

Jeżeli przez F' oznaczymy przekrój kanału, wówczas wydatek

$$Q = v \cdot F' \dots (c)$$

Z określenia $J = \frac{h}{L}$, mamy: $h = J \cdot L$,

albo $h = \rho \cdot \frac{v^2}{R} \cdot L$; jeśli zauważymy, że

$v = \frac{Q}{F'}$, otrzymamy $h = \rho \cdot \frac{Q^2 \cdot L}{F'^2 R}$, albo

$$h = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{Q^2 \cdot L}{F'^2 R} \dots (d)$$

wreszcie

ponieważ $R = \frac{F'}{O}$, gdzie O jest obwodem zwilżonym

$$h = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{Q^2 \cdot L \cdot O}{F'^3} \dots (e)$$

247. NAJKORZYSTNIEJSZE PRZEKROJE KANAŁÓW.

Rozpatrzmy jakikolwiek kanał pewnego typu o zadanim polu przekroju F' . Wydatek wody, dostarczanej przez ten kanał, obliczymy z wzoru:

$$Q = v \cdot F' \quad \text{Ponieważ} \quad v = k \sqrt{J \cdot R}$$

zatem $Q = F' \cdot k \cdot \sqrt{J \cdot R}$, albo $Q = F' \cdot k \cdot \sqrt{J \cdot \frac{F'}{O}}$

Niech będzie dany spadek jednostkowy J , wtedy n a j w i ę k s z y wydatek Q otrzymany przy tak skonstruowanym przekroju, dla którego O , jak to widać z ostatniego równania, będzie najmniejsze.

Zbadajmy pod tym względem kilka typowych kanałów

246. 1/ PRZEKRÓJ PROSTOKĄTNY. Dane jest pol przekroju prostokątnego F ; znaleźć, jaka winna być szerokość b tego kanału w stosunku do głębokości h , aby Q było maximum.



rys. 164.

Przekrój $F = b \cdot h$; obwód zwilżony $O = b + 2h$, więc

$$O = \frac{F}{h} + 2h \quad . \text{ Naj-}$$

korzystniejszy przekrój będzie taki, dla którego O jest minimum. Warunek ten wyraża się, że $\frac{dO}{dh} = 0$.

Biorąc pochodną od O względem h , znajdziemy:

$$\frac{dO}{dh} = -\frac{F}{h^2} + 2 = 0 ; \quad \text{stad}$$

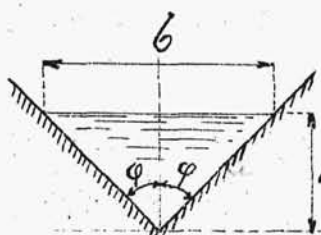
$$\frac{F}{h^2} = 2 \quad , \quad \text{albo} \quad F = 2h^2 \quad . \quad \text{Ponieważ}$$

$$F = bh \quad , \quad \text{zatem} \quad bh = 2h^2 \quad \text{albo} \quad b = 2h \quad .$$

Mamy więc, że przekrój prostokątny będzie najkorzystniejszy wtedy, kiedy szerokość jest dwa razy większa niż głębokość.

249. 2/ PRZEKRÓJ TRÓJKĄTNY. Dane jest pole przekroju F' . Znaleźć, jaki kąt tworzą ściany kanału przy dolnej krawędzi, aby przy danym spadku J

można było otrzymać maximum wydatku?



Pole $F' = \frac{bh}{2}$; szerokość

$b = 2h \operatorname{ctg} \varphi$, zatem

$F' = h^2 \operatorname{ctg} \varphi$, czyli

$h = \sqrt{F'} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi}$.

rys. 165

Następnie

$$O = 2 \frac{h}{\sin \varphi} = 2 \sqrt{F'} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \quad \text{albo}$$

$$O = 2 \sqrt{F'} \cdot \sqrt{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi}} = 2 \sqrt{F'} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}}$$

Najkorzystniejszy kształt trójkąta będzie wtedy, kiedy obwód zwilżony O będzie minimum.

Ponieważ

$$O = 2 \sqrt{F'} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}}, \text{ widzimy że } O$$

będzie minim., kiedy mianownik pod znakiem pierwiastka będzie maximum. Szukamy więc kąta φ z warunku:

$$\frac{d(\sin \varphi \cdot \cos \varphi)}{d\varphi} = 0 ; \text{ po wzięciu pochodnej}$$

otrzymamy: $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0$, albo $1 - \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0$;

stad $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$ i $\sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Stąd mamy, że $\varphi = 45^\circ$.

Zatem najkorzystniejszy kształt kanału trójkątnego będzie wtedy, kiedy kąt przy wierzchołku jest kątem prostym.

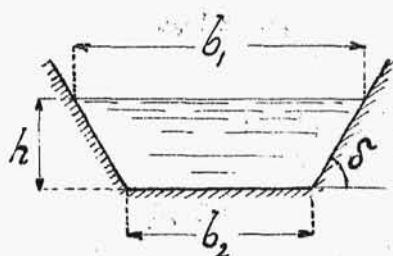
$$/ 2\varphi = 90^\circ /.$$

Jednocześnie znajdujemy, że szerokość

$$b = 2h \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 2h = 2\sqrt{F'} \quad \text{oraz głębokość}$$

$$h = \sqrt{F'} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{F'}$$

250. 3/ PRZEKRÓJ TRAPEZOWY.



rys.166.

Dane jest pole przekroju F' i kąt δ , utworzony przez ścianę kanału z poziomem.

Znaleźć, jakie należy obrać b_1 i b_2 w stosunku do

h , aby Q było maximum.

Jak z poprzedniego wiemy, max. Q będzie dla takiego przekroju, dla którego obwód zwilżony O będzie minimum.

Znajdźmy zatem O w zależności od F' i h .
Z rysunku mamy: $O = b_2 + 2 \frac{h}{\sin \delta}$ oraz

$$b_2 = b_1 - 2 \frac{h}{\tan \delta}.$$

Ponieważ $F' = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$, zatem

$$F' = \frac{1}{2}(b_1 - 2 \frac{h}{\tan \delta} + b_1) \cdot h, \text{ albo } F' = (b_1 - \frac{h}{\tan \delta}) \cdot h$$

stąd
$$b_1 = \frac{F'}{h} + \frac{h}{\tan \delta} \dots \dots (a)$$

Wobec tego
$$O = \frac{F'}{h} - \frac{h}{\tan \delta} + 2 \frac{h}{\sin \delta}.$$

Mamy obrać takie h , przy którym O będzie minimum; otrzymamy to z warunku

$$\frac{dO}{dh} = 0, \text{ a więc}$$

$$-\frac{F'}{h^2} - \frac{1}{\tan \delta} + \frac{2}{\sin \delta} = 0;$$

stąd

$$\frac{F'}{h^2} = \frac{2}{\sin \delta} - \frac{1}{\tan \delta}$$

albo
$$\frac{F'}{h^2} = \frac{2 - \cos \delta}{\sin \delta} \dots \dots (b)$$

Z równania (a) mamy :

$$\frac{F'}{n} = b_1 - \frac{h}{\operatorname{tg} \delta}, \quad \text{albo} \quad \frac{F'}{h^2} = \frac{b_1}{h} - \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}$$

Porównywując ten czynnik z (b) , otrzymamy:

$$\frac{b_1}{h} - \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{2 - \cos \delta}{\sin \delta}$$

Po zniesieniu mianowników mamy:

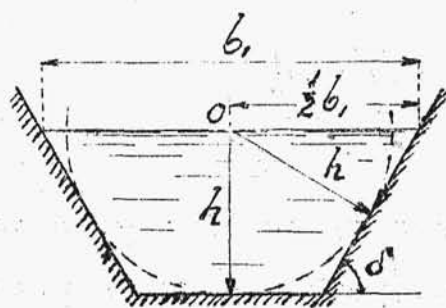
$$b_1 \cdot \sin \delta - h \cos \delta = 2h - h \cos \delta, \quad \text{albo:}$$

$$b_1 \cdot \sin \delta = 2h$$

, ostatecznie

$$h = \frac{b_1}{2} \cdot \sin \delta \dots (c)$$

Z ostatniego warunku dostrzegamy, że trapez powinien być tak wykreślony, aby w niego można było wpisać okrąg koła, którego środek jest na poziomie



rys. 167

zwierciadła wody w kanale.

251. Ostatni rezultat (C) jest wynikiem równania

(6) . Skorzystajmy z równania (6) i wyznaczmy wartość O w funkcji F' i kąta δ .

Jak wiemy z poprzedniego

$$O = \frac{F'}{h} - \frac{h}{\operatorname{tg} \delta} + 2 \frac{h}{\sin \delta}.$$

Weźmy za nawias h , otrzymamy

$$O = h \left[\frac{F'}{h^2} - \frac{\cos \delta}{\sin \delta} + \frac{2}{\sin \delta} \right].$$

Z równania (6) mamy $\frac{F'}{h^2} = \frac{2 - \cos \delta}{\sin \delta}$, a stąd

$$h = \sqrt{\frac{F' \sin \delta}{2 - \cos \delta}}; \quad \text{zatem}$$

$$O = \sqrt{F'} \cdot \sqrt{\frac{\sin \delta}{2 - \cos \delta}} \left(\frac{2 - \cos \delta}{\sin \delta} - \frac{\cos \delta}{\sin \delta} + \frac{2}{\sin \delta} \right);$$

a po redukcji:

$$O = 2\sqrt{F'} \cdot \sqrt{\frac{2 - \cos \delta}{\sin \delta}}.$$

Mając wyznaczoną wartość obwodu zwilżonego w zależności od F' i δ , możemy postawić sobie pytanie, jaki należałoby obracać kąt δ , gdyby wybór tego kąta od nas zależał, aby Q było maximum.

Wiemy już, że to będzie wtedy, kiedy O będzie minimum, a więc kiedy $\frac{dO}{d\delta} = 0$,

Zatem:

$$\frac{d}{d\delta} \left[\frac{2 - \cos \delta^2}{\sin \delta} \right] = 0 .$$

Bierzemy pochodną i przyrównujemy ją do zera:

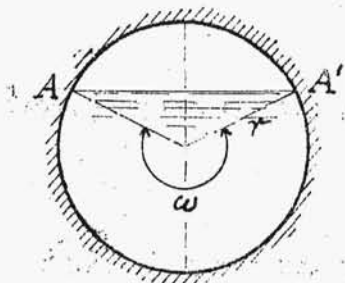
$$\frac{\sin \delta^2 \cdot \sin \delta - (2 - \cos \delta^2) \cdot \cos \delta}{\sin^2 \delta} = 0 , \text{ albo}$$

$$\frac{1 - 2 \cos \delta^2}{\sin^2 \delta} = 0$$

Ponieważ $\sin^2 \delta$ nie jest ∞ , więc $1 - 2 \cos \delta^2 = 0$;
stad $\cos \delta^2 = \frac{1}{2}$; zatem $\delta^2 = 60^\circ$.

Wnioskujemy więc: najkorzystniejszy przekrój trapezowy będzie taki, który jest utworzony z połowy sześcioboku foremnego, którego środek znajduje się na swobodnej powierzchni.

252. 4/ PRZEKRÓJ KOŁOWY : Niech będzie przekrój kołowy o promieniu r . Zwierciadło wody niech będzie AA' . Położenie tego poziomu



rys. 168.

możemy określić przy pomocy kąta środkowego ω . Znaleźć przy jakim kącie ω będzie największa prędkość przepływu w kanale, jeśli założymy stały spadek J ?

Wiemy, że prędkość $v = k\sqrt{I.R}$. Aby sprawy nie wikłać, przyjmijmy, że k jest stałe.

Wówczas prędkość v zależy od R i max. v będzie przy max. R . Znajdźmy przedewszystkiem R .

$$R = \frac{F'}{O}; \quad F' = \frac{\omega \cdot r^2}{2} + 2 \cdot \frac{r^2}{2} \cos(180 - \frac{\omega}{2}) \cdot \sin(180 - \frac{\omega}{2})$$

albo

$$F' = \frac{\omega \cdot r^2}{2} + r^2 \sin \frac{\omega}{2} (-\cos \frac{\omega}{2}) = \frac{\omega r^2}{2} - \frac{r^2 \sin \omega}{2} = \frac{r^2}{2} (\omega - \sin \omega).$$

Następnie mamy: $O = r \cdot \omega$; zatem

$$R = \frac{r^2 (\omega - \sin \omega)}{2 \cdot r \cdot \omega}, \quad \text{albo} \quad R = \frac{r}{2} (1 - \frac{\sin \omega}{\omega}).$$

R będzie maximum dla takiego ω , kiedy

$$\frac{dR}{d\omega} = 0. \quad \text{Pochodna}$$

$$\frac{dR}{d\omega} = \frac{d(1 - \frac{\sin \omega}{\omega})}{d\omega} = - \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2}, \quad \text{zatem:}$$

$\frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2} = 0$. Ponieważ ω nie może być ∞ , więc $\omega \cos \omega - \sin \omega = 0$, albo

$$\omega = \tan \omega.$$

Rozwiązując to równanie względem ω otrzymujemy:

$$\omega = 257^\circ 30'$$

Przy takim więc kącie otrzymamy maximum prędkości

253 . Badając przepływ wody przez przekrój kołowy następcza się pytanie: przy jakim napełnieniu kanału / inaczey przy jakim kącie ω / będzie maximum wydatku?

Wiemy, że $Q = v \cdot F$, inaczey : $Q = k \cdot \sqrt{RJ} \cdot F$.

Penieważ przy zwiększaniu się kąta ω , F będzie rosło, prędkość zaś v przy powiększaniu się kąta ω ponad $257^\circ 30'$ będzie maleć, więc max.

Q nie znajdzie jednocześnie z max. v .

Znajdźmy zatem takie ω , aby Q było maximum.

$$Q = F \cdot v = \frac{r^2}{2} (\omega - \sin \omega) k \cdot \sqrt{J \frac{\omega - \sin \omega}{\omega} \cdot \frac{r}{2}}$$

albo inaczey

$$Q = \frac{r^2}{2} k \cdot \sqrt{J \frac{r}{2}} \sqrt{\frac{(\omega - \sin \omega)^3}{\omega}}$$

Widzimy zatem, że Q będzie max., kiedy wielkość znajdująca się pod drugim pierwiastkiem będzie maximum; kiedy zatem

$$\frac{d \left[\frac{(\omega - \sin \omega)^3}{\omega} \right]}{d\omega} = 0.$$

Szukana pochodna jest:

$$\frac{3(\omega - \sin \omega)^2 \cdot (1 - \cos \omega) \omega - (\omega - \sin \omega)^3 \cdot 1}{\omega^2}$$

Pochodna ta ma być zerem przy szukanej wartości kąta ω . Ponieważ ω nieskończoną wielkością nie jest, zatem licznik musi być $= 0$. Więc:

$$3(\omega - \sin \omega)^2 (1 - \cos \omega) \omega - (\omega - \sin \omega)^3 = 0.$$

Po skróceniu przez $(\omega - \sin \omega)^2$, gdyż $(\omega - \sin \omega) \neq 0$ odpowiada min. Q otrzymamy:

$$3\omega - 3\omega \cos \omega - \omega + \sin \omega = 0 \text{ albo}$$

$$2\omega - 3\omega \cos \omega + \sin \omega = 0.$$

Wartość ω , czyniąca zadość temu równaniu, jest:

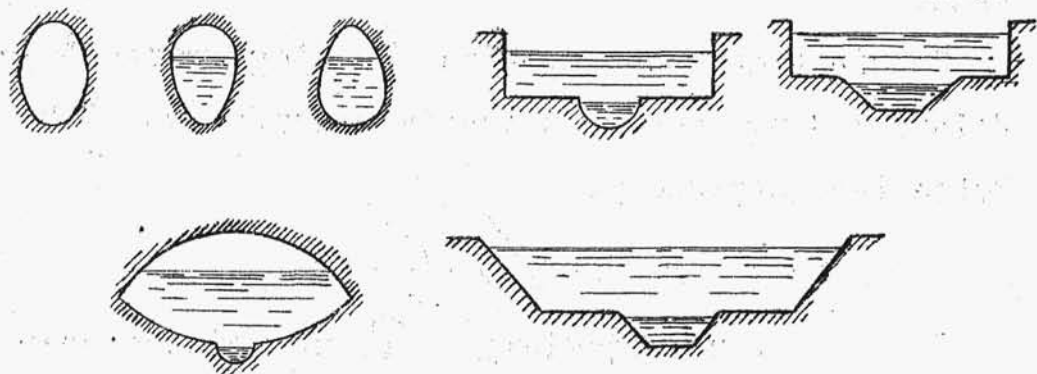
$$\omega = 308^\circ.$$

Przy takim napełnieniu kanału kołowego otrzymamy maximum wydatku.

Wypadnie tu zaznaczyć, że stan takiego napełnienia kanału / $\omega = 308^\circ$ / jest bardzo niestały i przy jakiegokolwiek przyczynie przekrój kanału wypełnia się całkowicie i wydatek maleje.

254. Poza kanałami o przekrojach wyżej rozpatrzonych stosowane są kanały wielu innych przekrojów, jak

kanały owalne, jajowate, muszlowe i różne kombinowane. Każdy z tych kanałów może być badany tak, jak to robiliśmy z kanałami poprzednimi.



rys.169.

255 . Przejdźmy teraz do rozpatrzenia paru typowych zagadnień, dotyczących obliczania wymiarów kanałów lub rzek.

ZADANIE I.

Niech będzie kanał gotowy; zatem znamy jego przekrój F , obwód zwilżony O i znamy spadek J dna kanału. Znaleźć, jaki wydatek wody możemy uzyskać w takim kanale ?

W § 246 mieliśmy wzór (C) , z którego znajdziemy wydatek: $Q = v \cdot F$