

zostało do cieczy doskonałej i równanie /6/ otrzymaliśmy dla tej właśnie cieczy. Gdybyśmy zechcieli powyższe rozumowanie zastosować do gazu, otrzymalibyśmy bardziej złożone zagadnienie, gdyż z jednej strony objętości cząstek gazu przesuwanych zmieniałyby się w zależności od zmieniającego się ciśnienia, a z drugiej strony przy obliczeniu pracy przygotowanej siły objętościowej nie moglibyśmy uważać γ za stałą i przenieść poza znak sumy.

Mimo to jednak równanie, otrzymane dla dwóch punktów cieczy, nieskończenie bliskich, mianowicie równanie:

$$dp = \frac{\gamma}{g}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

jest ważne zarówno dla cieczy, jak i dla gazów, a to ze względu na to, że w nieskończenie bliskich punktach ciśnienie, a wraz z niem ciężar właściwy γ gazu nieskończenie mało się różnią.

POWIERZCHNIA JEDNAKOWEGO CIŚNIENIA /POTENCJALNA/.

29. Poprzednio poznaliśmy zmianę ciśnienia hydrostatycznego w płynie /w cieczy lub w gazie/ w dwóch bardzo bliskich punktach. Naogół ciśnienia od punktu do punktu się zmieniają, jednak można sobie wyobrazić, że może istnieć szereg takich punktów

w bliższym i dalszym sąsiedztwie, w których ciśnienie hydrostatyczne jest jedno i to samo. Punkty te znajdują się na powierzchni pewnej, którą nazywamy powierzchnią jednakowego ciśnienia, albo powierzchnią potencjalną, lub powierzchnią poziomą.

Znajdźmy równanie powierzchni jednakowego ciśnienia. Równanie to otrzymamy z równania /3/ w taki sposób:

Niech równanie /3/

$$dp = \frac{\gamma}{g}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

dotyczy dwóch nieskończenie bliskich punktów o jednakowym ciśnieniu; wtedy dp dla tego przypadku = 0, zatem, po skróceniu przez $\frac{\gamma}{g}$, otrzymamy:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \dots\dots\dots /8/$$

Równanie to wiąże współrzędne x, y, z z wielkościami przyspieszenia siły objętościowej, albo, możemy też powiedzieć, z wielkością samej siły objętościowej, której rzuty są proporcjonalne do X, Y, Z . Będzie to więc szukane równanie powierzchni jednakowego ciśnienia. Zwrócić tu należy uwagę, że

dx, dy, dz są rzutami ds = bardzo małej odległości dwóch punktów, znajdujących się na szukanej

powierzchni jednakowego ciśnienia.

30. Z samego określenia pow. ni jednakow. ciśnienia oraz z równania /8/ poznamy kilka właściwości tej powierzchni:

a/ różnych powierzchni, jednak. ciśnienia wewnątrz cieczy lub gazu możemy wyobrazić sobie nieskończenie wiele; wynika to stąd, że wybierając dowolny punkt o pewnym ciśnieniu, możemy odnaleźć szereg punktów o tem samem ciśnieniu, a więc leżących na wspólnej powierzchni jednak ciśnienia. Ponieważ ciśnienie możemy odróżnić nieskończenie wiele, zatem tyluż możemy pomyśleć powierzchni jednak. ciśn.

b/ Powierzchnie jednakowego ciśnienia nie mogą się ani przecinać ani stykać ze sobą; w przeciwnym razie w miejscach przecięcia się lub zetknięcia się dwóch takich powierzchni mielibyśmy dwa różne ciśnienia, co jest przeciwne z tem, czego dowiedliśmy w art. 24.

c/ Na skutek poprzedniej właściwości będzie zrozumiałe, że powierzchnie jednakowego ciśnienia tworzą wewnątrz płynu rozważanego albo powierzchnię ze wszystkich stron zamkniętą, albo też powierzchnię, która dochodzi do ścianek naczynia, wypełnionego płynem.

d/ Równanie /8/ przedstawmy w odmiennej cokolwiek postaci, biorąc pod uwagę, że X, Y, Z są rzutami przyspieszenia wypadkowego a siły objętościowej na trzy osi, do siebie prostopadłe, dx, dy, dz , zaś są rzutami odcinka ds , łączącego dwa bliskie punkty jednej i tej samej powierzchni jednakowego ciśnienia. Mamy więc możliwość napisania

$$X = a \cdot \cos(a, x) ; Y = a \cdot \cos(a, y) ; Z = a \cdot \cos(a, z)$$

oraz

$$dx = ds \cos(ds, x) ; dy = ds \cos(ds, y) ; dz = ds \cos(ds, z)$$

a wtedy lewa strona równania przybierze postać:

$$a \cdot ds \cdot \cos(a, ds) = 0$$

Do tego samego równania moglibyśmy wprost dojść wychodząc z równania /6a/. W otrzymanem dopiero co równaniu ds zerem być nie może; co się tyczy przyspieszenia a , niech będzie ono różne od zera; równanie będzie spełnione wtedy, jeśli

$\cos(a, ds) = 0$, czyli kiedy kąt (a, ds) jest prosty.

Powiemy więc, że kierunek wypadkowego przyspieszenia w każdym miejscu badanego płynu jest prostopadły do powierzchni jednakowego ciśnienia.

31. LINJE SIŁ. Wyobraźmy sobie szereg nieskończone bliskich powierzchni jednakowego ciśnienia

$F_1, F_2, F_3 \dots$. Na jednej z nich, np. na F_1 obierzmy dowolny punkt; przeprowadźmy przez ten punkt normalną do powierzchni - będzie to kierunek siły objętościowej w tym punkcie działającej. Przedłużmy ten kierunek do sąsiedniej najbliższej powierzchni F_2 . W otrzymanym punkcie przecięcia się poprowadźmy normalną do F_2 i przedłużmy tę normalną do sąsiedniej powierzchni F_3 i t.d. Otrzymamy tą drogą wielobok łamany, który w granicy zamieni się w krzywą, nazywaną **linją sił**. Kierunek stycznej do otrzymanej linji sił w dowolnym punkcie wskazuje kierunek siły objętościowej w tem właśnie miejscu.

Podobne linje sił mogą być przeprowadzone przez jakikolwiek punkt powierzchni F jednakowego ciśnienia. W ten sposób otrzymamy układ linji sił, dla powierzchni jednakowego ciśnienia.

Aby otrzymać równanie linji sił, rozumiemy tak: kierunek przyspieszenia α siły objętościowej wskazuje w każdym miejscu kierunek elementu linji sił. Jeśli X jest rzutem α na oś x , więc będzie:

$$X = \alpha \cos(\alpha, x); \text{ stąd } \cos(\alpha, x) = \frac{X}{\alpha};$$

$$\text{również } Y = \alpha \cos(\alpha, y), \text{ stąd, } \cos(\alpha, y) = \frac{Y}{\alpha};$$

wreszcie

$$Z = a \cdot \cos(\alpha, z), \quad \text{stad} \quad \cos(\alpha, z) = \frac{Z}{a}$$

Oznaczmy element linii sił przez $d\sigma$, a rzuty tego elementu na osi współrzędne przez $d\xi, d\eta, d\zeta$ wtedy:

$$d\xi = d\sigma \cdot \cos(\alpha, x) = d\sigma \cdot \frac{X}{a}; \quad \text{dalej}$$

$$d\eta = d\sigma \cdot \cos(\alpha, y) = d\sigma \cdot \frac{Y}{a};$$

$$d\zeta = d\sigma \cdot \cos(\alpha, z) = d\sigma \cdot \frac{Z}{a};$$

z tych równań

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\sigma}{a}; \quad \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\sigma}{a}; \quad \frac{d\zeta}{Z} = \frac{d\sigma}{a};$$

wreszcie

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z} \quad \dots \dots \dots /9/$$

Otrzymaliśmy tu dwa równania, które wiążą różniczki współrzędnych ξ, η, ζ linii sił z rzutami przyspieszenia siły objętościowej.

Są to równania różniczkowe linii sił.

ZASTOSOWANIE POWYŻSZYCH TWIERDZEŃ DO CIECZY CIEŻKIEJ.

32. W szeregu następnych artykułów rozpatrzmy zastosowanie poprzednich wiadomości wyłącznie do cieczy ciężkiej, t.j. takiej, na którą działa tylko siła

ciężkości. Ponieważ będziemy rozpatrywali ciecz, zawartą w naczyniu o bardzo nieznacznych /w porównaniu z promieniem kuli ziemskiej/ wymiarach, przeto linje działania siły ciężkości w różnych punktach cieczy będziemy mogli przyjąć za równoległe, przyspieszenie g zaś tej siły będziemy przyjmowali we wszystkich punktach cieczy jednakowe.

Osi spólrzędnych najdogodniej obierać w taki sposób: osi x i y - poziome, zaś oś z - pionową, skierowaną w dół. Zbadajmy przedewszystkiem, jaki kształt będą miały dla cieczy ciężkiej powierzchnie jednakowego ciśnienia.

Równanie różniczkowe takiej powierzchni w ogólnej postaci jest:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Przy założeniu cieczy ciężkiej i przy obranych osiach otrzymamy: $X=Y=0$, $Z=g$; wówczas równanie poprzednie zmieni się w :

$$g \cdot dz = 0 \quad \text{albo} \quad dz = 0$$

po scałkowaniu mamy:

$$z = \text{Const.}$$

Równanie to w osiach x, y, z oznacza płaszczyzny, równoległe do płaszczyzny xy , a więc powierzchnie jednakowego ciśnienia będą płaszczyznami poziomymi.

Ponieważ na swobodnej powierzchni, gdzie się ciecz kończy, mieć będziemy zawsze jednakowe ciśnienie,

więc swobodna powierzchnia, będąc równocześnie powierzchnią jednakowego ciśnienia, jest płaszczyzną poziomą.

W dalszym ciągu wykładu obierać będziemy płaszczyznę xy w płaszczyźnie swobodnej powierzchni cieczy.

33. Otrzymaliśmy równanie równowagi w ogólnym przypadku:

$$dp = \frac{\gamma}{g}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

Przy założeniu cieczy ciężkiej /ciężar właściwy γ / i przy obranych osiach $X=0$; $Y=0$; $Z=g$, równanie równowagi daje:

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot g \cdot dz = \gamma \cdot dz.$$

Po scałkowaniu:

$$p = \gamma z + C \text{ /stała całkowania/}.$$

Stałą całkowania możemy określić z jakiegokolwiek warunku skądinąd nam znanego; najczęściej będziemy mieli dane ciśnienie na swobodnej powierzchni cieczy. Niech to będzie ciśnienie atmosferyczne, które będziemy oznaczali przez p_a ; wtedy z warunku, że przy $z=0$; $p=p_a$, otrzymamy: $p_a = C$; samo zaś równanie, po wyrugowaniu stałej całkowania, przybierze postać:

$$p = p_a + \gamma z \quad \dots \dots \dots /10/.$$

Z tego równania widzimy, że ciśnienie hydrosta-

tyczne w cieczy ciężkiej rośnie linjowo w miarę zagłębiania się pod swobodną powierzchnią. Wyraz γz w równaniu /10/ możemy napisać: $\gamma \cdot 1^{\text{st}} \cdot z$; wtedy $1^{\text{st}} \cdot z$ oznacza objętość słupa o podstawie = jednostce pola i wysokości z .

Wówczas wypowiemy słowami twierdzenie, zawarte w równaniu /10/ w taki sposób: Ciśnienie hydrostatyczne (p) w każdym punkcie cieczy jest równe ciśnieniu na swobodnej powierzchni (p_a) , zwiększonemu o ciężar słupa cieczy, którego podstawa jest równa jednostce pola, a wysokość jest równa (z) odległości tego punktu od swobodnej powierzchni cieczy .

34. PRAWO PASCALA /1623-1662/.

Niech ciecz ciężka będzie zawarta w naczyniu zamkniętem. Niech w jednym miejscu, w naczyniu, znajduje się mały tłoczek T , szczelnie dopasowany i mogący poruszać się bez tarcia. Przypuśćmy, że tłoczek T jest wciskany do wnętrza naczynia z taką siłą, że w miejscu zetknięcia się tłoczka z cieczą istnieje ciśnienie hyd-