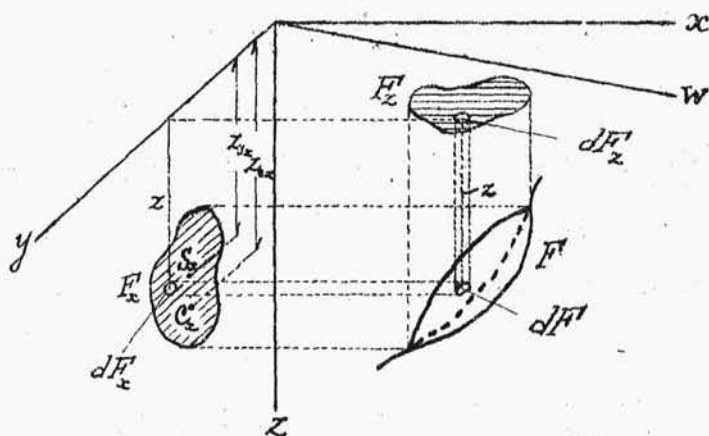


53. PARCIE CIECZY NA POWIERZCHNIĘ KRZYWĄ.

Niech będzie zadana dowolna powierzchnia krzywa o polu F' , stanowiąca część ścianki naczynia, napełnionego cieczą. Znaleźć parcie cieczy na pole F' . Osi współrzędnych przyjmijmy, jak zwykle: x i y , niech będą w płaszczyźnie poziomej, leżącej na swobodnej powierzchni, oś z niech będzie pionowa, zwrócona w dół.



rys.24.

Obierzmy którykolwiek element dF' na danej powierzchni F' . Niech element ten znajdował się na głębokości z pod swobodną powierzchnią. Ciśnienie cieczy w tym miejscu, gdzie się znajduje element dF' , niech będzie p . Ciśnienie to jest normalne do elementu dF' i zwrócone od cieczy na zewnątrz.

Parcie na obrany element $= dP = p \cdot dF'$, również jest do elementu normalne. Obierzmy inny element na powierzchni F' ; otrzymamy dla niego parcie, naogół mówiąc, nie tylko innej wartości, lecz i innego kierunku. Jeśli znajdziemy parcia na wszystkie elementy,

Parcie na obrany element $= dP = p \cdot dF'$, również jest do elementu normalne. Obierzmy inny element na powierzchni F' ; otrzymamy dla niego parcie, naogół mówiąc, nie tylko innej wartości, lecz i innego kierunku. Jeśli znajdziemy parcia na wszystkie elementy,

wchodzące w skład powierzchni F' , otrzymamy układ elementarnych paró o różnych kierunkach. Taki układ nie da się sprowadzić, ogólnie mówiąc, do jednej wypadkowej, lecz do dwóch sił mijających się, lub do jednej siły i pary sił. Zatem w danym przypadku nie można będzie mówić o wypadkowej paró elementarnych, ani też o środku ciśnienia.

54. Określmy bliżej działanie od strony cieczy na powierzchnię F' . Powiedzieliśmy już, że na dowolny element dF' , wzięty na głębokości Z pod swobodną powierzchnią, działa elementarne parcie

$$dP = p \cdot dF'$$

Ponieważ poszczególne parcia elementarne są różnych kierunków, więc możnaby je dodawać geometrycznie. Można też każde elementarne parcie rozłożyć w trzech kierunkach równoległych do osi x, y i Z i dopiero wtedy składowe jednokierunkowe dodawać; otrzymamy wówczas trzy wypadkowe równoległe odpowiednio do osi x, y, Z . Z tych trzech wypadkowych będzie łatwiej poznać działanie cieczy na powierzchnię.

Tą właśnie drogą postąpimy.

Elementarne parcie, jak widzieliśmy $dP = p \cdot dF'$.
Ponieważ $p = p_a + \gamma z$, więc $dP = (p_a + \gamma z) \cdot dF'$.

Rozłożmy to parcie w kierunku trzech osi, oznacza-

ję jego rzuty przez dP_x, dP_y, dP_z ; otrzymamy
 w kierunku osi $x \dots dP_x = (p_a + \gamma z) dF \cos(p, x)$
 " " " $y \dots dP_y = (p_a + \gamma z) dF \cos(p, y)$
 " " " $z \dots dP_z = (p_a + \gamma z) dF \cos(p, z)$

Kąt utworzony przez kierunek ciśnienia p i prz.
 osi x jest ten sam, co i kąt mierzący pochylenie
 płaszczyzny prostopadłej do kierunku p , a więc el-
 mentu dF i płaszczyzny prostopadłej do osi x , a
 więc płaszczyzny yz , co oznaczymy

$$\angle(p, x) = \angle(dF, yz);$$

w podobny sposób otrzymamy, że

$$\angle(p, y) = \angle(dF, xz)$$

oraz

$$\angle(p, z) = \angle(dF, xy)$$

Wówczas

$$\begin{aligned} dP_x &= (p_a + \gamma z) dF \cos(dF, yz) \\ dP_y &= (p_a + \gamma z) dF \cos(dF, xz) \\ dP_z &= (p_a + \gamma z) dF \cos(dF, xy). \end{aligned}$$

Ponieważ $dF \cos(dF, yz)$ jest rzutem dF na płasz-
 czynę yz , prostopadłą do osi x , możemy więc ozna-
 czyć, że

$$dF \cos(dF, yz) = dF'_x$$

w podobny sposób $dF \cos(dF, xz) = dF'_y$
 $dF \cos(dF, xy) = dF'_z$

Wtedy

$$dP_x = (p_a + \gamma z) dF'_x$$

$$dP_y = (p_a + \gamma z) dF'_y$$

$$dP_z = (p_a + \gamma z) dF'_z$$

Weźmy rzuty parcia na wszystkie inne elementy, tworzące powierzchnię F' , na oś x i dodamy je; otrzymamy wypadkową rzutów równoległych do osi x

$$P_x = \int (p_a + \gamma z) dF'_x = \int p_a dF'_x + \int \gamma z dF'_x = p_a F'_x + \gamma \int z dF'_x$$

W ostatnim wyrazie $\int z dF'_x$ jest sumą momentów rzutów elementarnych pól dF' na płaszczyznę yz względem osi y . Jeśli przez F'_x oznaczymy rzut całego pola F' na płaszczyznę yz , zaś przez z_{sx} odległość środka ciężkości rzutu pola F'_x od swobodnej powierzchni, wtedy możemy powiedzieć, że

$$\int z dF'_x = F'_x \cdot z_{sx}.$$

Wówczas

$$P_x = p_a F'_x + \gamma F'_x \cdot z_{sx} \quad \dots \dots \dots /23/$$

Gdybyśmy w ten sam sposób postępowali z rzutami w kierunku osi y , otrzymalibyśmy podobny wynik:

$$P_y = p_a F'_y + \gamma F'_y \cdot z_{sy} \quad \dots \dots \dots /23 a/$$

Dostrzeżemy łatwo, że rzut parcia pozostanie bez zmiany jakakolwiek będzie oś, względem której szuka-

my rzutu, byleby oś ta była w płaszczyźnie poziomej. Jeżeli obierzemy jakąkolwiek oś W w płaszczyźnie poziomej, wówczas i dla niej otrzymamy, zachowując poprzednie znakowanie:

$$P_w = p_a F'_w + \gamma F'_w z_{sw} \dots \dots \dots /23 \text{ b/}$$

Na zasadzie tego równania wypowiemy twierdzenie: rzut parcia na dowolną powierzchnię w kierunku jakiegokolwiek OSI POZIOMEJ jest równy ciśnieniu zewnętrznemu na rzut ciśnionego pola na płaszczyznę prostopadłą do obranej osi, zwiększonemu o ciężar słupa cieczy, którego podstawą jest wspomniany rzut, a wysokością odległość środka ciężkości tego rzutu od swobodnej powierzchni.

Łatwo zastosować powyższe równania do przypadku, kiedy na zadaną powierzchnię od zewnątrz działa ciśnienie, naprz. p_o . Wtedy:

$$P_w = (p_a - p_o) F'_w + \gamma F'_w z_{sw} \dots \dots \dots /24/$$

albo też w przypadku, z którym spotykać się będziemy bardzo często, kiedy $p_a = p_o$, wówczas:

$$P_w = \gamma \cdot F'_w \cdot z_{sw} \quad \dots \dots \dots /25/$$

55. Z przebiegu powyższego rozumowania wynika, że punkt, w którym rzut wypadkowej P_x, P_y , czy P_z przecnie płaszczyznę prostopadłą do x, y , czy do w , znajdziemy w taki sam sposób, jak to robiliśmy przy odnajdywaniu środka ciśnienia na pole płaskie, w danym razie, pionowe. Uskutecznimy to na podstawie równań /17/, /18/ lub /19/ oraz /20/, /21/ lub /22/.

Naprz. niech trzeba będzie znaleźć punkt, w którym rzut wypadkowego parcia P_x przecnie rzut pola F'_x ; dajmy na to w przypadku, kiedy $p_a = p_o$.

Korzystamy z równania /19/:

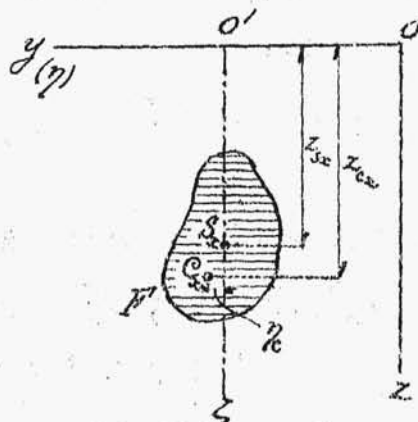
$$\zeta_c = \zeta_s + \frac{J_{z_o}}{F' \cdot \zeta_s},$$

gdzie trzeba przyjąć: $\zeta_c = z_{cx}$; $\zeta_s = z_{sx}$; J_{z_o} = mom. bezwład. pola F'_x względem osi równoległej do y , przechodzącej przez S_x ; $F' = F'_x$.

To jest jedna współrzędna punktu C_x ; drugą znajdziemy z równania /22/:

$$\eta_c = \frac{J_{y_o}}{F' \cdot \zeta_s},$$

przyczem należy rozumieć, że oś Z przechodzi przez



rys. 25.

środek ciężkości S_x pola F'_x i że wobec tego

J_{Sx} jest momentem środkowym pola F'_x względem osi ηZ .

W przypadkach, kiedy p_a samo lub p_a i p istnieją, należy stosować przytoczone wyżej

równania /17/, /18/ oraz /20/ i /21/.

56. Znajdźmy teraz wartość parcia w kierunku osi Z . Potraktowanie odpowiednich wielkości musi być inne, niż to było dla kierunku poziomego.

W art. /54/ otrzymaliśmy, że w kierunku osi Z działa składowa elementarnego parcia

$$dP_z = (p_a + \gamma z) dF'_z$$

Zbierzmy wszystkie parcia w tym samym kierunku, otrzymamy parcie wzdłuż osi Z :

$$P_z = \int (p_a + \gamma z) dF'_z = \int p_a dF'_z + \gamma \int z dF'_z$$

albo, inaczej:

$$P_z = p_a F'_z + \gamma \int z dF'_z$$

Co oznacza ostatnia całka $\int z.dF_z$. Dostrzeżemy to, jeśli zwrócimy uwagę na znaczenie $z.dF_z$. Wystawmy sobie w tym celu prostą równoległą do osi Z , która posuwając się po obrysie elementu dF , pozostaje stale do Z równoległą; prosta ta, poruszając się, utworzy powierzchnię cylindryczną, która na płaszczyźnie poziomej xy wytnie elementarne pole dF_z . W ten sposób otrzymamy elementarny walec o średniej wysokości Z i przekroju poprzecznym dF_z ; objętość takiego walca $z.dF_z$.

Wówczas $\int z.dF_z$ przedstawi nam sumę objętości elementarnych walców takich, jak powyższy, albo wprost daje nam objętość bryły, która opiera się na zadanej powierzchni F , jak na podstawie, z boków otoczona jest powierzchnią cylindryczną, u góry kończy się na poziomie swobodnej powierzchni cieczy.

Jeżeli tak opisaną objętość bryły oznaczymy przez V_F , wtedy $\int z.dF_z = V_F$ i ostatnie równanie przybierze postać:

$$P_z = p_a F + \gamma \cdot V_F \quad \dots \dots \dots /26/$$

Z równania tego wypływa twierdzenie: Rzut wypadkowego parcia na oś Z na daną powierzchnię F równa się ciśnieniu ze-

wnętrznemu na rzut powierzchni F na płaszczyznę poziomą xy , zwiększonemu o ciężar cieczy w objętości bryły cylindrycznej, opierającej się, jak na podstawie, na zadanej powierzchni F i sięgającej do swobodnej powierzchni cieczy.

Jeżeli od dołu na zadaną powierzchnię działa ciśnienie zewnętrzne p_0 , wówczas rzut wypadkowego parcia na oś Z

$$P_z = (p_a - p_0) F_z + \gamma \cdot V_F \quad \dots \dots \dots /27/$$

W przypadku, kiedy $p_a = p_0$, wówczas:

$$P_z = \gamma \cdot V_F \quad \dots \dots \dots /28/$$

57. Należy jeszcze bliżej określić, gdzie będzie linja działania znalezionego rzutu wypadkowego parcia. W przypadku najprostszym, kiedy P_z należy obliczyć według równania /28/ /w razie $p_a = p_0$ / widzimy, że parcie wypadkowe P_z składa się z parć elementarnych, z których każde jest, jak to wyżej otrzymaliśmy, proporcjonalne do objętości odpowiedniego elementarnego walca.

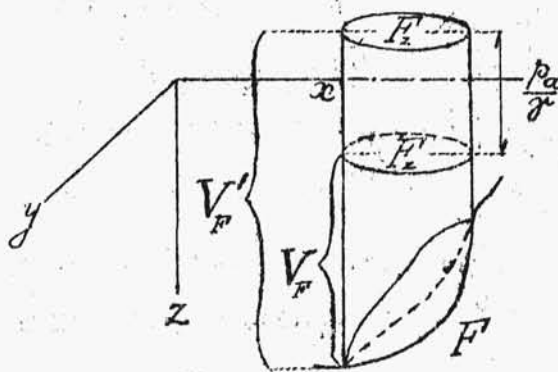
Zatem wypadkowe parcie powinno przejść przez śro-

dek ciężkości bryły, której objętość oznaczyliśmy przez V_F .

W przypadku, kiedy P_z wyznaczamy z równania /26/ lub /27/, należy wypadkową P_z traktować jako powstałą z dwóch sił: $p_a \cdot F_z$ [lub $(p_a - p_o) F_z$] oraz z siły γV_F . Pierwsza siła przechodzi przez środek ciężkości pola F_z , druga - przechodzi, jak wyżej powiedzieliśmy, przez środek ciężkości bryły γV_F , a linja działania wspólnej wypadkowej P_z określi się na zasadzie znanej ze statyki.

58. Równanie /26/ możemy przedstawić w takiej postaci:

$$P_z = \gamma \cdot F_z \cdot \frac{p_a}{\gamma} + \gamma V_F$$



rys. 26.

skąd wyczytamy, że rzut wypadkowego parcia w kierunku osi z równy jest ciężarowi dwóch brył: z nich jedna jest to walec, opierający się, jak na podstawie, na polu F_z i o

wysokości $\frac{p_a}{\gamma}$; druga bryła o objętości V_F jest już nam z poprzedniego dobrze znana. Dwie te bryły razem

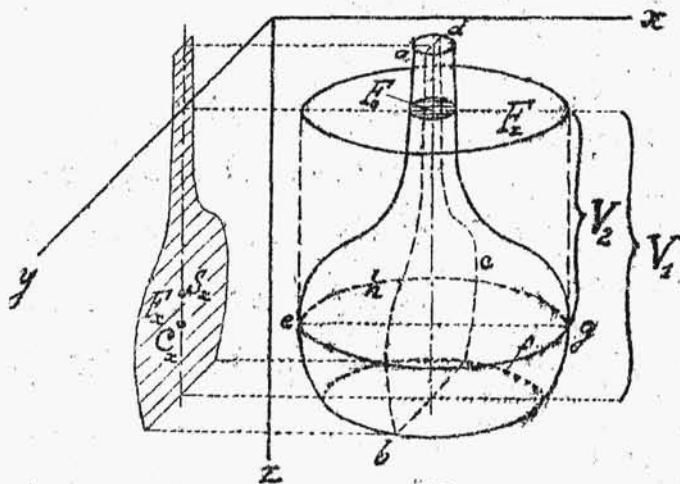
stanowią jedną V_F' , przypominającą bryłę o objętości V_F , lecz wydłużonej o wysokość $\frac{\rho_a}{\rho}$. Stąd też wnioskujemy, że rzut wypadkowej przejdzie przez środek ciężkości bryły V_F' , gdzie

$$V_F' = F_z \cdot \frac{\rho_a}{\rho} + V_F.$$

Takie same uwagi możemy zastosować i do równania /27/.

59. PRZYKŁAD 8.

Niech będzie jakiegokolwiek naczynie napełnione cieczą do pewnej wysokości. Znaleźć parcie cieczy na ścianki naczynia w kierunku poziomym. Obierzmy dowol-



rys. 27.

nie osi x, y tak jednak, aby znalazły się na swobodnej powierzchni cieczy. Jakie będzie parcie cieczy na naczynie w kierunku osi x ? Aby to

znaleźć, weźmy prostą równoległą do osi x i prowadźmy ją tak, aby stale dotykała powierzchni naczynia,