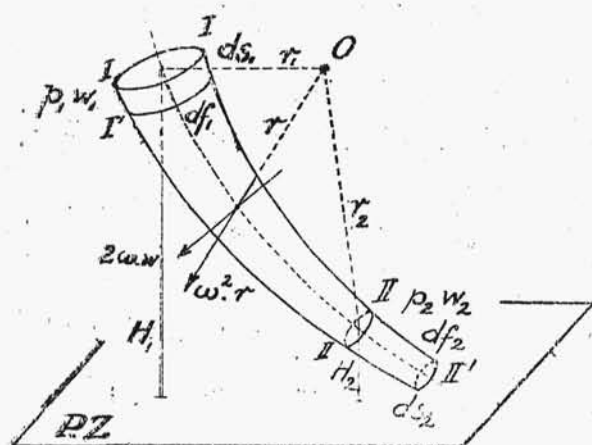


127 a. TWIERDZENIE D. BERNOULLI'ego DLA CIECZY BĘDĄCEJ W RUCHU WZGLĘDNYM.

Niech ciecz doskonała znajduje się w ruchu w naczyniu, które się obraca około osi O ze stałą prędkością kątową ω .



rys. 80.

i H_2 ponad poziomem zasadniczym.

Niech, dalej, w przekroju df_1 będzie prędkość /względna/ w_1 , ciśnienie p_1 . Też samo w przekroju df_2 niech będą: prędkość w_2 i ciśnienie p_2 .

Z teorii ruchu względnego wiemy, że możemy nie brać pod uwagę ruchu - u k ł a d u u n o s z e n i a - w danym razie obrotu - jeśli do sił istotnie

Obierzmy we-
wnątra płynącej
cieczy strugę i
w niej dwa prze-
kroje df_1 , wzgl.
 df_2 . Niech te
przekroje będą
w odległości r_1
i r_2 od osi obro-
tu i znajdują się
na wysokości H_1

działających na naszą ciecz, przyłożymy siły uzupełniające: jedną przeciwną i równą sile unoszenia i drugą t.zw. złożoną siłę odśrodkową.

Pierwsza siła uzupełniająca będzie to siła odśrodkowa, która mogłaby nadać w miejscu odległym o r od osi obrotu przyspieszenie $\omega^2 r$. Siła ta skierowana jest od osi obrotu wzdłuż promienia.

Druga siła uzupełniająca, t.zw. złożona siła odśrodkowa według twierdzenia Coriolisa mogłaby nadać przyspieszenie równe $2 \omega \cdot \omega \cdot \sin \beta$, gdzie ω jest prędkością względną w danym punkcie, ω - prędkością kątową obrotu, zaś β jest to kąt, który prędkość ω tworzy z osią obrotu. Jeżeliby ciecz płynęła w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, wtedy kąt β byłby 90° , a zatem przyspieszenie złożonej siły odśrodkowej byłoby $= 2 \omega \cdot \omega$. W ogólnym przypadku $\beta \leq 90^\circ$. Kierunek tego przyspieszenia jest prostopadły do płaszczyzny, przesuniętej przez kierunek prędkości względnej w danym punkcie i przez prostą równoległą do osi obrotu, wyprowadzoną z tegoż punktu. Zatem przyspieszenie to będzie normalne w każdym miejscu do prędkości względnej.

Uprzytomniwszy sobie, jakie siły działają na naszą ciecz, rozpatrzmy część obranej strugi, zawartą między przekrojami I i II.

Zastosujmy podobnie, jak to robiliśmy w art. 118 twierdzenie o zmianie energii kinetycznej dla tej strugi w ciągu czasu dt , kiedy struga zajmie położenie I' II', kiedy zatem przekroje df_1 i df_2 przesuną się o ds_1 i ds_2 .

Jeżeli założymy, że mamy do czynienia z ruchem trwałym i ciągłym, jak to mieliśmy we wspomnianym art., otrzymamy: zmiana energii kinetycznej w czasie dt będzie

$$\frac{ds_2 \cdot df_2 \cdot \gamma \cdot w_2^2}{g} = \frac{ds_1 \cdot df_1 \cdot \gamma \cdot w_1^2}{g}$$

Siły, działające na naszą strugę, wykonają w czasie dt następujące prace:

Ciśnienia na pole df_1 i df_2 wykonają prace:

$$+ df_1 \cdot p_1 \cdot ds_1 \quad \text{ i } \quad - df_2 \cdot p_2 \cdot ds_2$$

Siła ciężkości wykona pracę:

$$df_1 \cdot ds_1 \cdot \gamma \cdot (H_1 - H_2)$$

Pierwsza siła uzupełniająca, t.j. siła odśrodkowa, której przyspieszenie w każdym miejscu $= \omega^2 r$,

działając na element strugi $df \cdot ds$ o masie $\frac{df \cdot ds}{g} \cdot r$, wykona pracę podczas przesunięcia tego elementu na drodze ds równą

$$\frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot ds \cdot \cos(r, ds).$$

Całkowita praca przy przesunięciu całej strugi z położenia I-II do I'-II' będzie:

$$\int_r^{r_2} \frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot ds \cdot \cos(r, ds).$$

Ponieważ $df \cdot ds$, r , g , ω^2 są stałymi wielkościami, zaś $ds \cdot \cos(r, ds)$ może być uważane jako przyrost r , czyli jako dr , więc poprzednia praca:

$$= \frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \omega^2 \int_r^{r_2} r \cdot dr = \frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \omega^2 \frac{r_2^2 - r^2}{2}.$$

Jeżeli oznaczymy przez u_1 i u_2 prędkości unoszenia w przekroju I i II, wtedy otrzymamy:

$\omega r_1 = u_1$ i $\omega r_2 = u_2$; wówczas obliczana praca ostatecznie będzie:

$$= \frac{df \cdot ds \cdot r}{g} \cdot \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}.$$

Przejdźmy teraz do obliczenia pracy, wykonanej przez drugą siłę uzupełniającą - "złożoną siłę od-

środkową".

Zauważmy, że kierunek tej siły w każdym przekroju strugi, jest normalny do osi strugi, czyli do prędkości w danym miejscu strugi. Przy przesunięciach poszczególnych elementów, tworzących strugę badaną, praca tej siły równa się zeru, a więc w sumie praca "złożonej siły odśrodkowej" = 0.

Po tych obliczeniach możemy napisać twierdzenie o zmianie energii kinetycznej w postaci równania:

$$\frac{ds_2 \cdot df_2 \cdot r}{g} \cdot \frac{w_2^2}{2} - \frac{ds_1 \cdot df_1 \cdot r}{g} \cdot \frac{w_1^2}{2} = df_1 ds_1 p_1 - df_2 ds_2 p_2 +$$

$$+ df_1 ds_1 r (H_1 - H_2) + \frac{df \cdot ds}{g} \cdot r \cdot \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}.$$

Ponieważ $df_1 ds_1 = df_2 ds_2 = df \cdot ds$, więc:

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_1}{r} - \frac{p_2}{r} + H_1 - H_2 + \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}.$$

Po przedstawieniu stosownam wyrazów, otrzymamy:

$$H_1 + \frac{p_1}{r} + \frac{w_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{r} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g}.$$

Równanie to zawiera twierdzenie D. Bernoulli'ego dla cieczy doskonałej, będącej w ruchu względnym.

Równanie to, jak widzimy, różni się od równania dla cieczy, będącej w ruchu bezwzględnym, tylko wyrazami $\frac{u_1^2}{2g}$, wzgl. $\frac{u_2^2}{2g}$, t.j. wysokościami

prędkości unoszenia w odpowiednich przekrojach strugi. Zapamiętać należy, że te wysokości winny być o d j ę t e od odpowiednich stron równania.

Wynik ostatnio otrzymany znajdzie zastosowanie przy badaniu ruchu cieczy w pompach odśrodkowych, oraz w turbinach wodnych różnych systemów.

128. TWIERDZENIE D. BERNOULLI'ego DLA CIECZY RZECZYWISTYCH.

Ciecz doskonała tem się zasadniczo różni od cieczy rzeczywistych, że nie posiada lepkości. Lepkość będzie tym czynnikiem, który zmusza nas do wprowadzenia pewnych zmian w równaniu, wyrażającym twierdzenie D. Bernoulli'ego, otrzymanem dla cieczy doskonałej.

Lepkość powoduje to, że poszczególne cząstki cieczy, znajdujące się w strudze, doznają od sąsiednich cząstek cieczy - w sąsiednich strugach - przeszkody w ruchu w postaci tarcia.

Skutkiem tego całkowite oddziaływanie na powierzchnię boczną strugi badanej od strony tej cieczy, którą odrzuciliśmy, już nie może być normalne do poszczególnych elementów bocznej po-