

prędkości unoszenia w odpowiednich przekrojach strugi. Zapamiętać należy, że te wysokości winny być o d j ę t e od odpowiednich stron równania.

Wynik ostatnio otrzymany znajdzie zastosowanie przy badaniu ruchu cieczy w pompach odśrodkowych, oraz w turbinach wodnych różnych systemów.

#### 128. TWIERDZENIE D. BERNOULLI'ego DLA CIECZY RZECZYWISTYCH.

Ciecz doskonała tem się zasadniczo różni od cieczy rzeczywistych, że nie posiada lepkości. Lepkość będzie tym czynnikiem, który zmusza nas do wprowadzenia pewnych zmian w równaniu, wyrażającym twierdzenie D. Bernoulli'ego, otrzymanem dla cieczy doskonałej.

Lepkość powoduje to, że poszczególne cząstki cieczy, znajdujące się w strudze, doznają od sąsiednich cząstek cieczy - w sąsiednich strugach - przeszkody w ruchu w postaci tarcia.

Skutkiem tego całkowite oddziaływanie na powierzchnię boczną strugi badanej od strony tej cieczy, którą odrzuciliśmy, już nie może być normalne do poszczególnych elementów bocznej po-

wierzchni, jak to było w cieczy doskonałej, lecz będzie od kierunku normalnego odchylone w stronę przeciwną ruchowi.

Jeżeli przy tych warunkach zechcemy zbadać ruch strugi elementarnej, stosując do niej twierdzenie o zmianie energji kinetycznej, jak to poprzednio czyniliśmy, wtedy należy przy obliczeniu pracy sił, działających na strugę, uwzględnić pracę owych oddziaływań.

Badając ciecz doskonałą, mogliśmy przyjąć, że oddziaływania te, mierzone ciśnieniami hydrodynamicznymi, były do przesunięć normalne i praca ich była równa zeru. Obecnie zaś, mając do czynienia z cieczą rzeczywistą, kiedy oddziaływania powyższe normalnemi nie są, możemy pracę tych oddziaływań wziąć w rachubę. Ze względu na kierunek oddziaływań do kierunku ruchu, praca ta będzie ujemna. Zatem równanie, które ma wyrażać twierdzenie o zmianie energji kinetycznej w zastosowaniu do strugi cieczy rzeczywistej, będzie następujące:

$$df_1 ds_1 \rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = p_1 df_1 ds_1 - p_2 df_2 ds_2 + \int df_1 ds_1 (H_1 - H_2) - E.$$

Ostatni wyraz  $E$  ma oznaczać właśnie pracę,

wykonaną, powiedzmy wprost, przez tarcie na powierzchni bocznej podczas przesunięcia się strugi w elemencie czasu  $dt$ .

Powyzsza praca  $E$  jest tem wieksza, im wieksza jest boczna powierzchnia strugi i im wieksza bedzie lepkość cieczy. Zrozumiakem stad tez bedzie, że  $E$  bedzie tem wieksze, im dalej beda wziete przekroje 1 i 2, ograniczające badaną część strugi. Ostatnie równanie możemy uprościć, dzieląc, jak poprzednio, obie strony przez  $df, ds, \gamma$  wówczas otrzymamy:

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + H_1 - H_2 - \frac{E}{\gamma \cdot df \cdot ds},$$

albo

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{E}{\gamma \cdot df \cdot ds},$$

Ostatni wyraz winien być jednorodny z pozostałemi, wchodzącemi w równanie. Ponieważ wszystkie te wyrazy oznaczają w y s o k o ś c i, zatem i ostatni wyraz też musi być uważany jako pewna wysokość. Oznaczmy ją przez  $(h_t)_1^2$ , gdzie znaczek  $t$  winien przypominać, że to jest wysokość stracona na pokonanie tarcia przede wszystkim, a jak później się przekonamy, i na inne opory, liczby zaś 1, 2 mają przypominać, że to dotyczy oporów na odległos-

oi 1-2.

Nówczas otrzymane równania, wypowiadające twierdzenie D. Bernoulli'ego, w postaci:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + (h_{t1})^2 \dots \dots \dots /53/$$

Zwrócić należy uwagę, że wyraz  $(h_{t1})^2$  jest dodany do tej strony równania, która dotyczy p ó ł n i e j s z e g o p o ł o ż e n i a cząstki w strudze cieczy.

Jeżelibyśmy badali część strugi cieczy rzeczywistej między przekrojami 1 i 3, moglibyśmy napisać równanie powyższe w postaci:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + (h_{t1})^3$$

Badając część strugi między przekrojami 2-3, zastosujemy równanie:

$$H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = H_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + (h_{t2})^3 \dots \text{i tak dalej.}$$

Jeżeliby ciecz poruszała się w strudze w kierunku przeciwnym, naprz. od przekroju 3 do przekroju 2, wtedy należałoby ułożyć równanie w taki sposób:

$$H_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + (h_{t3})^2$$

Jedną z trudniejszych spraw w zastosowaniach

praktycznych jest dokładne obliczenie wysokości  $h_t$ , gdyż ta zależy od wielu przytem nieuchwytnych rachunkowo własności cieczy rzeczywistej.

Zazwyczaj wysokość  $h_t$  będziemy wyrażali jako funkcję prędkości  $v$  i najczęściej w postaci:

$$k \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

129. Poprzednio wskazana została droga, którą należy postępować, jeśli w trakcie rozwiązywania zagadnienia mamy uwzględnić warunek, że ciecz jest rzeczywista. Niekiedy postępować będziemy odmiennie: zagadnienie pewne, dotyczące cieczy rzeczywistej, rozwiążemy dla cieczy doskonałej, co ożęsto sprawę bardzo uprości. Otrasymany wynik teoretyczny, który, oczywiście, zastosowania wprost nie będzie mógł znaleźć, poprawiamy, wprowadzając odpowiednie współczynniki praktyczne, które znajdujemy, porównyując wynik teoretyczny z rezultatami doświadczenia.

130. Równanie D. Bernoulli'ego, otrzymane poprzednio dla bardzo cienkiej strugi cieczy rzeczywistej, wymagać będzie pewnej poprawki, skoro tylko zechcemy równanie to zastosować do strumienia cieczy rzeczywistej o znacz-

niejszym przekroju poprzecznym. Ciecz rzeczywista, płynąc jakimkolwiek przewodem, doznaje przeszkód w ruchu skutkiem tarcia o ścianki przewodu. Najwięcej odczuwają działanie ścianek cząstki strumienia, płynące tuż przy ściankach; cząstki te, dzięki lepkości cieczy, oddziałują na sąsiednie cząstki, te na następne i t.d.; im cząstka będzie dalej od ścianki, tem mniej będzie odczuwany wpływ ścianek. Wynik stąd będzie ten, że cząstki w danym przekroju strumienia płyną z różnemi prędkościami: najmniejszymi przy ściankach przewodu i coraz większemi w miarę coraz większej odległości od ścianek przewodu.

W wielu zagadnieniach hydraulicznych niema potrzeby liczenia się z różnemi wartościami prędkości w różnych punktach danego przekroju; wystarcza nieraz przyjąć, że wszystkie cząstki w danym przekroju strumienia mają jakby jednakową prędkość, którą nazywamy prędkością średnią. Prędkość ta winna czynić zadość następującemu warunkowi: ilość cieczy, która przez dany przekrój strumienia rzeczywiście przepływa, posiadając prędkości różne w różnych miejscach przekroju, jest taka sama, jak gdyby ciecz płynęła przez dany przekrój z tą właś-

nie prędkością średnią, jednakową we wszystkich punktach przekroju. Matematycznie ujmemy ten warunek w taki sposób: niech  $dF'$  będzie dowolnym elementem pola przekroju  $F'$  strumienia; w elemencie tym niech będzie prędkość cieczy  $v$ ; wówczas ilość cieczy, przepływającej w jednostkę czasu przez ten element  $= v \cdot dF'$ . Zróbmy takie samo obliczenie dla wszystkich elementów pola przekroju  $F'$ , wówczas całkowita ilość cieczy płynącej w danym strumieniu  $= \int_{F'} v \cdot dF'$ , gdzie całka winna obejmować całe pole  $F'$  przekroju.

Oznaczmy średnią prędkość przez  $v_3$ ; wówczas ilość cieczy przepływającej w strumieniu w jednostkę czasu, otrzymamy:  $F' \cdot v_3$

Na podstawie określenia prędkości średniej winno zatem być:

$$\int_{F'} v \cdot dF' = v_3 F' ,$$

a stąd

$$v_3 = \frac{\int v \cdot dF'}{F'}$$

Prędkość rzeczywista w różnych punktach przekroju, jak mówiliśmy, będzie różnić się od prędkości średniej. Możemy przeto pisać:  $v = v_3 + \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon$  oznacza pewne wielkości dodatnie lub ujemne.



różne w różnych miejscach przekroju. Z określenia prędkości średniej wynika, że:

$$\int_{F'} (v_s + \varepsilon) \cdot dF' = v_s F' ,$$

albo

$$\int_{F'} v_s \cdot dF' + \int_{F'} \varepsilon \cdot dF' = v_s F' ;$$

ponieważ

$$\int_{F'} v_s \cdot dF' = v_s \int_{F'} dF' = v_s F' ,$$

więc wielkości  $\varepsilon$  winny czynić zadość warunkowi, że:

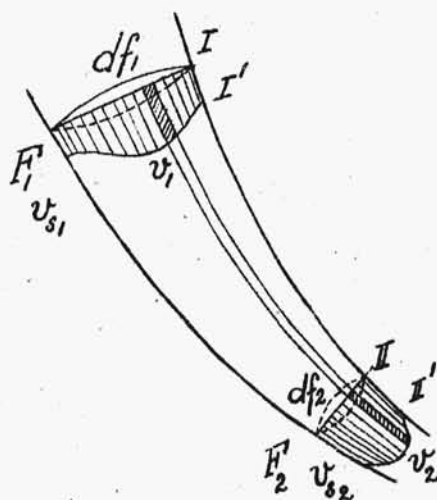
$$\int_{F'} \varepsilon \cdot dF' = 0$$

131. Rozpatrzmy teraz, jak się wyrazi twierdzenie D. Bernoulli'ego, jeśli będziemy badali ruch cieczy rzeczywistej, płynącej szerokim strumieniem, kiedy zatem w różnych punktach jednego i tego samego przekroju poprzecznego będą różne prędkości.

Przypuśćmy, że mamy tu do czynienia z ruchem trwałym i ciągłym.

Postępować będziemy tak samo, jak to uczyniliśmy przy badaniu ruchu nieskończenie cienkiej strugi: obieramy część strumienia, zawartą między przekrojem I i II o polach  $F_1$  i  $F_2$ ; po czasie  $dt$  cząstki,





rys. 81.

Zmiana energii kinetycznej cieczy między przekrojami I i II w czasie  $dt$  będzie równać się /w przypadku ruchu trwałego/:

$$\left[ \text{energji kinetycznej wziętej między przekro-} \right. \\ \left. \text{jami /II - II'/} \right] - \left[ \text{energja kinetyczna, wzię-} \right. \\ \left. \text{ta między przekrojami /I - I'/} \right]$$

Energję kinetyczną cieczy między przekrojami /II - II'/ znajdziemy w taki sposób: dzielimy pole  $F_2$  na d o s t a t e c z n i e małe pólka  $df_2$ ; niech tutaj cząstki posiadają prędkość  $v_2$ . W czasie  $dt$  cząstki przejdą drogę  $v_2 dt$ . Masa elementarnej strugi o przekroju  $df_2$ , stano-

będące w przekroju I, płynąc z r ó ż-  
n e m i prędkoś-  
ciami, znajdują się  
na pewnej po-  
wierzchni krzywej  
I'; jednocześnie  
cząstki, które były  
w przekroju II,  
znają się po cza-  
sie  $dt$  na po-  
wierzchni II'.

wiaćcej tylko część strumienia zawartego między /II - II'/, będzie:  $\frac{v_2 \cdot dt \cdot df \cdot r}{g}$ , a energia kinetyczna tej części będzie:  $v_2 \cdot dt \cdot df_2 \cdot \frac{r}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2}$

W takim razie energia kinetyczna strumienia, zawartego między płaszczyzną II i powierzchnią II' otrzyma się jako:

$$\int_{F_2} v_2 \cdot dt \cdot df_2 \cdot \frac{r}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2},$$

gdzie całka jest rozszerzona na całe pole  $F_2$ .

Czas  $dt$  jest dla wszystkich elementarnych strug jednakowy; zatem ostatnia całka może być tak napisana:

$$\frac{r}{2g} dt \int_{F_2} v_2^3 \cdot df_2.$$

Oznaczmy średnią prędkość cieczy w przekroju II o polu  $F_2$  przez  $v_{s2}$ . Ponieważ prędkość  $v_2$ , wzięta w dowolnym punkcie przekroju  $F_2$  jest wielkością różną, możemy, zgodnie z tem, jak postąpiliśmy w poprzednim artykule, napisać, że:

$$v_2 = v_{s2} + \varepsilon;$$

Zatem

$$\int_{F_2} v_2^3 \cdot df_2 = \int_{F_2} (v_{s2} + \varepsilon)^3 \cdot df_2;$$

po otworzeniu nawiasów mamy:

$$\int_{F_2} v_{s_2}^3 \cdot df_2 + \int_{F_2} 3 v_{s_2}^2 \cdot \varepsilon \cdot df_2 + \int_{F_2} 3 v_{s_2} \cdot \varepsilon^2 \cdot df_2 + \int_{F_2} \varepsilon^3 \cdot df_2.$$

Ponieważ  $v_{s_2}$  jest wielkością stałą dla wszystkich elementarnych strug, więc poprzednie wyrażenie przybierze postać:

$$v_{s_2}^3 \int_{F_2} df_2 + 3 v_{s_2}^2 \int_{F_2} \varepsilon df_2 + 3 v_{s_2} \int_{F_2} \varepsilon^2 df_2 + \int_{F_2} \varepsilon^3 df_2$$

albo, ponieważ zgodnie z poprzednim artykułem,

$$\int_{F_2} \varepsilon \cdot df_2 = 0, \text{ więc ostatni wielomian będzie:}$$

$$v_{s_2}^3 \cdot F_2' + 3 v_{s_2} \int_{F_2} \varepsilon^2 df_2 + \int_{F_2} \varepsilon^3 df_2.$$

Wracając teraz do otrzymanej wyżej wartości energii kinet. części strumienia, zawartego między II i II', i uwzględniając ostatnie wyrażenie, znajdziemy, że szukana energia kinetyczna:

$$\frac{x}{2g} dt \int_{F_2} v_{s_2}^3 df_2 = \frac{x}{2g} dt \left[ v_{s_2}^3 F_2' + 3 v_{s_2} \int_{F_2} \varepsilon^2 df_2 + \int_{F_2} \varepsilon^3 df_2 \right].$$

Wyraz zawarty w nawiasie jest większy, niż  $v_{s_2}^3 F_2'$ , możemy zatem napisać zamiast nawiasu wyraz  $\alpha v_{s_2}^3 F_2'$ , gdzie  $\alpha > 1$  i zależy od tego, w jaki sposób zmie-

niają się prędkości w różnych punktach tego samego przekroju. Dla współczynnika  $\alpha$ , tu wprowadzonego, przyjmuje się często wartość 1,1; w rurkach włoskowatych może przybrać wartość 2 i nieraz więcej, zależnie od chropowatości ścian.

Otrzymujemy więc, że energia kinetyczna części strumienia, zawartego między II i II' =

$$= \gamma \cdot dt \cdot \frac{v_{s2}^3}{2g} \cdot F_2', \text{ albo } = \gamma \cdot dt \cdot F_2' \cdot v_{s2} \cdot \frac{\alpha v_{s2}^2}{2g}$$

W podobny zupełnie sposób znajdziemy energję kinetyczną cieczy, zawartej w strumieniu między I i I'; energia ta =  $\gamma \cdot dt \cdot F_1' \cdot v_{s1} \cdot \frac{\alpha v_{s1}^2}{2g}$ ,

gdzie  $v_{s1}$  oznacza **s r e d n i ą** prędkość w przekroju I o polu  $F_1'$ .

Ponieważ rozkład prędkości w przekroju  $F_1'$  i  $F_2'$  mogą być różne, zatem mogą też być różne i współczynniki  $\alpha$  w tych przekrojach. Uwidocznimy to, oznaczając współczynnik ten dla przekroju I przez  $\alpha_1$ , a dla II przekroju przez  $\alpha_2$ .

Mamy zatem, że **z m i a n a** energji kinetycznej strumienia między I i II przekrojem w czasie  $dt$  będzie się równać:

$$\gamma dt \cdot F_2 \cdot v_{s2} \cdot \frac{\alpha_2 v_{s2}^2}{2g} - \gamma dt \cdot F_1 \cdot v_{s1} \cdot \frac{\alpha_1 v_{s1}^2}{2g}.$$

Jeśli uwzględnimy, że ruch cieczy w strumieniu jest ciągły, będziemy mieli, że  $F_1 \cdot v_{s1} = F_2 \cdot v_{s2}$ , zatem powyższa zmiana energii

$$= \gamma dt \cdot F_2 \cdot v_{s2} \left( \frac{\alpha_2 v_{s2}^2}{2g} - \frac{\alpha_1 v_{s1}^2}{2g} \right).$$

Gdybyśmy następnie obliczyli sumę prac wykonanych w czasie  $dt$  przez siły zewnętrzne, przyłożone do cząstek strumienia między przekrojami I i II i przyrównali tę sumę do znalezionej poprzednio zmiany energii kinetycznej i dokonali wreszcie odpowiednich redukcji, otrzymaliśmybyśmy równanie D. Bernoulli'ego podobne do poprzedniego z tą różnicą, że zamiast prędkości cząstek w danych przekrojach, mieliśmy prędkości średnie, wprowadzone z pewną poprawką.

Równanie to będzie miało kształt:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_{s1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_{s2}^2}{2g} + \sum_i h_t.$$

W następstwie, dla uproszczenia pisania, będziemy oznaczali prędkości średnie

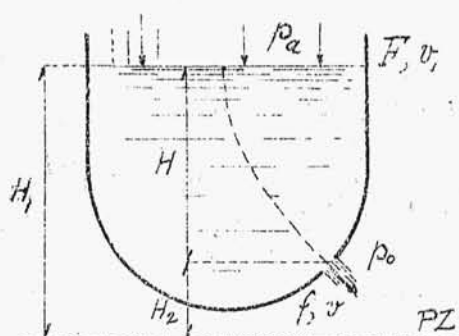
w przekrojach I i II strumienia wprost przez  $v_1$  i  $v_2$  i wówczas równanie D. Bernoulli'ego napiszemy:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_t$$

### WYPŁYW CIECZY PRZEZ OTWORY.

132. Niech będzie naczynie ,napełnione cieczą ciężką do pewnej wysokości. Niech poziom cieczy będzie stały. W ścianie naczynia mamy otwór o niewielkiem polu  $f$ .

Znaleźć prędkość wypływu i wydatek wody w jednostce czasu.



rys. 82.

le o przekroju  $F$  i ciśnienie zewnętrzne  $p_a$ ; koniec strugi niech będzie w otworze  $f$ , którego

Przypuśćmy, że na razie mamy ciecz doskonałą. Wyobraźmy sobie strugę bardzo cienką, która się zaczyna na swobodnej powierzchni, będącej na wysokości  $H$ , nad poziomem zasadniczym; mamy tu po-