wtedy - oprócz reakcji A , jeszcze siła $P=1$, wskutek czego $Q_{C'C''} = A - P$. Ponieważ $A + B = P$, to $A - P = -B$.

Inaczej mówiąc w tym drugim wypadku Q = podporowej reakcji B , wziętej z odwrotnym znakiem. Wielkość tej ostatniej, - w zależności od różnych pozycji P - da się przedstawić takim samym, jak dla A - wykresem, skierowanym tylko od A ku B ; jeżeli w dodatku wykres odwrócimy ku dołowi /ponie-

waż $Q = -B$, - to wtedy część jego od A do $C'C''$ będzie właśnie wykresem dla Q na wypadek znajdowania się ciężaru P po lewej stronie $C'C''$.

Sposób posilkowania się otrzymanym w ten sposób wykresem dla danej grupy sił został podany wyżej /na str.127/. Specjalnie parę słów należy się wypadkowi, kiedy mamy do czynienia z obciążeniem równomiernym.



Rys. 36.

Należy sobie uprzytomnić wogóle, że można je traktować jako nieskończenie wielki szereg sił, działających każda na długości dx . Jeżeli jed-

nostkowe obciążenie stanowi p klgr. /na m.b., to wspomniane siły będą równe każda $p dx$. Stosując linje wpływu, przychodzimy do wniosku, że sumaryczne oddziaływanie prawostronnego obciążenia, dającego Q' - określi się jako

$$\int_0^{x_1} p dx \cdot y,$$

$$\text{albo } \int_0^{x_1} p \cdot (y dx) = p \cdot [\text{pow. } \Delta CC''B] = \\ = p \cdot \frac{x_1}{l} \cdot \frac{x_1}{2} = p \cdot \frac{x_1^2}{2l}.$$

Wpływ lewostronnego obciążenia, wywołującego Q'' , wyraża się całką

$$\int_0^x p \cdot dx \cdot y = \int_0^x p \cdot (y dx) = \\ = p \cdot [\text{pow. } \Delta AC'C] = p \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{l} = p \frac{x^2}{2l}.$$

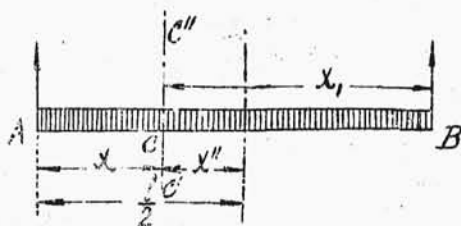
Jeżeli równomierne obciążenie jest ruchome i wynosi $K \text{ kg/m.b.}$, to w pierwszym wypadku, - jak widać - przy całkowitem załadowaniu prawej strony otrzymujemy $\text{max. } Q = \frac{Kx_1^2}{2l}$. W drugim zaś wypadku, przy obciążeniu lewej strony, mamy:

$$\text{min. } Q = - \frac{Kx^2}{2l}.$$

Jeżeli zaś obciążenie równomierne jest stałe, czyli istnieje jednocześnie po obu stronach przekroju $C'C''$, to rezultat, czyli

$$Q_{c'c''} = Q' - Q'' = p \cdot [\text{pow. } \Delta CC''B - \text{pow. } \Delta CC'A].$$

Analitycznie zaś przedstawi się to w formie

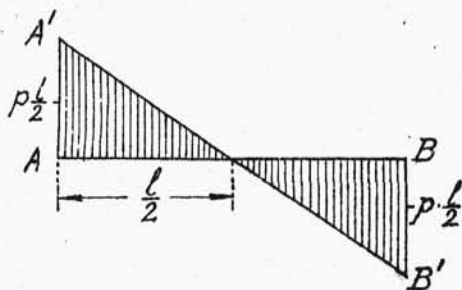


Rys. 37.

$$\begin{aligned} Q &= p \cdot \frac{x_1^2 - x^2}{2l} = p \frac{(x_1 + x)(x_1 - x)}{2l} = \\ &= \frac{p \cdot l \cdot (x_1 - x)}{2l} = \frac{p \cdot (x_1 - x)}{2} = \\ &= \frac{p(l - x - x)}{2} = p\left(\frac{l}{2} - x\right) \end{aligned}$$

Ostateczny ten wynik możemy, zamiast w tej ostatniej zwykle używanej formie, - przedstawić jeszcze w innej, mianowicie: $Q = p x''$, gdzie x'' - oznacza odległość rozpatrywanego przekroju od środka belki. Wzór ten wskazuje nam jasno, że Q jest liniową funkcją od x'' i że przy $x'' = 0$, poprzeczna siła $Q_{\frac{l}{2}} = 0$, zaś przy $x'' = \frac{l}{2}$ $\pm Q = p \frac{l}{2}$.

Jeżeli chcemy przedstawić graficznie zależność wielkości Q od miejsca na przęśle przy równomiernem stałym obciążeniu, to wyrysujemy prostą



Rys. 38.

Równ. - stałe

$A'B'$, przecinającą oś belki AB w środku. Przy równomiernem ruchomym obciążeniu - jak już wiadomo $\max. Q = \frac{Kx_1^2}{2l}$ i $\min. Q = -\frac{Kx_1^2}{2l}$. Oba te wzory są równaniami dwóch jednako-

wych parabol, stycznych w wierzchołkach swoich do linii AB - jedna w A , druga w B /jedna przy $x_1=0$, druga przy $x=\ell$ /, oraz mających w drugich swoich końcach rzędne $+\frac{1}{2}K\ell^2$, względnie $-\frac{1}{2}K\ell^2$, /przy $x_1=\ell$, względnie $x=0$ /. Parabole te mogą być wykreślone w bardzo prosty sposób, mianowicie modyfikując zasadnicze równanie w sposób taki $\frac{Kx_1^2}{2\ell} = \frac{K\ell}{2} \cdot \frac{x_1}{\ell} \cdot \frac{x_1}{\ell}$. Jeżeli bowiem

$$AA' = \frac{K\ell}{2}, \text{ to oczywiście } CC'' = \frac{K\ell}{2} \cdot \frac{x_1}{\ell},$$

odłożywszy następnie na AA' odcinek $AA''=CC''$

i połączywszy A''

z B , otrzymamy

na CC'' punkt C''' ,

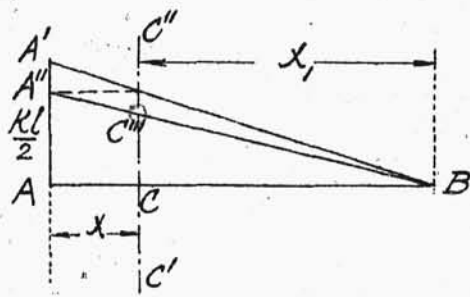
który będzie punk-

tem paraboli, o któ-

rej nam chodzi, ponie-

$$\text{waż } CC''' = AA'' \cdot \frac{x_1}{\ell} =$$

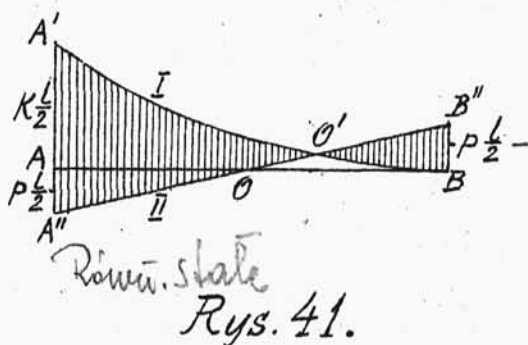
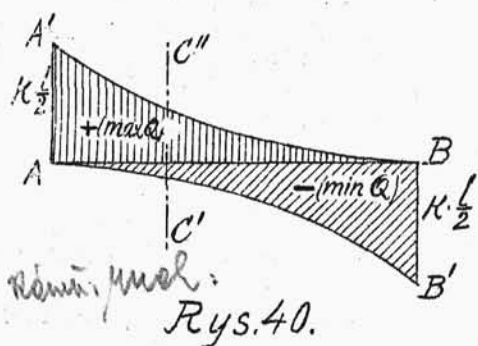
$$= K \cdot \frac{x_1}{\ell} \cdot \frac{x_1}{\ell}.$$



Rys.39.

W ten sposób zbudowana parabola /rys.40/, przedstawia wykres, dający wielkość max. Q /względnie min. Q / dla różnych miejsc przesła.

Jeżeli teraz mamy do czynienia z jednoczesnem działaniem stałego i ruchomego równomiernego obciążenia, to chcąc w tym wypadku dla określania max. Q mieć taki wykres, jak te, które dopiero co zostały podane, - należy na jednej i tej samej osi AB : wyrysować rzędnymi do góry znaną już parabolę /I/, zdołu zaś przeprowadzić linię /II/, dającą Q dla różnych punktów belki przy stałym równomiernym obciążeniu /rys.41/.

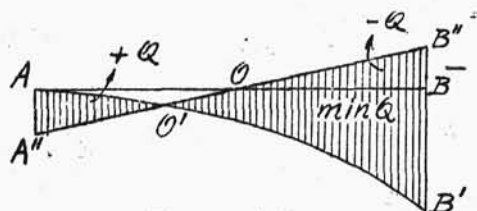


Następnie wypadnie zsumować geometrycznie odpowiadające sobie rzędne, poczem otrzymamy ostateczny wykres; dający max. Q - przy uwzględnieniu obciążenia równomiernego, tak stałego jak i ruchomego.

W punkcie O' dodatnia rzędna wykresu I anuluje się zupełnie z ujemną rzędną wykresu II, dalej zaś - ujemne rzędne tego ostatniego wykresu już przewa-

żają, mamy prze to max. Q - ujemne /wyrażające się wykresem $O'B''B'$, zaś od A do punktu O' jedno i drugie rzędne, t.j. górne i dolne wzajemnie się sumują, dając wykres $A'A''O'$.

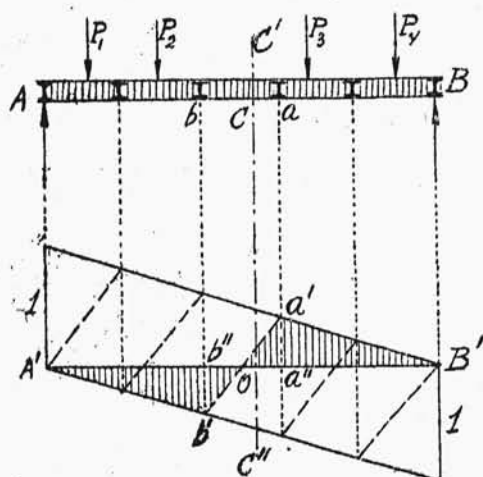
Oczywiście - analogiczny wykres dla min. Q otrzymamy, postępując podobnie - z uwzględnieniem odwrotnego kierunku rzędnych - jak to wskazuje rys.42.



Rys.42.

Należy teraz z kolei zaznaczyć, że wszystkie powyższe wywody zrobione zostały, mając na względzie t.zw. "bezpośrednie obciążenie". Istnieje bowiem inny jeszcze sposób przenoszenia działania sił na dźwigary, - mianowicie przez t.zw. "obciążenie węzłowe". Ma to miejsce, mianowicie, przy zastosowaniu jazdy dołem, t.zn. kiedy jezdnia spoczywa na poprzecznicach i podłużnicach. Koniecznym jest w tym wypadku wprowadzenie pewnych zmian w podanych wyżej wykresach.

Dopóki ciężar działa poza węzłami, między którymi znajduje się rozważany przekrój, to, ponieważ taki czy inny sposób przenoszenia obciążenia



Rys. 43.

na dźwigary nie wpływa, jak wiadomo, na wielkość podporowych reakcyj, - warunkowaną zasadniczym równaniem

$$A + B = \Sigma P$$

łatwo się o tem przekonać, obliczywszy reakcje te od siły, np. P_2 , biorąc ją raz tak, jak ona stoi bezpośrednio, zaś drugi raz, - rozłożywszy ją uprzednio na składowe w punktach b i c i następnie obliczając i sumując potem reakcje od tych składowych; więc i poprzeczna siła będzie wypadać tak samo, jak przy bezpośrednim obciążeniu i będzie mierzyć się zapomocą tej samej linii wpływu, co i w poprzednim wypadku. Ale gdy ciężar przejdzie już na przęsło ab , to wtedy wytwarza się sytuacja odmienna. - Mianowicie, ponieważ siła bezpośrednio na belkę nie działa, lecz tylko - za pośrednictwem podłużnej beleczki - zatem w każdym punkcie przęsła rozkłada

się w sposób wiadomy na węzły a i b , to w miarę przesuwania się tej siły od a do b , stopniowo zmniejsza się nacisk na a i również stopniowo zwiększa się nacisk na b . Tak że, gdy siła dochodzi do $C'C''$ - to już jej wpływ na reakcję podporową A nie jest ten, jakim byłby przy obciążeniu bezpośrednim, ponieważ po stronie prawej mamy nie cały ciężar $P=1$, lecz już tylko część jego - w postaci nacisku na a - natomiast jeszcze przed przejściem P przez $C'C''$ już istnieje - po lewej stronie - siła ujemna - mianowicie nacisk na b . Przejście zatem od $+Q$ do $-Q$ odbywa się teraz stopniowo według równania linii prostej /prawa dźwigni/, przyczem w pewnym punkcie $Q=0$. Proces ten uzmysłowi nam prosta linia, łącząca a' z b' . Przecięcie jej z AB w O jest punktem zerowym dla Q . W ten sposób cała linia wpływu przedstawia się obecnie jako figura $A'b'a'B'$.

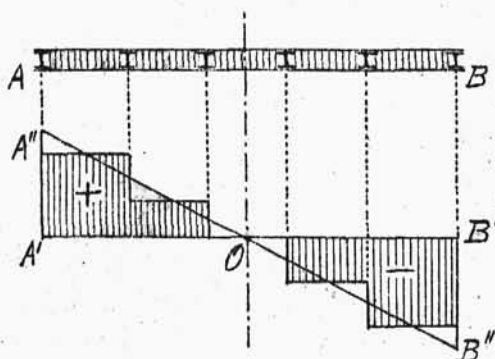
Stosując tę linję wpływu do obciążenia równomiernego węzłowego, zauważyć musimy, że o ile przy obciążeniu bezpośrednim/patrz rys.36/ dla każdego danego przekroju linja $C'C''$ jest tą granicą, która oddziela prawostronne obciążenie, dające $+Q'$ od lewostronnego, dającego $-Q''$, tak że wynik

ostateczny $Q = +Q' - Q''$ jest coraz to inny dla każdego punktu C , - to przy obciążeniu węzłowym,

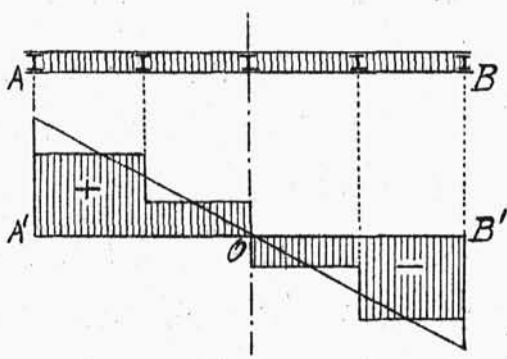
w granicach między każdymi dwoma węzłami: -

- wielkość $Q_{cc''}$ pozostaje dla każdego przęsła jednakową i niezależną od położenia $C'C''$, - równa się bowiem zawsze różnicy pomiędzy $p \cdot [\Delta Oa'B']$ i $p \cdot [\Delta Ob'A']$.

Jeżeli więc chcemy teraz zbudować wykres, któryby graficznie wyrażał wielkość Q dla każdego punktu belki, to będzie to teraz nie pochyła prosta $A'B'$, przecinająca w środku prostą AB /patrz rys.38/, lecz linja schodkowa, jak na rys.44, albo na rys.45.

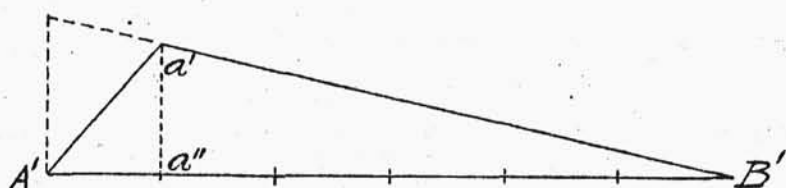


Rys.44.



Rys.45.

Zauważmy, jak wypadają poszczególne jej części w stosunku do dawnego wykresu. Przedewszystkiem - nad podporą A : Otóż według wykresu linji wpływu /rys.46/



Rys. 46.

$$Q = p[\Delta A'a'B'] = p \cdot \frac{l}{2} \cdot a'a'' = p \cdot \frac{l}{2} \cdot a'a'' = \\ = p \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l-d}{l} = p \frac{l}{2} - p \frac{d}{2}.$$

Wskazuje to, że nad punktem A' - rzędna, oznaczająca Q , mniejsza jest od dawnej $p \frac{l}{2}$, mianowicie o $p \frac{d}{2}$ t.j. o połowę obciążenia małego przęsła, równa się ona więc dawnej Q , ale jak gdyby wziętej w środku tego przęsła. Ponieważ jest ona w dodatku stałą dla całego przęsła, to graficznie wyrazić ją musimy prostą $A''a'''$, przeprowadzoną przez środkowy punkt C .

Dla całego następnego przęsła

$$Q = p[\Delta OmB' - \Delta A'a'O] = p[\frac{OB'}{2} \cdot mn - \frac{A'O}{2} \cdot aa''].$$

Oznaczmy $a''O = x$, zaś $On = d - x$; wiadomo, że $aa'' = \frac{d}{l}$ jeżeli $A'A'' = B'B'' = 1$, zaś

$m = \frac{l-2d}{l}$. W takim razie mamy proporcje:

$$\frac{d-x}{x} = \frac{l-2d}{l} \cdot \frac{d}{l} \quad \text{skąd: } x = \frac{d^2}{l-d} ;$$

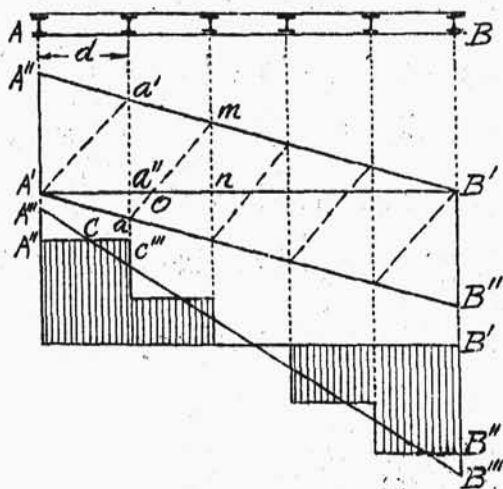
$$\Delta A'aO = (d+x) \cdot \frac{d}{2l} = \left(d + \frac{d^2}{l-d}\right) \cdot \frac{d}{2l} = \frac{d^2}{2(l-d)} ;$$

$$\Delta OmB' = (l-d-x) \cdot \frac{l-2d}{2l} = \left(l-d - \frac{d^2}{l-d}\right) \cdot \frac{l-2d}{2l} = \frac{(l-2d)^2}{2(l-d)} ;$$

$$\Delta OmB' - \Delta A'aO = \frac{(l-2d)^2 - d^2}{2(l-d)} = \frac{(l-3d)(l-d)}{2(l-d)} = \frac{l-3d}{2} ;$$

a więc

$$Q = p \frac{l-3d}{2} = \frac{1}{2} pl - 1\frac{1}{2} pd .$$



Rys.47.

Nie prowadząc już dalej tego obliczunku, - widzimy, - według jakiego prawa zmieniają się rzędne schodkowej linii, będącej wykresem wartości Q dla różnych punktów belki, obciążonej równomiernie węzłowo. - Oczywiście, punkty przecięcia poziomych

działek schodkowej linii z pochyłą $A''B'''$ wypadają zawsze pośrodku tych działek.