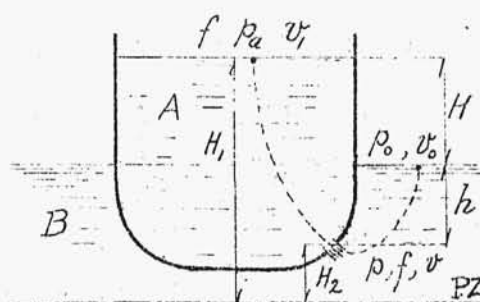


$$\psi = \varphi \sqrt{\frac{1}{1,75}} = 0,82 \cdot 0,76 = \underline{0,623}.$$

### 139. WYPIŁYW CIECZY PRZEZ OTWÓR ZATOPIONY.

Mamy naczynie  $A$  z otworem zatopionym o polu  $f$ .  
Na swobodnej powierzchni naczynia  $A$  mamy ciśnienie  $p_a$   
i prędkość  $v$ .



Ciecz wypływa do naczynia  $B$ , gdzie na swobodnej powierzchni jest ciśnienie  $p_o$  i prędkość ciecży odpływającej jest  $v_2$ . Zna-

rys.95.

ależy należyć prędkość wypływu w przekroju  $f$  oraz wydatek w tem miejscu.

Napiszmy równanie dla cząstki, wziętej na swobodnej powierzchni i w otworze  $f$ :

$$H_1 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H_2 + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

a dalej :

$$\frac{v^2}{2g} = H_1 - H_2 + \frac{p_a - p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

Należy stąd wyrugować ciśnienie  $p$ .

Napiszmy równanie dla cząstki, kiedy ta znajduje się w naczyniu  $B$  jeszcze tuż koło otworu  $f$  i kiedy następnie wypłynie na swobodną powierzchnię naczynia  $B$ . Przyjmujemy, że cząstki cieczy, ledwie wypłyną z otworu  $f$  dostają się do wielkiej masy cieczy i tracą całą prędkość  $v$  skutkiem uderzenia o ciecz, poruszającą się znacznie powolniej. Powstają wiry w cieczy. Możemy zatem przyjąć, że cząstka przy otworze  $f$  prędkości już nie posiada. Zatem równanie napiszemy w taki sposób:

$$H_2 + \frac{p}{\gamma} + 0 = H_2 + h + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Stąd otrzymujemy  $\frac{p}{\gamma} = h + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$ . Podstawiając tę wartość  $\frac{p}{\gamma}$  w poprzednie równanie, znajdziemy:

$$\frac{v^2}{2g} = H_1 - H_2 + \frac{p_a}{\gamma} - h - \frac{p_0}{\gamma} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g},$$

albo:

$$\frac{v^2}{2g} = H_1 - (H_2 + h) + \frac{p_a - p_0}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g};$$

ponieważ  $H_1 - (H_2 + h) = H$ , zatem

$$\frac{v^2}{2g} = H + \frac{p_a - p_0}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}.$$

Ostatecznie, uwzględniając jeszcze współczynnik prędkości:

$$v = \varphi \sqrt{2gH + 2g \frac{p_a - p_o}{\gamma} + v_1^2 - v_2^2} \dots \dots \dots /58/$$

W przypadku, kiedy  $p_a = p_o$ , otrzymujemy:

$$v = \varphi \sqrt{2gH + v_1^2 - v_2^2} \dots \dots \dots /59/$$

Bardzo często spotykać się będziemy z takimi warunkami, kiedy  $v_2$  jest bardzo małe; wtedy

$$v = \varphi \sqrt{2gH + v_1^2} \quad \text{albo} \quad v = \varphi \sqrt{2g(H + \frac{v_1^2}{2g})} \dots /60/$$

Często wolno będzie przyjąć, że i  $v_1$  jest bardzo małe; wówczas

$$v = \varphi \sqrt{2gH} \dots \dots \dots /61/$$

We wszystkich wzorach dostrzegamy, że prędkość przepływu zależy od  $H$ , t.j. od różnicy poziomów cieczy w naczyniach  $A$  i  $B$ , a wcale nie zależy od tego, czy otwór  $f$  znajduje się głębiej, czy płycej pod swobodną powierzchnią cieczy, czy cząstkę w strudze obraliśmy w tym czy innym miejscu otworu.

Mając prędkość  $v$  znajdziemy **w y d a t e k**  
**w o d y :**

$$Q = \varphi \cdot v \cdot \psi \cdot f = \mu \cdot f \cdot v.$$

W najogólniejszym przypadku, kiedy  $p_a \neq p_o$ .

$$Q = \mu f \sqrt{2gH + 2g \frac{p_a - p_o}{\gamma} + v_1^2 - v_2^2} \dots \dots \dots /62/$$

w następnych przypadkach, kiedy

$$Q = \mu f \sqrt{2gH + v_1^2 - v_2^2} \dots \dots \dots /63/$$

jeżeli  $v_2$  jest bardzo małe:

$$Q = \mu f \sqrt{2gH + v_1^2} \dots \dots \dots /64/$$

wreszcie, kiedy  $v_1$  też jest małe, otrzymamy:

$$Q = \mu f \sqrt{2gH} \dots \dots \dots /65/$$

Ogólnie można przyjąć dla otworu prostokątnego w cienkiej ścianie  $\mu = 0,62$ .

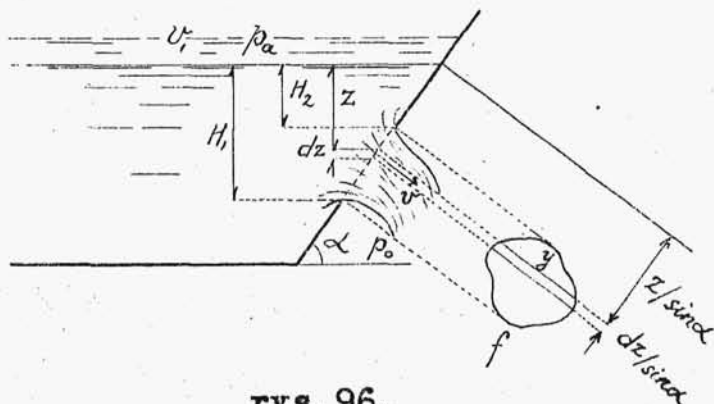
Spółczynniki wydatku przy wypływie cieczy przez otwór zatopiony przy stosowaniu różnych przystawek są cołowiek mniejsze, niż przy wypływie przez otwór swobodny. Według Weisbacha stosunek między spółczynnikami wydatku przez otwór zatopiony i wydatku przez otwór swobodny średnie jest równy 0,98

140. Dotychczas była mowa o otworach, których wymiary są nieznaczne w porównaniu z głębokością, na której otwory te znajdują się pod swobodną powierzchnią. Z dużą dokładnością mogliśmy przyjąć

wać, że prędkość cząstek, płynących przez środek ciężkości otworu, jest średnią prędkością wszystkich cząstek cieczy.

Sprawa inaczej się przedstawi, jeśli wymiary otworu są **z n a c z n e** w porównaniu z głębokością, na której znajduje się otwór pod swobodną powierzchnią. Zajmiemy się obliczeniem **w y d a t k u c i e c z y p r z e z o t w o r y o z n a c z n y c h w y m i a r a c h**.

Niech będzie naczynie, w którym w bocznej płaskiej ścianie mamy wykonany otwór o polu  $f$ . Na rysunku pokazane jest to pole w kładzie. Niech ścianka będzie pochylona do poziomu pod kątem  $\alpha$ .



rys. 96.

Podzielimy pole  $f$  prostami poziomymi na bardzo wąskie paski. Ponieważ punkty, obrane na jednym pasku znajdują się wszystkie na jednakowej głębokości, więc przyjąć możemy, że w całym pasku prad

kość wpływa jest jednakowa. Prędkość tę znajdziemy z równania /57/:

$$v = \sqrt{\left(z + \frac{p_a - p_o}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2g}\right) 2g}$$

Wówczas wydatek elementarny cieczy przez pasek, którego pole jest =  $df$  określimy z równania:

$$dQ = v \cdot df$$

Wartość  $v$  dopiero co znaleźliśmy; elementarne pole paska  $df$  możemy obliczyć jako iloczyn

$$y \cdot \frac{dz}{\sin \alpha}$$

Zatem

$$dQ = \frac{y \cdot dz}{\sin \alpha} \sqrt{2g \left(z + \frac{p_a - p_o}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2g}\right)}$$

Jeżeli obliczymy elementarne wydatki przez wszystkie paski, stanowiące w sumie pole  $f$ , i te wydatki zsumujemy, otrzymamy całkowity wydatek  $Q$ .

Innymi słowy, uwzględniając jednocześnie warunki, że mamy do czynienia z cieczą rzeczywistą, przez wprowadzenie współczynnika wydatku, otrzymamy:

$$Q = \mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{H_2}^{H_1} y \cdot dz \sqrt{z + \frac{p_a - p_o}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2g}} \dots \dots \dots /66/$$

W przypadku, kiedy  $p_a = p_o$ , co najczęściej będziemy spotykali, otrzymamy:

$$Q = \mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{H_2}^{H_1} y \cdot dz \sqrt{z + \frac{v_1^2}{2g}} \dots \dots \dots /67/$$

Gdyby również prędkość  $v_1$  była bardzo mała, wtedy wyraz  $\frac{v_1^2}{2g}$  można opuścić; wówczas:

$$Q = \mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{H_2}^{H_1} y \cdot dz \sqrt{z} \dots \dots \dots /68/$$

Tego samego kształtu równanie może być stosowane zarówno wtedy, kiedy istnieje prędkość  $v_1$ , lecz jeżeli przyjmiemy, że swobodna powierzchnia cieczy w naczyniu jest o  $\frac{v_1^2}{2g}$  wyżej położona i że od tej powierzchni obliczamy wszystkie wysokości  $H_1$ ,  $H_2$  i różne rzędne  $z$

Nieraz trzeba oznaczyć **ś r e d n i ą** **p r ę d k o ść** wypływu przez rozpatrywany otwór. **Ś r e d n i ą** **p r ę d k o ść i ą** **w y p ł y w u** nazywamy taką prędkość, jednakową we wszystkich punktach otworu, przy której wydatek cieczy będzie taki sam, jak i przy rzeczywistych prędkościach, które są różne na rozmaitych głębokościach. Oznaczmy średnią prędkość przez  $v_s$ .

Wtedy  $Q = f \cdot v_s$  ; jednocześnie, naprz.  
w przypadku kiedy  $p_a = p_o$

$$Q = \mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{H_2}^{H_1} y \cdot dz \sqrt{z + \frac{v_s^2}{2g}} ,$$

zatem

$$v_s = \frac{\mu \sqrt{2g}}{f \cdot \sin \alpha} \int_{H_2}^{H_1} y dz \sqrt{z + \frac{v_s^2}{2g}} ;$$

ponieważ

$$f = \int_{H_2}^{H_1} y \frac{dz}{\sin \alpha} ,$$

zatem

$$v_s = \mu \sqrt{2g} \cdot \frac{\int_{H_2}^{H_1} y dz \sqrt{z + \frac{v_s^2}{2g}}}{\int_{H_2}^{H_1} y dz} \dots \dots \dots /69/$$

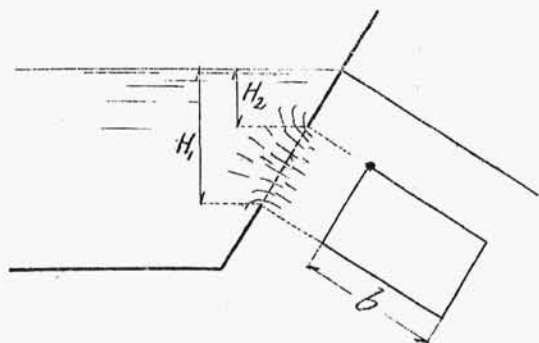
Wszystkie równania /66/ - /69/ mogą być  
scalkowane, jeśli będziemy mieli zależność mię-  
dzy  $y$  i  $z$  .

141. Rozpatrzmy szczególny przypadek, kiedy  
o t w ó r j e s t p r o s t o k á t n y  
i jego krawędź pozioma ma długość  $b$  .

Wówczas w przypadku, najczęściej spotykanym,  
kiedy  $p_a = p_o$  , otrzymamy z równania /67/ wzgl.  
/68/:



$$Q = \mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{H_2}^{H_1} b \cdot dz \sqrt{z + \frac{v_i^2}{2g}}$$



W celu scalkowania  
oznaczymy  $z + \frac{v_i^2}{2g}$   
przez  $x$ , wtedy  
 $dz = dx$  i nasza  $\int$   
otrzyma się:

rys. 97.

$$Q = \frac{\mu b}{\sin \alpha} \sqrt{2g} \int_{H_2}^{H_1} \sqrt{x} \cdot dx = \frac{\mu b}{\sin \alpha} \sqrt{2g} \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{H_2}^{H_1}$$

Po podstawieniu zamiast  $x$  wartości  $z + \frac{v_i^2}{2g}$ ,  
a przy granicach  $H_1$  i  $H_2$  - wartości  $H_1 + \frac{v_i^2}{2g}$  i  $H_2 + \frac{v_i^2}{2g}$ ,  
znajdziemy:

$$Q = \frac{2}{3} \frac{\mu b}{\sin \alpha} \sqrt{2g} \left[ \left( H_1 + \frac{v_i^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( H_2 + \frac{v_i^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad /70/$$

Gdyby można było  $v_i$  ze względu na małą jej  
wartość opuścić, wtedy:

$$Q = \frac{2}{3} \frac{\mu b}{\sin \alpha} \sqrt{2g} \left[ H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}} \right] \quad /71/$$

Jeżeli ściana, w której znajduje się otwór  $f$ , jest pionowa, t.j. gdy kąt  $\alpha = 90^\circ$ , wtedy przy uwzględnieniu  $v_1$ :

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[ \left( H_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( H_2 + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \dots \dots /72/$$

przy pominięciu prędkości  $v_1$ :

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[ H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}} \right] \dots \dots /73/$$

Średnia prędkość w tym ostatnim przypadku:

$$v_s = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \cdot \frac{H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}}{H_1 - H_2} \dots \dots /74/$$

W powyższych wzorach można przyjmować dla otworu prostokątnego w cienkiej ścianie  $\mu = 0,62$ .

142. Możemy obliczyć wydatek przez otwór prostokątny mniej dokładnie, niż to zrobiliśmy poprzednio.

Możemy, mianowicie, zadany otwór potraktować tak, jakby to był otwór o wymiarach nieznaczących w porównaniu z zagłębieniem go pod swebedną powierzchnią. Wtedy należałoby postąpić zgodnie z art. , przyjmując, że w całym otworze ciecz wypływa z jednakową prędkością, przytem taką, jaką

mają cząstki, wypływające przez środek ciężkości otworu.

Przy takim założeniu otrzymamy:

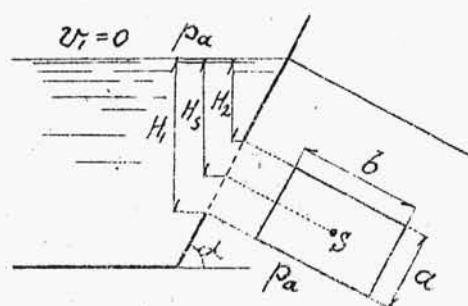
$$Q = \mu \cdot b \cdot a \cdot \sqrt{2g H_s} ;$$

ponieważ

$$a = \frac{(H_1 - H_2)}{\sin \alpha}, \text{ zaś } H_s = \frac{1}{2} (H_1 + H_2) ,$$

więc:

$$Q = \mu \cdot \frac{b (H_1 - H_2)}{\sin \alpha} \sqrt{2g \frac{H_1 + H_2}{2}} \dots \dots \dots /75/$$



Jeśli ścianka z otworem będzie pionowa, wówczas:

$$Q = \mu b (H_1 - H_2) \sqrt{2g \frac{H_1 + H_2}{2}} \quad /76/$$

Ciekawe jest, jaką omyłkę zrobimy, obliczając wydatek według

rys. 98. wzoru naprz. /76/ zamiast tego, żeby obliczać ten wydatek dla takiego samego przypadku według wzoru /73/, dokładniejszego. Najlepiej ocenimy to ze stosunku:

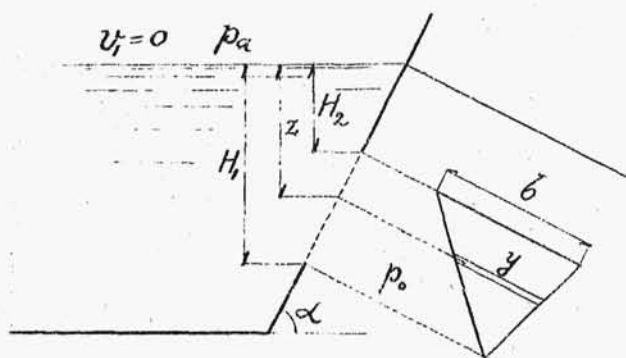
$$\eta = \frac{Q \text{ w/g wzoru } /73/}{Q \text{ w/g wzoru } /76/} = \frac{\frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} [H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}]}{\mu b (H_1 - H_2) \sqrt{2g \frac{H_1 + H_2}{2}}}$$

Obliczmy  $\mathcal{J}$  dla kilku wartości,

gdy  $H_1 = 1,5H_2$  |  $= 2H_2$  |  $= 3H_2$  |  $= 4H_2$  |  $= 5H_2$   
 otrzymamy wtedy  $\mathcal{J} = 0,998$  |  $0,995$  |  $0,989$  |  $0,984$  |  $0,980$

Jak widzimy, różnice wypadają niewielkie, nawet przy  $H_1 = 5H_2$  wynoszą 2%, czyli w granicach niedokładności współczynników

143. Niech będzie otwór trójkątny, podstawa trójkąta o długości  $b$  niech będzie pozioma; odległość podstawy od swobodnej powierzchni niech będzie  $H_2$ , - wierzchołka -  $H_1$ .



rys. 99.

Znajdźmy wydatek cieczy przez taki otwór w założeniu, że  $p_a = p_0$  i że prędkość  $v_1$  jest bardzo mała, tak, że można przyjąć ją  $= 0$ .

Wówczas, zgodnie z równaniem /68/:

$$Q = \frac{\mu \sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{H_2}^{H_1} y \cdot \sqrt{z} \cdot dz$$

ponieważ  $y : b = (H_1 - z) : (H_1 - H_2)$ ,

albo

$$y = b \cdot \frac{H_1 - z}{H_1 - H_2}$$

mamy:

$$Q = \frac{\mu \cdot b \cdot \sqrt{2g}}{\sin \alpha (H_1 - H_2)} \int_{H_2}^{H_1} (H_1 - z) \cdot z^{\frac{1}{2}} dz$$

Rozwiążmy przedewszystkiem całkę:

$$\begin{aligned} \int_{H_2}^{H_1} (H_1 - z) \cdot z^{\frac{1}{2}} dz &= \int_{H_2}^{H_1} H_1 z^{\frac{1}{2}} dz - \int_{H_2}^{H_1} z^{\frac{3}{2}} dz = \\ &= \left[ H_1 \cdot \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} \right]_{H_2}^{H_1} = H_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot H_1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} H_1^{\frac{5}{2}} - H_1 \cdot \frac{2}{3} H_2^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} H_2^{\frac{5}{2}} = \\ &= \frac{2}{3} H_1^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} H_1^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} H_1 H_2^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} H_2^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{15} (2 H_1^{\frac{5}{2}} - 5 H_1 H_2^{\frac{3}{2}} + 3 H_2^{\frac{5}{2}}) \end{aligned}$$

A zatem:

$$Q = \frac{2}{15} \mu \frac{b \sqrt{2g}}{(H_1 - H_2) \sin \alpha} (2 H_1^{\frac{5}{2}} - 5 H_1 H_2^{\frac{3}{2}} + 3 H_2^{\frac{5}{2}}) \dots / 77 /$$

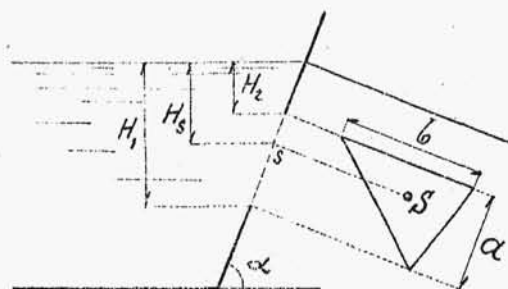
Gdyby prędkości  $v_1$  nie można było pominąć, wówczas łatwo dostrzeżemy, że ostatni wzór da się do tego przypadku zastosować; należy tylko wstawić zamiast  $H_1$  wielkość  $H_1 + \frac{v_1^2}{2g}$  i zamiast  $H_2$  - wielkość  $H_2 + \frac{v_2^2}{2g}$ .

Z ostatniego wzoru łatwo otrzymać wzór, któryby wyznaczył wydatek cieczy przez otwór w ścianie pio-

nowej, kiedy zatem kąt  $\alpha = 90^\circ$ ; wówczas  $\sin = 1$   
i wzór przybierze postać:

$$Q = \frac{2}{15} \mu \frac{b \sqrt{2g}}{H_1 - H_2} \left( 2H_1^{\frac{5}{2}} - 5H_1 H_2^{\frac{3}{2}} + 3H_2^{\frac{5}{2}} \right) \dots /78/$$

144. Obliczmy wydatek przy założeniu takim samym, jak w art. 142 przyjmowaliśmy dla otworu prostokątnego:



rys. 100.

$$Q = \mu \cdot b \cdot a \cdot \sqrt{2g H_s}$$

Ponieważ

$$a = \frac{H_1 - H_2}{\sin \alpha},$$

zaś

$$H_s = H_2 + \frac{H_1 - H_2}{3} = \frac{H_1 + 2H_2}{3},$$

więc

$$Q = \mu \cdot b \frac{H_1 - H_2}{\sin \alpha} \sqrt{2g \frac{H_1 + 2H_2}{3}} \dots\dots /79/$$

Jeśli ścianka z otworem będzie pionowa, wtedy:

$$Q = \mu b (H_1 - H_2) \sqrt{2g \frac{H_1 + 2H_2}{3}} \dots\dots /80/$$

Znajdźmy stosunek wydatku, obliczonego według wzoru naprs. /78/ i wydatku według wzoru /80/:

$$J = \frac{Q_{w/g. wzoru / 78/}}{Q_{w/g. wzoru / 80/}} = \frac{\frac{2}{15} \mu \frac{b \sqrt{2g}}{H_1 - H_2} (2H_1^{\frac{5}{2}} - 5H_1 H_2^{\frac{3}{2}} + 3H_2^{\frac{5}{2}})}{\mu b (H_1 - H_2) \sqrt{2g} \frac{H_1 + 2H_2}{3}}$$

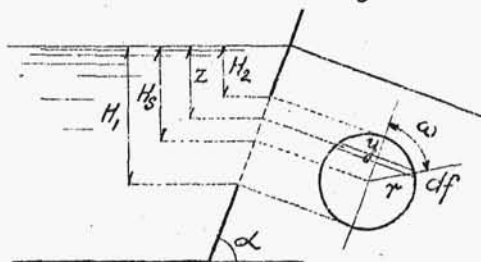
Obliczmy  $J$  dla wartości:

	$H_1 =$	$1,5 H_2$	$2 H_2$	$3 H_2$
Otrzymamy:	$J =$	0,999	0,996	0,991

I tu widzimy, że obliczenie wydatku z wzoru przybliżonego daje wynik bardzo zbliżony do wzoru dokładniejszego. Jest to wynik ważny, gdyż wzór przybliżony jest jednocześnie znacznie prostszy.

145. Rozpatrzmy jeszcze wypływ cieczy przez otwór okrągły o promieniu  $r$ . Elementarne pole obliczymy:

$$df = y \frac{dz}{\sin \alpha} = 2r \cdot \sin \omega \cdot \frac{dz}{\sin \alpha};$$



rys. 101.

ponieważ

$$H_s = z + r \cdot \cos \omega \cdot \sin \alpha,$$

więc

$$dz = r \cdot \sin \omega \cdot \sin \alpha \cdot d\omega$$

zatem

$$df = 2r^2 \sin^2 \omega \cdot d\omega.$$

Rozpatrywany pasek znajduje się na głębokości  
 $z = H_s - r \cdot \cos \omega \cdot \sin \alpha$  pod swobodną powierzchnią,  
więc prędkość wypływu:

$$= \sqrt{2g(H_s - r \cdot \cos \omega \cdot \sin \alpha)}$$

Wydatek elementarny otrzymamy:

$$dQ = 2r^2 \sin^2 \omega \cdot d\omega \sqrt{2g(H_s - r \cdot \cos \omega \cdot \sin \alpha)},$$

albo, inaczej

$$dQ = 2r^2 \sqrt{2gH_s} \cdot \sin^2 \omega \cdot d\omega \sqrt{1 - \frac{r \cdot \sin \alpha}{H_s} \cos \omega}.$$

Oznaczmy czasowo

$$\frac{r \cdot \sin \alpha}{H_s} = k,$$

wtedy

$$dQ = 2r^2 \sqrt{2gH_s} \cdot \sin^2 \omega \cdot d\omega \cdot \sqrt{1 - k \cdot \cos \omega}.$$

Ostatni wyraz  $\sqrt{1 - k \cdot \cos \omega} = (1 - k \cos \omega)^{\frac{1}{2}}$  możemy rozwi-  
nać w szereg, jako dwumian Newtona, pisząc:

$$(1 - k \cos \omega)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}k \cos \omega - \frac{1}{8}k^2 \cos^2 \omega - \frac{1}{48}k^3 \cos^3 \omega - \dots$$

Zatrzymajmy się na pierwszych trzech wyrazach;  
wtedy:

$$dQ = 2r^2 \sqrt{2gH_s} \cdot \sin^2 \omega \cdot d\omega \left(1 - \frac{1}{2}k \cos \omega - \frac{1}{8}k^2 \cos^2 \omega\right).$$

Scalkujmy poprzednie równanie:



$$Q = 2r^2 \sqrt{2gH_3} \int_0^\pi (\sin^2 \omega - \frac{1}{2} k \sin^2 \omega \cos \omega - \frac{1}{8} k^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega) d\omega.$$

Całkę tu otrzymaną rozłożymy; otrzymamy wtedy

$$Q = 2r^2 \sqrt{2gH_3} \left[ \int_0^\pi \sin^2 \omega d\omega - \frac{1}{2} k \int_0^\pi \sin^2 \omega \cos \omega d\omega - \frac{1}{8} k^2 \int_0^\pi \sin^2 \omega \cos^2 \omega d\omega \right]$$

Rozwiążmy kolejno podane całki: pierwszą całkę rozwiążemy przez części:

$$\int \sin^2 \omega d\omega = \int \sin \omega \cdot \sin \omega d\omega = -(\sin \omega \cos \omega) + \int d\omega - \int \sin^2 \omega d\omega;$$

Stąd:

$$\int_0^\pi \sin^2 \omega d\omega = -\left(\frac{1}{2} \sin \omega \cos \omega\right)_0^\pi + \frac{1}{2} (\omega)_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Drugą całkę  $\int_0^\pi \sin^2 \omega \cos \omega d\omega$  rozwiążemy, zwróciwszy uwagę na to, że pod całką mamy różniczkę  $\frac{1}{3} \sin^3 \omega$ ; zatem:

$$\int_0^\pi \sin^2 \omega \cos \omega d\omega = \left(\frac{1}{3} \sin^3 \omega\right)_0^\pi = 0$$

Trzecią całkę  $\int_0^\pi \sin^2 \omega \cos^2 \omega d\omega$  rozwiążemy przez części:

$$\int \sin^2 \omega \cos^2 \omega d\omega = \int \sin^2 \omega \cos \omega d\omega \cdot \cos \omega =$$

$$= \frac{1}{3}(\cos \omega \cdot \sin^3 \omega) + \frac{1}{3} \int \sin^3 \omega \cdot \sin \omega \cdot d\omega = \frac{1}{3} \cos \omega \cdot \sin^3 \omega + \frac{1}{3} \int \sin^4 \omega \cdot d\omega =$$

$$= \frac{1}{3} \cos \omega \cdot \sin^3 \omega - \frac{\cos \omega \cdot \sin^3 \omega}{3 \cdot 4} - \frac{1}{8} \sin \omega \cdot \cos \omega + \frac{1}{8} \omega ;$$

zatem:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \omega \cdot \cos^2 \omega \cdot d\omega = \frac{1}{4}(\cos \omega \cdot \sin^3 \omega)_0^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{8}(\sin \omega \cdot \cos \omega) + \frac{1}{8}(\omega)_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

Wobec tego możemy wrócić do  $Q$ , pisząc:

$$Q = 2\pi r^2 \sqrt{2gH_s} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8} k^2 \frac{\pi}{8} \right) = \pi r^2 \sqrt{2gH_s} \cdot \left( 1 - \frac{k^2}{32} \right);$$

ponieważ  $k = \frac{r}{H_s} \sin \alpha$ , więc, uwzględniając w końcu dla cieczy rzeczywistej, poprawkę na wydatek, otrzymamy:

$$Q = \mu \pi r^2 \sqrt{2gH_s} \left( 1 - \frac{1}{32} \frac{r^2}{H_s^2} \sin^2 \alpha \right) . . . . /81/$$

Jeżeli ścianka z otworem będzie pionową, wtedy:

$$Q = \mu \pi r^2 \sqrt{2gH_s} \left( 1 - \frac{1}{32} \frac{r^2}{H_s^2} \right) . . . . . /82/$$

Gdybyśmy chcieli dokładniejszy wzór otrzymać, moglibyśmy przy rozwinięciu  $\sqrt{1 - k \cos \omega}$  w szereg uwzględnić czwarty i piąty wyrazy:  $-\frac{1}{48} k^3 \cos^3 \omega - \frac{1}{384} k^4 \cos^4 \omega$ . Wówczas wzór na  $Q$  miałby postać:

$$Q = \mu \pi r^2 \sqrt{2gH_s} \left( 1 - \frac{1}{32} \frac{r^2}{H_s^2} - \frac{5}{1024} \frac{r^4}{H_s^4} \right) . . . . . /83/$$

Ponieważ, w ścianie pionowej, z czem będziemy się przeważnie spotykali, zawsze będzie:

$$r \leq H_s,$$

więc ostatni wyraz stanowiąc będzie bardzo małą wielkość w porównaniu z poprzednimi.

Dlatego też praktycznie można poprzestać na wzorze /82/, albo nawet na prostszym jeszcze wzorze /84/, o którym niżej mowa.

146. Zobaczymy teraz, jaki otrzymamy wydatek, jeżeli poprzedni otwór okrągły mimo, iż ma mieć znacznie większe wymiary, potraktujemy w taki sam sposób, jak to postępowaliśmy z małymi otworami w art. poprzednich.

Wydatek  $Q$  obliczymy ze wzoru:

$Q = \mu f \cdot v$ , gdzie  $f = \pi r^2$  i  $v = \sqrt{2gH_s}$  ;  
wtedy:

$$Q = \mu \cdot \pi r^2 \sqrt{2gH_s} \quad \dots \dots \dots /84/$$

Porównajmy wynik dokładniejszego obliczenia z wzoru /82/ wzgl. /83/ z wynikiem z wzoru /84/; otrzymamy wówczas:

$$\mathcal{J} = \frac{Q^{w/g} \text{ wz. 82}}{Q^{w/g} \text{ wz. 84}} = \frac{\mu \pi r^2 \sqrt{2gH_s} \left(1 - \frac{1}{32} \frac{r^2}{H_s^2}\right)}{\mu \pi r^2 \sqrt{2gH_s}} = 1 - \frac{1}{32} \frac{r^2}{H_s^2}$$

oraz

$$\mathcal{J}' = \frac{Q^{w/g} \text{ wz. 83}}{Q^{w/g} \text{ wz. 84}} = 1 - \frac{1}{32} \frac{r^2}{H_s^2} - \frac{5}{1024} \frac{r^4}{H_s^4}$$

np. dla wart, $H_s =$	$r$	$15r$	$2r$	$3r$	$4r$
otrzymamy $\mathcal{J} =$	0,969	0,986	0,992	0,996	0,998
$\mathcal{J}' =$	0,965	0,985	0,992	0,996	0,998

Zatem przybliżony wzór /84/ jest dostatecznie dokładny.

147. PRZEWALY. Wystawmy sobie cienką ściankę płaską i w niej otwór prostokątny. Wydatek wody przez taki otwór już umiemy obliczyć. Do tego celu skorzystamy z wzoru /72/ :

$$Q = \frac{2}{3} \mu \frac{b}{\sin \alpha} \sqrt{2g} \left[ \left( H_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( H_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Wyobraźmy sobie teraz, że otwór jest umieszczony w ścianie w ten sposób, że jego górna krawędź znajduje się na wysokości swobodnej powierzchni wody. Zatem wysokość  $H_2$  w danym razie jest równa 0. Otrzymujemy wówczas otwór, który nazywamy przewalem.