

przyspieszenia, ciśnienia, które posiadają różne cząstki, kolejno przybywające do obranego punktu. Tę metodę stosował Euler /1707 - 1783/.

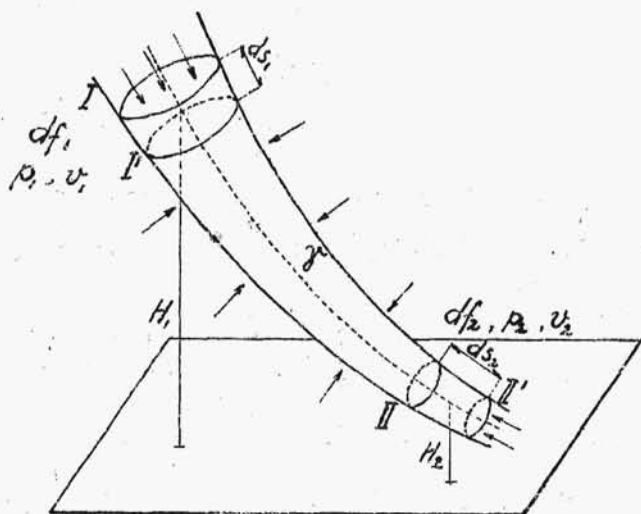
Stosując pierwszą lub drugą metodę, otrzymamy ogólne równanie ruchu cieczy, na zasadzie których możemy dowodzić różnych twierdzeń i poznawać różne szczegóły ruchu cieczy.

Wyniki stąd otrzymane, jednak, na ogół w życiu praktycznym znajdują niewielkie zastosowanie. - Natomiast jest jedno ważne twierdzenie, które otrzymuje się z równań ogólnych ruchu i które ma bardzo szerokie zastosowanie w praktycznych zagadnieniach hydraulicznych. Twierdzenie to musimy poznać. Postaramy się sprawę wyłożyć metodą prostszą, idąc za Danielem Bernoulli'm bez korzystania z ogólnych równań ruchu.

118. T w i e r d z e n i e     D a n i e l a  
B e r n o u l l i ' e g o /1700 - 1782/.

Niech ciecz ciężka doskonała będzie w ruchu. Niech to będzie ruch ciągły i żrwy. Obierzmy wewnątrz cieczy prasy dowolnym punkcie pole elementarne prostopadłe do prędkości w tem miejscu. Przez wszystkie punkty ob-

wodu tego pola poprowadźmy linie prądu. W ten sposób utworzy się powierzchnia, otaczająca strugę cieczy. Weźmy pod rozważanie część strugi, zawartej między przekrojami I i II o polach  $df_1$  i  $df_2$ . Po czasie bardzo małym  $dt$ , ciecz, zawarta początkowo w części strugi /I - II/ przesunie się



rys. 74.

i zajmie położenie /I'-II'/. Przekrój I niech przesunie się o długość  $ds_1$ ; jeżeli prędkość średnia cieczy w tym przekroju będzie  $v_1$ , wówczas możemy przyjąć, że w ciągu bardzo krótkiego czasu  $dt$  prędkość  $v_1$  się nie zmieni i że

$$ds_1 = v_1 \cdot dt$$

Równocześnie przekrój II przesunie się do II' odległość  $ds_2 = v_2 \cdot dt$

Zastosujmy do cieczy, zawartej w badanej strudze, twierdzenie o zmianie energii kinetycznej. - Twierdzenie to głosi: zmiana energii kinetycznej danego układu w ciągu pewnego czasu jest równa sumie prac, wykonanych przez siły zewnętrzne nad danym układem w tym samym czasie.

Zmiana energii kinetycznej w naszym przypadku = końcowej energii kinetycznej cieczy w strudze /I' - II'/ mniej początkowa energia kinetyczna cieczy w strudze /I - II/.

Energję kinetyczną części /I' - II'/ możemy uważać jako sumę energii części /I' - II/ i części /II - II'/ . W podobny sposób energia kinetyczna części /I - II/ może być uważana jako suma energii części /I - I'/ i części /I' - II/.

Zatem zmiana en. kin. = en. kin. /I' - II/ + energia kinetyczna /II - II'/ - energia kinetyczna /I - I'/ - energia kinetyczna /I' - II/.

Ponieważ z a ł o ż y l i ś m y r u c h t r w a ł y , to jest taki, w którym cząstki cieczy, znajdujące się w części strugi /I' - II/, na

początku czasu  $dt$  i po czasie  $dt$ , będą miały podobne prędkości, więc energia kinetyczna /I' - II/ na początku czasu  $dt$  i po czasie  $dt$  będzie ta sama.

Możemy więc powiedzieć, że:

Zmiana energii kinetycznej = energii kinetycznej /II - II'/ - energia kinetyczna /I - I'/. Czyli, otrzymujemy rezultat taki, jak gdyby część cieczy, znajdująca się w strudze /I' - II/ udziału w ruchu nie brała, natomiast część /I - I'/ przeniosła się do /II - II'/.

Znajdźmy energję kinetyczną części /II - II'/.

Objętość cieczy, zawartej w tej części strugi jest:

$$df_2 \cdot ds_2$$

Jeżeli przez  $\gamma$  oznaczymy ciężar właściwy cieczy, wówczas ciężar cieczy /II - II'/ jest  $df_2 \cdot ds_2 \cdot \gamma$ , zaś masa jest

$$df_2 \cdot ds_2 \cdot \frac{\gamma}{g}$$

Ponieważ wszystkie cząstki cieczy w tej objętości mają prawie jednakową prędkość  $v_2$ , zatem energia kinetyczna tej cieczy =

$$df_2 \cdot ds_2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

W taki sam sposób znajdziemy energję kinetyczną cieczy, zawartej w strudze /I - I'/.

Objętość tej cieczy =  $df_1 \cdot ds_1$  ; masa

$$df_1 \cdot ds_1 \cdot \frac{\rho}{g} ; \text{ energja kinetyczna } = \\ = df_1 \cdot ds_1 \cdot \frac{\rho}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2}$$

Ostatecznie zmiana energii kinetycznej jest:

$$df_2 \cdot ds_2 \cdot \frac{\rho}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2} - df_1 \cdot ds_1 \cdot \frac{\rho}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2}$$

Ze względu na założoną ciągłość ruchu należy przyjąć, że  $df_2 \cdot ds_2 = df_1 \cdot ds_1$ .

A wtedy zmianę energii kinetycznej badanej cieczy możemy przedstawić w postaci:

$$df_1 \cdot ds_1 \cdot \rho \left( \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right).$$

Obliczamy teraz pracę sił, działających na daną część strugi podczas przesunięcia się jej z położenia /I - II/ do /I' - II'/.

Aby poznać te siły, wyobraźmy sobie, że badaną część strugi /I-II/ uwalniamy od otaczającej cieczy.

Jeśli badana struga po odrzuceniu otaczającej cieczy ma pozostać w takich samych, jak przed odrzuceniem, warunkach, należy przyłożyć odpowiednie

siły, któreby działając na całą powierzchnię rozpatrywanej strugi, wywierały to samo działanie, co i odrzucona ciecz. Będą to siły, które na zasadzie założenia o cieczy doskonałej winny być w każdym miejscu normalne do powierzchni. Jeśli, następnie, siły te odniesiemy do jednostki powierzchni, otrzymamy t.zw. ciśnienie hydrodynamiczne. Niech te ciśnienia w elementarnych polach  $df_1$  i  $df_2$  będą odpowiednio  $p_1$  i  $p_2$ ; następnie niech będą odpowiednie ciśnienia w różnych miejscach powierzchni bocznej. Wartość tych ciśnień będzie dla nas, jak zobaczymy, obojętna. Poza ciśnieniami, które warunkują istnienie sił powierzchniowych, są jeszcze siły objętościowe. Założyliśmy, że mamy do czynienia z cieczą ciężką, a więc na badaną część strugi cieczy działa siła ciężkości. Wreszcie przyjmijmy, że struga obraca się, jest zagięta, skutkiem czego możemy nie uwzględniać sił dośrodkowych, które, gdyby struga była o znacznej krzywiznie, należałoby, jako siły objętościowe, uwzględnić.

Mamy zatem siły, działające na obraną strugę: siły powierzchniowe i siłę ciężkości, jako objęto-

ciową. Znajdźmy pracę tych sił.

Parcie na pole  $df_1$ , od odrzuconej części strugi jest  $p_1 df_1$ , skierowane do wnętrza strugi badanej. Podczas przesunięcia się przekroju I na miejsce I' siła ta przejdzie drogę  $ds$ , w kierunku siły i wykona pracę:

$$p_1 df_1 \cdot ds,$$

Parcie na pole  $df_2$  jest  $p_2 df_2$  i jest skierowane do wnętrza strugi badanej. Podczas przesunięcia się punktu II na miejsce II', siła ta przejdzie drogę  $ds_2$  w kierunku wprost przeciwnym działaniu siły. Praca tu wykonana =  $- p_2 df_2 \cdot ds_2$ .

Parcia na powierzchnię boczną naszej strugi, jakkolwiek istnieją, pracy żadnej nie wykonują, gdyż parcia te są normalne do dróg, które zostaną opisane przez punkty przyłożenia parć.

Siła objętościowa - siła ciężkości - przy przesunięciu się strugi z /I - II/ do /I' - II'/ wykona taką samą pracę, jak kiedybyśmy element /I - I'/ przenieśli na miejsce /II - II'/, nie ruszając zupełnie części /I' - II/.

Niech środki pól  $df_1$  i  $df_2$  znajdują się na wysokościach  $H_1$  i  $H_2$  ponad dowolnie obraną

płaszczyzną poziomą.

Ciężar elementu /I - I'/ jest  $= df_1 \cdot ds \cdot \gamma$  ;  
taki sam będzie ciężar elementu /II - II'/. Pracę  
tej siły otrzymamy jako iloczyn z siły przez rzut  
drogi /od /I-I'/ do /II-II'// na kierunek siły. -  
Rzut ten  $= H_1 - H_2$

Zatem praca ciężaru  $df_1 \cdot ds \cdot \gamma$  jest  
 $df_1 \cdot ds \cdot \gamma \cdot (H_1 - H_2)$ .

Wszystkie prace są obliczone; możemy więc na-  
pisać równanie, wyrażające twierdzenie o zmianie  
energji kinetycznej.

$$df_1 \cdot ds \cdot \gamma \left( \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right) = p_1 \cdot df_1 \cdot ds -$$

$$- p_2 df_2 ds_2 + df_1 \cdot ds \cdot \gamma (H_1 - H_2)$$

albo po skróceniu przez  $df_1 \cdot ds \cdot \gamma$  , otrzymamy:

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + H_1 - H_2$$

Aby lepiej zaznaczyć treść tego równania, prze-  
nieśmy wyrazy, dotyczące położenia I na jedną stro-  
nę równania, pozostałe wyrazy na drugą; otrzymamy:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$



Równanie to, jak widzimy z przebiegu rozumowania, nie zależy od tego, gdzie obraliśmy przekrój II; moglibyśmy w tej samej strudze obrać jakiś inny przekrój III, w którym byłaby wysokość  $H_3$ , ciśnienie  $p_3$  i prędkość  $v_3$ . Wówczas otrzymane równanie mogłoby być rozszerzone dla przekroju III:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = H_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}, \text{ i t.d.} = \\ = \text{const. /52/}$$

Treść tego równania zawiera zapowiedziane twierdzenie Daniela Bernoulliego.

Aby łatwiej i prościej wypowiedzieć to twierdzenie, wprowadźmy kilka określeń, a więc:

$H_1, H_2, H_3, \dots$  będziemy nazywali wysokościami położenia różnych miejsc strugi nad obranym poziomem zasadniczym;

$\frac{p_1}{\gamma}, \frac{p_2}{\gamma}, \frac{p_3}{\gamma}$  - są to, jak wiemy, wysokości ciśnienia hydrodynamicznego w tych miejscach strugi; wreszcie

$$\frac{v_1^2}{2g}, \frac{v_2^2}{2g}, \frac{v_3^2}{2g} \text{ i t.d.}$$

są to wysokości, odpowiadające prędkościom  $v_1, v_2$

U<sub>5</sub> w tych samych miejscach strugi; nazwiemy je wprost wysokościami prędkości.

Wprowadzwszy powyższe określenia, wypowiemy twierdzenie w taki sposób:

Dla cieczy doskonałej, znajdującej się w ruchu trwałym, suma trzech wysokości: wysokości położenia, wysokości ciśnienia i wysokości prędkości jest wielkością stałą w każdym przekroju strugi cieczy.

119. Na zasadzie twierdzenia D. Bernoulli'ego możemy poznać stosunek między ciśnieniem hydrostatycznym a hydrodynamicznym.

Niech będzie naczynie, jak na rysunku, w którym ciecz znajduje się w ruchu trwałym.

Wyobraźmy sobie wewnątrz tej cieczy strugę w bliskości osi naczynia. Obieramy na tej strudze przekrój na wysokości  $h$  od poziomu nasadniczego, gdzie jest ciśnienie hydrodynamiczne  $p$  i prędkość