

Wartość tego wyrażenia wykryjemy w taki sposób: niech 1-y wyraz będzie A , drugi B , wtedy:

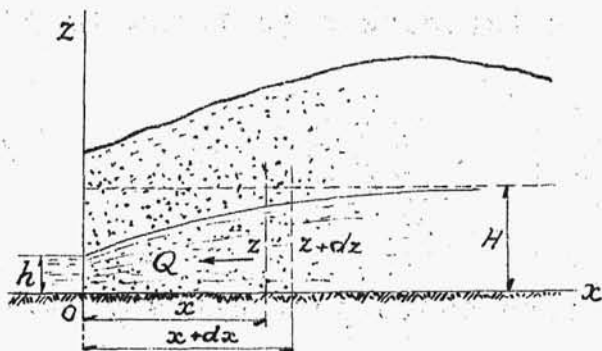
$$x = A \cdot B = \frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{AB}}, \text{ a to się sprowadza do } \frac{0}{0},$$

zatem istotna wartość znajdzie się, jeśli weźmiemy:

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right] : \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{AB} \right)$$

Jak widzimy, znalezienie wartości x jest możliwe, ale związane ze znaczną stratą czasu. Lepiej będzie otrzymać szukane równanie, rozwiązując zadanie bezpośrednio.

270. Zatem treść zadania będzie taka:



rys. 175

Woda w głębina w ilości $Q \frac{m^3}{sek}$ stale przypływa do rowu o długości b i głębokości h .

Znaleźć równanie zwierciadła wody, kiedy powierzchnia

warstwy nieprzepuszczalnej jest pozioma.

Prędkość przepływu w przekroju odległym x od O niech będzie v ; $v = k \cdot \frac{dz}{dx}$. Przekrój warstwy wodonośnej = $b \cdot z$; użyteczny przekrój = $\varphi b z$; zatem wydatek wody =

$$= Q = \varphi \cdot b \cdot z \cdot k \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{stad:}$$

$$Q dx = \varphi \cdot b \cdot k \cdot z \cdot dz , \quad \text{albo: } z \cdot dz = \frac{Q}{\varphi \cdot b \cdot k} \cdot dx$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\frac{z^2}{2} = \frac{Q x}{\varphi \cdot b \cdot k} + C$$

Do wyrugowania C skorzystamy z warunku, że zwierciadło wody przy samym rowie, a więc przy $x = 0$ ma rzędną = h ,

zatem $\frac{h^2}{2} = C$, ostateczne więc równanie przybierze postać:

$$z^2 - h^2 = \frac{2 Q x}{\varphi b k} \dots \dots \dots (9)$$

Jest to równanie paraboli.

Takie , właściwie, równanie powinniśmy otrzymać z równania /8/ po odpowiednich przeliczeniach.

271. Z równania /9/ możemy obliczyć, jak daleko sięga zmiana zwierciadła pierwotnego. Zwierciadło pierwotne niech będzie poziome, t.j. równoległe do osi x . Rzędne zwierciadła pierwotnego niech będą

$= H$. Podczas ruchu wody w gruncie zwierciadło podlega odkształceniu, t. zwanej depresji.

Największa depresja będzie przy rowie; im dalej od rowu, tem depresja mniejsza. Niech w odległości L od rowu depresja już ginie, czyli że rzędna zwierciadła odkształconego $Z = H$. Wtedy otrzymamy:

$$H^2 - h^2 = \frac{2QL}{\varphi \cdot b \cdot k} \dots \dots \dots (10)$$

272. Możemy z tego równania skorzystać, aby znaleźć wydatek wody, spływającej do rowu przy zaobserwowanych wielkościach L i H :

$$Q = \varphi \cdot b \cdot k \cdot \frac{H^2 - h^2}{2L} \dots \dots \dots (11)$$

Gdyby dopływ był dwustronny, wówczas wydatek Q byłby podwojony. Właściwie mówiąc, moglibyśmy wyznaczyć Q niekoniecznie przy znajomości H i L ; można by otrzymać Q , gdybyśmy zmierzyli Z dla dowolnego x ; wówczas z równania /9/ mielibyśmy:

$$Q = \varphi \cdot b \cdot k \cdot \frac{z^2 - h^2}{2x}$$

273. Rozpatrzmy teraz zagadnienie, jak się przedstawia sprawa w razie ruchu wody wglębnej do studni

H ponad warstwą nieprzepuszczalną. Oś X obieramy poziomo, zaś oś Z wzdłuż osi studni, której promień niech będzie r . Wydatek wody niech będzie Q . W przekroju cylindrycznym o promieniu x i wysokości

Z woda płynie ku studni ze wszystkich stron z prędkością $v = k \cdot \frac{dz}{dx}$. Przekrój użyteczny przepływu

$$= \varphi \cdot z \cdot 2\pi \cdot x \quad . \text{ Zatem wydatek}$$

$$Q = \varphi \cdot z \cdot 2\pi \cdot x \cdot k \frac{dz}{dx} \quad , \text{ albo inaczej}$$

$$\frac{Q \cdot dx}{x} = 2\pi \varphi k \cdot z \cdot dz \quad , \text{ albo jeszcze inaczej:}$$

$$z \cdot dz = \frac{Q}{2\pi \varphi k} \cdot \frac{dx}{x} \quad . \text{ Scałkujemy to równanie:}$$

$$\frac{z^2}{2} = \frac{Q}{2\pi \varphi k} \cdot \log_e x + C \quad .$$

Przypuścimy, że opór

siatki, tworzącej ściankę studni, jest nieznaczący i dlatego przyjąć możemy, że zwierciadło wody w gruncie przy siatce jest takie samo, jak w studni. Ten warunek pozwoli wyrugować stałą C : mianowicie, kiedy

$$x = r \quad , \text{ wówczas } z = h \quad .$$

Zatem

$$\frac{h^2}{2} = \frac{Q}{2\pi \varphi k} \cdot \log_e r + C; \text{ stąd } C = \frac{h^2}{2} - \frac{Q}{2\pi \varphi k} \cdot \log_e r$$

$$i \quad \frac{z^2}{2} = \frac{Q}{2\pi\varphi k} (\log_n x - \log_n r) + \frac{h^2}{2}, \text{ albo}$$

$$z^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi\varphi k} \log_n \frac{x}{r} \dots\dots\dots (12).$$

Równanie ostatnie daje nam krzywą, którą otrzymamy przy przecięciu powierzchni leja depresyjnego z płaszczyzną rysunku. Krzywa ta jest linią logarytmiczną.

274. Odległość, na której już depresja zwierciadła nie da się odczuwać, znajdziemy z warunku, że, kiedy $z = H$, wówczas $x = R$, gdzie R jest właśnie odległością szukaną:

$$H^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi\varphi k} \log_n \frac{R}{r}; \quad \text{stąd znajdziemy } R :$$

$$(H^2 - h^2) \frac{\pi\varphi k}{Q} = \log_n \frac{R}{r}; \quad \frac{R}{r} = e^{\frac{\pi\varphi k}{Q}(H^2 - h^2)}, \text{ wreszcie}$$

$$R = r \cdot e^{\frac{\pi\varphi k}{Q}(H^2 - h^2)}.$$

275. Również znaleźć możemy wydatek wody Q o ile założymy, że R jest znane:

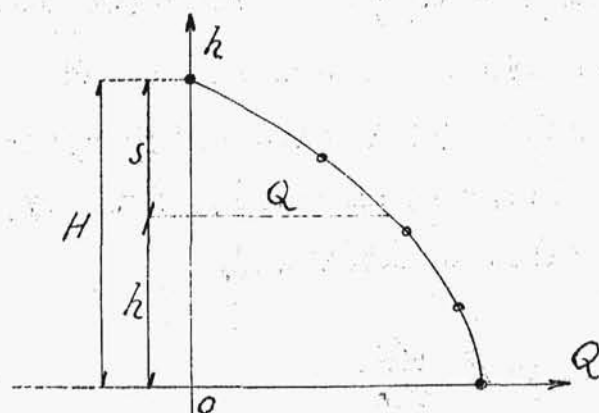
$$Q = \pi\varphi k \frac{H^2 - h^2}{\log_n \frac{R}{r}} \dots\dots\dots (13).$$

Z równania /13/ możemy znaleźć zależność między Q depresją, t.j. spadkiem δ zwierciadła w studni

przy pozostałych jednakowych warunkach. Z rysunku widzimy że $h + s = H$, zatem $h = H - s$; wówczas

$$Q = \pi \varphi k \frac{H^2 - (H-s)^2}{\log_n \frac{R}{r}} = \pi \varphi k \frac{2Hs - s^2}{\log_n \frac{R}{r}},$$
 zatem możemy napisać w skróceniu, że $Q = \zeta(2Hs - s^2)$, gdzie ζ jest dla danego przykładu wielkością prawie stałą.

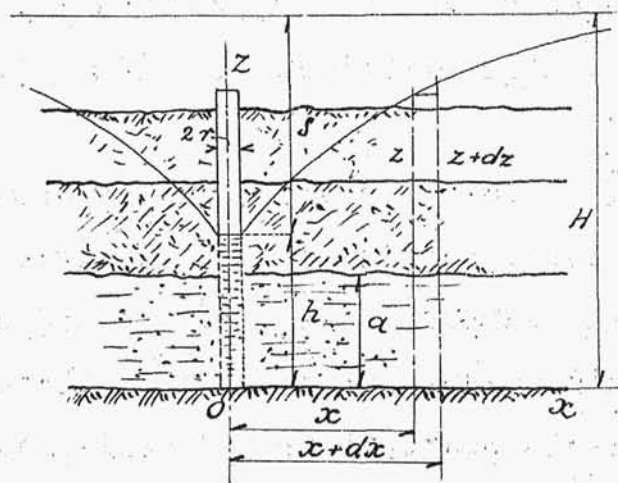
Właściwie $\log_n \frac{R}{r}$ zmieniać się będzie jednocześnie ze zmianą depresji, gdyż ze zmianą h zmienia się R jednak zmiana wartości $\log_n R$ postępuje znacznie powolniej, niż zmiana wartości R . Dlatego też, jako dostateczne dla praktyki przybliżenie, możemy uważać, że $\log_n \frac{R}{r}$ jest prawie stały. Wówczas zależność między Q i s - wyrazi się linią paraboliczną z równania: $Q = \zeta(2Hs - s^2)$.



rys. 177

Kształt takiej linii jest pokazany obok. Doświadczenia wskazują, że w wielu wypadkach zależność, jaką otrzymujemy drogą teoretyczną, pokrywa się zaobserwowanymi wynikami.

276. Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy woda w warstwie wodonośnej znajduje się pod ciśnieniem.



rys. 178.

Niech będzie, jak na rysunku warstwa wodonośna o miąższości α , zawarta między dwiema powierzchniami nieprzepuszczalnymi dla wody. W odległości x od osi powierzchni cylindrycznej, przez którą przepływa woda, dążąca do studni

jest równa $2\pi \cdot x \cdot \alpha$. Użyteczny przekrój dla przepływu wody $= 2\pi x \cdot \alpha \cdot \varphi$. Prędkość warunkowana jest spadkiem wyobraźnego zwierciadła wody którebyśmy otrzymali, gdyby woda w głębinie nie była przykryta warstwą nieprzepuszczalną. Powiemy, że $v = k \frac{dz}{dx}$. Zatem wydatek wody

$$Q = 2\pi \cdot x \cdot \alpha \cdot \varphi \cdot k \cdot \frac{dz}{dx}$$

stad $dz = \frac{dx}{x} \cdot \frac{Q}{2\pi \cdot \alpha \cdot \varphi \cdot k}$. Po scałkowaniu

$$z = \log_n x \cdot \frac{Q}{2\pi \cdot a \cdot \varphi \cdot k} + C$$

Stałą całkowania wyru-
gujemy z warunku , że przy $x=r$, $z=h$, a więc

$$h = \log_n r \cdot \frac{Q}{2\pi \varphi k \cdot a} + C , \quad \text{zatem}$$

$$z = \log_n x \cdot \frac{Q}{2\pi \varphi k a} + h - \log_n r \cdot \frac{Q}{2\pi \varphi k a} , \quad \text{albo}$$

$$z = h + \frac{Q}{2\pi \varphi k a} \cdot \log_n \frac{x}{r} \dots \dots \dots (14)$$

Jest to równanie krzywej linii ciśnień w warstwie wo-
donośnej.

277. Jeżeli wprowadzimy w równanie wartości R i H [R = odległości od osi studni do miejsca, gdzie depresja już się nie wyczuwa i H = wysokości ciśnienia przy wodzie w spoczynku], otrzymamy:

$$H = h + \frac{Q}{2\pi \cdot \varphi \cdot a \cdot k} \cdot \log_n \frac{R}{r} .$$

278. Stąd możemy znaleźć Q :

$$Q = 2\pi \cdot \varphi \cdot a \cdot k \cdot \frac{H - h}{\log_n \frac{R}{r}} \dots \dots \dots (15)$$

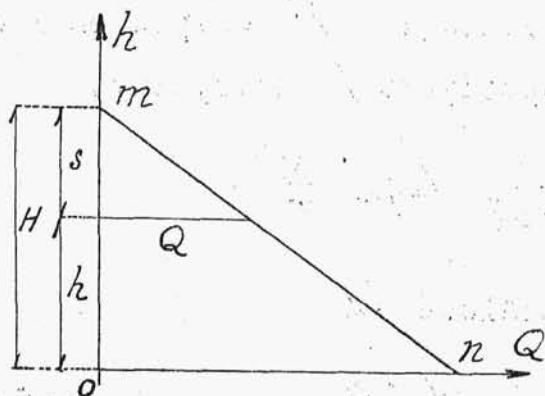
Ponieważ $H - h = s$ /depresja/, więc możemy

napisać:

$$Q = 2\pi\varphi a k \frac{s}{\log_n \frac{R}{r}} = \frac{2\pi\varphi a k}{\log_n \frac{R}{r}} \cdot s = \zeta \cdot s.$$

Z tego równania wynika, że wydatek wody artezyjskiej jest wprost proporcjonalny do wielkości depresji.

W rzeczywistości ta zależność może być w pewnym stopniu odmienna, a to skutkiem tego, że nie uwzględnialiśmy oporów, które woda spotyka podczas przejścia przez ścianki studni. Jeśli te opory są bardzo małe same przez się lub w porównaniu z oporami w warstwie wodonośnej, to zależność teoretyczna, poprzednio otrzymana, potwierdza się obserwacją rzeczywistych studni; w razie, gdyby tak nie było, trzeba wysokość poprawić o przypuszczalne opory przez ściankę.



rys. 179

Zależność między wydatkiem studni artezyjskiej a depresją, otrzymana z równania

$$Q = \zeta \cdot s,$$

może być przedstawiona wykreślnie prostą mn w osiach OQ i oh .

279. Nieraz w przypadku, poprzednio rozpatrzonym, zdarzyć się może, że przy bardzo znacznym wydatku wody ze studni zwierciadło wody obniży się niżej niż górna powierzchnia warstwy nieprzepuszczalnej.

Zagadnienie w tym razie da się rozwiązać, określając krzywą zwierciadła wody z początku w warstwie wodonośnej do tego miejsca, dokąd krzywa zwierciadła nie przetnie górnej warstwy nieprzepuszczalnej -tak, jak to robiliśmy przy studniach ze swobodnem zwierciadłem; poczynszy od tego miejsca, zwierciadło wody już nie będzie swobodne i wystąpi dla dalszej części jako krzywa ciśnień w strumieniu wody artezyjskiej.

Wydatek wody będzie wzrastał proporcjonalnie do depresji - i linja wydatku będzie linją prostą. Jeśli depresję powiększymy poniżej warstwy nieprzepuszczalnej, zależność między Q i s otrzyma się jako linja krzywa - jako parabola. Odwrotnie, przejście kształtu linji (Q, s) z linji prostej na krzywą wskazuje na opadnięcie zwierciadła poniżej warstwy nieprzepuszczalnej.

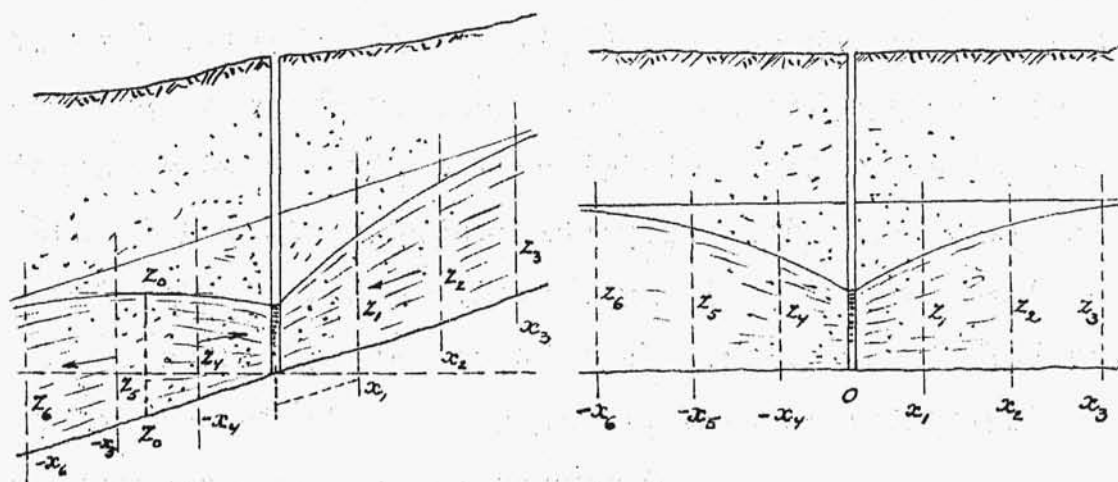
280. Rozwiązywanie zagadnień, poprzednio rozpatrywanych, a dotyczących ruchu wody w gruncie do studni bądź zwykłej, bądź artezyjskiej, były oparte, między innymi, na tem założeniu, że warstwa nieprzepuszczalna, po której woda płynie, jest pozioma i że pierwotne zwierciadło jest również poziome. W tych przypadkach powierzchnia zwierciadła wody względnie powierzchnia ciśnień, podczas ruchu wody, są powierzchniami obrotowymi, których tworzące właśnie są temi krzywymi, jakie poprzednio z równań otrzymaliśmy. Te powierzchnie obrotowe mają osi pionowe.

Inaczej się przedstawi sprawa tych powierzchni, jeśli warstwa nieprzepuszczalna będzie miała pochyłość, dzięki której woda w gruncie już sama przez się jest w ruchu, zaś działanie studni, ruch ten w pewien sposób zmienia; odwrotnie ruch wody do studni jest w dużym stopniu uzależniony od ruchu pierwotnego, kiedy studnia nie była czynną. Obecnie już nie będzie można twierdzić, że dopływ wody do studni zachodzi ze wszystkich kierunków jednakowo. Można jednak z góry przewidzieć, że dopływ wody do studni będzie największy z tej strony, skąd płynie woda powie-
s "zgóry", najmniejszy będzie ze strony przeciwnej,

powiemy "z dołu" ; z obydwóch zaś stron w kierunku prostopadłym do ruchu wody, będą dopływy pośrednie i symetryczne. Krzywe zwierciadła wody wglębnej względnie powierzchni ciśnień, będą też odmienne od poprzednio znalezionych.

Rozwiązanie takiego zadania w ogólnej postaci natrafia na bardzo poważne trudności o charakterze matematycznym, których małą próbę mieliśmy w § 268 przy pierwszym zadaniu.

281. Dlatego też zadanie poruszone staramy się rozwiązać w sposób prostszy, dość prawdopodobny. Tu zaznaczyć można, że obserwacja potwierdza dobrze zgodność obrazu powierzchni rzeczywistej z obrazem powierzchni powiedzmy, teoretycznej.



rys. 180

Rozumujemy i postępujemy w taki sposób:

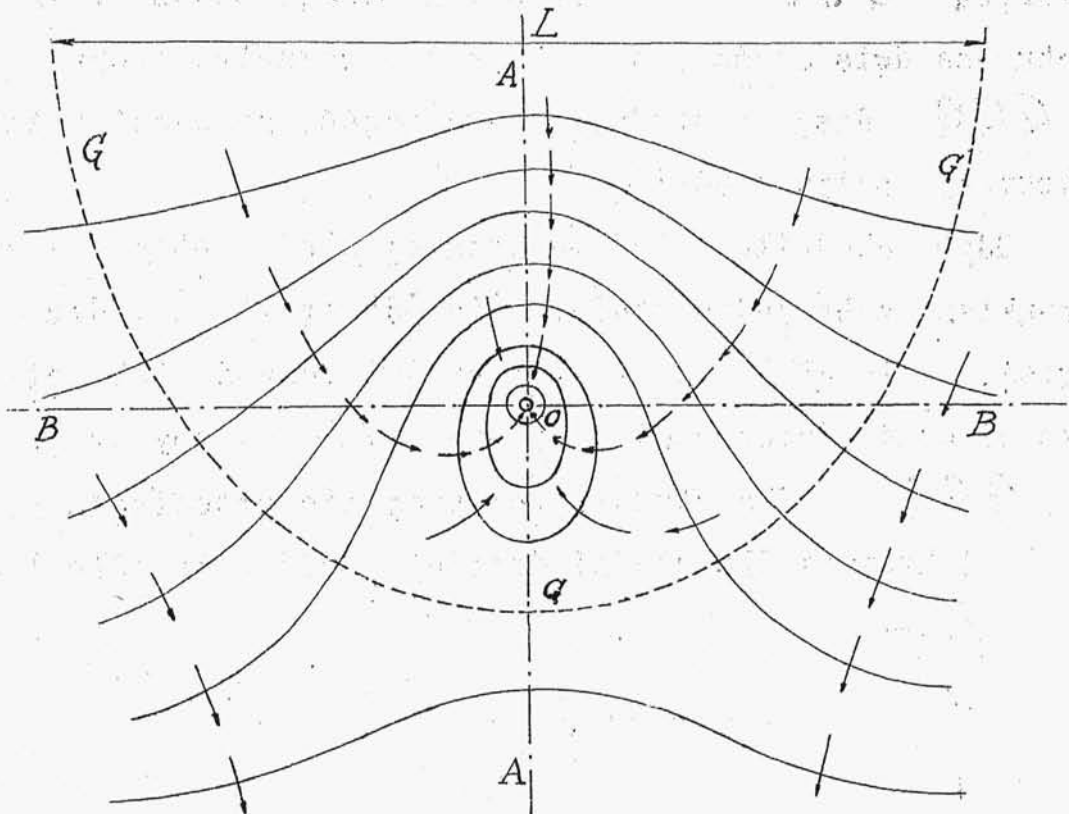
Niech powierzchnia warstwy nieprzepuszczalnej będzie pozioma, wówczas kształt powierzchni zwierciadła we wszystkich kierunkach będzie podobny i wykreślimy go zgodnie z tem, jak poprzednio było wskazane; otrzymamy wtedy wykres podany po stronie prawej rysunku 180. Krzywe jednej i drugiej gałęzi dadzą nam szereg współrzędnych $x_1, z_1; x_2, z_2; x_3, z_3; \dots$ i t.d.

Wykreślimy obecnie powierzchnię warstwy nieprzepuszczalnej i zwierciadło wody wgłębnej: pochylone do poziomu /na rysunku lewym./.

Na tym wykresie wyznaczamy zwierciadło wody zmienione przez wpływ studni, odkładając od osi studni O wartości x_1, x_2, \dots a od warstwy nieprzepuszczalnej wartości z_1, z_2, z_3, \dots . Po połączeniu tak otrzymanych punktów linią ciągłą wykreślimy zwierciadło wody w kierunku pierwotnego ruchu wody gruntowej. Widzimy, że do studni woda dopływa z góry wszyska, jaka poprzednio spływała w strumieniu w dół. Zaś od dołu zauważamy, że zwierciadło w pewnej odległości od osi studni przegina się ku stronie odwrotnej.

Jeśli poprowadzimy prostą, styczną do dolnej gałęzi zwierciadła poziomo, otrzymamy na krzywej zwierciadła

punkt Z_0 , który wskazuje granicę, odkąd woda gruntowa rozdziela się częściowo płynąc ku studni, częściowo w dół.



rys. 181

Gdybyśmy na podstawie stanu zwierciadła wody w kierunku jej ruchu oznaczyli po osi AA szereg wysokości wody w głębszej z poprzednich wykresów, a następnie w kierunku osi BB wyznaczyli szereg wysokości takich, jakie są przy p o z i o m e j

warstwie nieprzepuszczalnej, wówczas moglibyśmy wykreślić warstwicę wodną. Z tych warstwicz poznamy, skąd i w jakim kierunku płynie woda w głębi do studni. Jednocześnie dostrzeżemy, że uda się wyznaczyć taką krzywą GGG , która dzieli wodę, będącą w ruchu, na dwie części, z nich jedna, wewnątrz krzywej GGG dąży do studni, druga część, nazewnątrz tej krzywej, omija studnię.

Gdyby chodziło o budowę drugiej studni obok - z warunkiem, żeby jedna studnia nie odbierała wody drugiej, - należałoby os drugiey studni odsunąć tak daleko od studni pierwszej - po osi BB -, aby krzywa GGG dla studni pierwszej nie przecinała podobnej krzywej dla studni drugiej. Będzie to odległość $= L$. -
